

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Zweiundvierzigster Theil.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
Th. Kunike.

1864.

Inhaltsverzeichniss des zweiundvierzigsten Theils.

Politische Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Nautik.

Physik.

Chemie.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Unterrichtswesen.

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Untersuchungen über die Anwendung der imaginären Grössen in der Curvenlehre.

Von

Herrn Professor Dr. *Durège*

am Polytechnikum in Zürich.

Die folgenden Betrachtungen schliessen sich an die beiden bemerkenswerthen Abhandlungen des Herrn Siebeck („Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen." Crelle's Journ. Bd. 55, und: „Die Brennpunkte eines Kegelschnitts als solche Punkte der Ebene aufgefasst, in welchen je zwei entsprechende Punkte zweier kreisverwandter Systeme vereinigt sind." Grunert's Archiv Bd. 33.) an. In diesen Abhandlungen ist gezeigt, wie man vermittelst der imaginären Grössen die Verwandtschaft zweier ebener Figuren analytisch behandeln kann, und dadurch der Grund zu einer neuen, auf die geometrische Darstellung der imaginären Grössen gebauten Behandlungsweise der analytischen Geometrie gelegt worden. Hierzu einige Beiträge zu liefern, ist der Zweck dieses Aufsatzes.

I.

1. Ich beginne mit einigen Bemerkungen über den Ausdruck für den Krümmungskreis einer Curve. Da diese sich auf die Lehre von der Kreisverwandtschaft stützen, so möge zunächst Folgendes vorangeschickt werden.

Drückt man die Punkte zweier verwandter Figuren-Systeme durch die Werthe zweier complexer Variablen x und y aus, so kann man die Verwandtschaft nur dann durch eine Gleichung zwischen x und y, welche keine dritte veränderliche Grösse ent-

hält, ausdrücken, wenn die beiden Systeme in ihren kleinsten Theilen ähnlich sind; daher hat Siebeck solche Verwandtschaften isogonale genannt. Wenn dies nicht mehr der Fall ist, so wird y, wenn man $x=\xi+i\eta$ setzt, so von den reellen Bestandtheilen ξ und η der complexen Variablen x abhängig sein, dass diese nicht einzig und allein in der Verbindung $\xi+i\eta$ in der Function y enthalten sind. Dies tritt z. B. bei der Verwandtschaft der Affinität ein. Bei dieser sind die Abscissen je zweier entsprechender Punkte einander proportional, ebenso auch die Ordinaten, aber nach einem anderen Verhältnisse *). Setzt man daher $x=\xi+i\eta$, so wird $y=a\xi+ib\eta$ zu setzen sein, wo a und b zwei Constanten bezeichnen. Es ist dann nicht mehr möglich, y durch die Veränderliche x allein auszudrücken.

Die einfachsten isogonalen Verwandtschaften, von denen im Folgenden allein die Rede sein soll, sind nun diejenigen, bei welchen jedem Punkte des einen Systems nur ein einziger Punkt des anderen entspricht. Bei solchen muss daher y eine eindeutige Function von x, und x eine eindeutige Function von y sein. Nun hat Möbius **) gezeigt, dass die Verwandtschaft der Aehnlichkeit entsteht, wenn dem unendlich entfernten Punkte des einen Systems auch der unendlich entfernte Punkt des anderen Systems entspricht. Dann muss also y eine ganze Function von x, und x eine ganze Function von y sein, und folglich wird die Aehnlichkeit dadurch ausgedrückt, dass eine der beiden Variabeln x und y gleich einer linearen Function der anderen gesetzt wird.

Die Kreisverwandtschaft entsteht nach Möbius, wenn zwar wieder jedem Punkte des einen Systems nur ein einziger Punkt des anderen, den unendlich entfernten Punkten jedes Systemes aber endliche Punkte des anderen entsprechen. In diesem Falle muss daher jede der beiden Variablen x und y eine solche eindeutige Function der anderen sein, welche nur für einen einzigen Werth der letzteren unendlich wird. Es müssen also x und y durch eine Gleichung verbunden sein, welche für jede der beiden Variablen vom ersten Grade ist; oder y ist auszudrücken durch einen rationalen Bruch, dessen Zähler und Nenner in Bezug auf x vom ersten Grade sind. In der That hat Siebeck gezeigt, dass, wenn x und y durch eine Gleichung von der Form

$$y=\frac{p+qx}{r+sx}, \tag{1}$$

*) Möbius. Der barycentrische Calcul. Leipzig 1827. p. 195.

**) Möbius. Die Theorie der Kreisverwandtschaft. Abhandl. der math.-phys. Classe der kgl. sächsischen Gesellsch. der Wiss. Bd. 2. Leipzig 1855.

in welcher p, q, r, s complexe Constanten bedeuten, verbunden sind, jedem von dem veränderlichen Punkte x beschriebenen Kreise im Allgemeinen ein von dem Punkte y beschriebener Kreis entspricht*). Hierbei ist noch Folgendes zu bemerken. Da nicht bloss jedem endlichen, sondern auch dem unendlichen Punkte ein bestimmter Punkt entspricht, so wird es angemessen sein, auch den unendlichen Punkt als einen bestimmten aufzufassen. Daher ist die Riemann'sche Vorstellungsart hier ganz am Platze, nach welcher die unendliche Ebene als eine geschlossene Fläche, und der unendlich entfernte Punkt als ein bestimmter Punkt in derselben zu betrachten ist. Demgemäss gehen dann alle Geraden, auch solche, die nicht parallel sind, durch den unendlich entfernten Punkt; man wird also daraus, dass zwei Gerade den unendlich entfernten Punkt gemein haben, noch nicht ihren Parallelismus zu folgern berechtigt sein.

Bringt man die Gleichung (1) auf die Form

$$y - b = \frac{c}{x - a},$$

sowie a, b, c drei andere complexe Constanten bezeichnen, so bedeuten a und b die beiden Centralpunkte der Kreisverwandtschaft, nämlich diejenigen beiden Punkte, welchen der unendlich entfernte Punkt des anderen Systems entspricht; denn, wie sich unmittelbar ergiebt, ist $y = \infty$ für $x = a$ und $x = \infty$ für $y = b$. Beschreibt dann x eine Gerade, welche nicht durch a hindurch geht, so beschreibt y einen Kreis, der durch b geht; jeder durch a hindurchgehenden Geraden x aber entspricht eine durch b hindurchgehende Gerade y. Nimmt man irgend zwei von a und b verschiedene Punkte x_1 und y_1 an und setzt von ihnen fest, dass sie einander entsprechen sollen, so hat man auch

$$\frac{y - b}{y_1 - b} = \frac{x_1 - a}{x - a}.$$

Hiernach ist das ganze System der entsprechenden Punkte bestimmt, sobald die Centralpunkte a und b und irgend ein Paar

*) Der nächste Schritt würde jetzt zu der Annahme führen, dass jedem Punkte des einen Systems zwei Punkte des anderen entsprechen. Dann würden x und y durch eine Gleichung zu verbinden sein, welche in Bezug auf jede Veränderliche vom zweiten Grade ist. Man hätte dann nach Riemann die Ebene als aus zwei Blättern bestehend zu betrachten, und die Windungspunkte des einen Systems würden zugleich die Brennpunkte (im Sinne Siebeck's) des anderen sein.

entsprechender Punkte x_1 und y_1 gegeben sind; und da aus dieser Gleichung folgt, dass das Dreieck $y_1 by$ dem Dreiecke xax_1 einstimmig ähnlich sein muss, so kann zu jedem Punkte x der entsprechende y mit Leichtigkeit construirt werden.

Für das Folgende ist es von Wichtigkeit, bei einer gegebenen Kreisverwandtschaft denjenigen Kreis leicht zeichnen zu können, welcher einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden entspricht. Um diese Aufgabe zu lösen, nehmen wir die, die Kreisverwandtschaft bestimmende Gleichung in ihrer allgemeinsten Form gegeben an:

(1) $$y=\frac{p+qx}{r+sx}.$$

Beschreibt nun x eine Gerade durch den Nullpunkt, so geht der Kreis y durch die beiden Punkte $\frac{p}{r}$ (für $x=0$) und $\frac{q}{s}$ (für $x=\infty$). Differentiirt man ferner die vorige Gleichung, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{rq-sp}{(r+sx)^2},$$

und für $x=0$:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=\frac{rq-sp}{r^2};$$

also bildet das Bogenelement des Kreises y im Punkte $\frac{p}{r}$ (oder, was dasselbe ist, die Tangente in diesem Punkte) mit der Geraden x denselben Winkel, wie der Radius Vector des Punktes $\frac{rq-sp}{r^2}$ mit der Hauptaxe (d. h. derjenigen Geraden, deren Punkte die reellen Zahlen repräsentiren). Hat man in der Gleichung (1) die Constante r durch Division im Zähler und Nenner in 1 verwandelt, und beschreibt der Punkt x die Hauptaxe selber, so giebt der Radius Vector des Punktes

$$q-sp$$

sogleich die Richtung der Tangente im Punkte p an. Da man nun zwei Punkte des Kreises und in einem derselben die Richtung der Tangente bestimmen kann, so hat die Construction des Kreises keine Schwierigkeit.

Unter den mannigfaltigen Formen, welche die Gleichung der Kreisverwandtschaft annehmen kann, möge nur eine hervorgehoben werden, nämlich die folgende:

$$y=\frac{m\pm in\tau}{1\pm i\tau},$$

in welcher m und n zwei complexe Constanten bezeichnen, unter τ aber eine reelle Variable, also ein Punkt, welcher die Hauptaxe durchläuft, verstanden werden soll*). In diesem Falle geht der Kreis y durch die Punkte m und n; die Tangente in m aber hat die Richtung des Radius Vectors des Punktes $\pm i(n-m)$, sie steht also senkrecht auf der Geraden mn, und folglich sind m und n die Endpunkte eines Durchmessers des Kreises. Ist $n=-m$, also

$$y=m\frac{1\mp i\tau}{1\pm i\tau},$$

so sind die in Bezug auf den Nullpunkt diametral gegenüberliegenden Punkte m und $-m$ die Endpunkte eines Durchmessers; daher fällt der Mittelpunkt des Kreises in den Nullpunkt, und der Halbmesser ist gleich dem Radius Vector om**).

2. Wenn die variablen Punkte x und y zwei nach irgend einer durch die Gleichung

$$y=f(x)$$

ausgedrückten Verwandtschaft einander entsprechende Curven beschreiben, so kann man stets die Curve x nach irgend einer anderen Verwandtschaft mit einer beliebigen Geraden oder auch mit der Hauptaxe in Beziehung setzen. Durch Substitution des betreffenden Ausdrucks für x erhält man dann auch y durch diejenige Variable ausgedrückt, welche diese Gerade beschreibt, und es erhellt, dass man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen kann, x beschreibe eine beliebige Gerade und

$$y=f(x)$$

sei die Gleichung irgend einer derselben entsprechenden Curve. Denkt man sich nun in irgend einem Punkte y dieser Curve den Krümmungskreis, so kann man denselben stets als einen der Geraden x kreisverwandten Kreis betrachten; denn da der Punkt y der Curve einem Punkte x der Geraden entspricht, so wird es nur darauf ankommen, die Centralpunkte einer Kreisverwandtschaft so zu bestimmen, dass der kreisverwandte Kreis eben der Krümmungskreis wird. Da aber der letztere von einem Punkte der Curve zum anderen sich ändert, so werden auch die Centralpunkte der Kreisverwandtschaft von Punkt zu Punkt ihre Lage ändern und daher von x und y abhängig sein.

---

*) In der Folge werden solche Grössen, die nur reelle Werthe haben, ausschliesslich durch die kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden.

**) Vgl. Siebeck, Crelle's Journ. Bd. 55. p. 235.

Hält man nun irgend einen Punkt y der Curve, entsprechend einem Punkte x der Geraden, fest und bezeichnet mit z und t zwei in Kreisverwandtschaft stehende Variable, von denen die letztere, t, die nämliche Gerade beschreibt wie x, so kann man, wenn man zunächst nur beachtet, dass der, der Geraden t entsprechende Kreis z durch den Punkt y (entspr. x) hindurch gehen soll, nach §. 1. setzen:

$$(2)\qquad \frac{z-b}{y-b}=\frac{x-a}{t-a} \text{ oder } (z-b)(t-a)=(y-b)(x-a),$$

worin a und b die noch zu bestimmenden Centralpunkte der Kreisverwandtschaft bedeuten. Diese Bestimmung kann nun dadurch geschehen, dass der Krümmungskreis nicht bloss durch den Punkt y, sondern auch noch durch zwei demselben unendlich nahe liegende Punkte hindurch gehen muss. Demgemäss muss die vorige Gleichung erfüllt bleiben, wenn man gleichzeitig

$$t=x+dx,\quad z=y+dy$$

und

$$t=x+2dx,\quad z=y+2dy+d^2y$$

setzt *). Es leuchtet ein, dass dies darauf hinaus kommt, die Gl. (2) nach x und y zu differentiiren und bei dieser Differentiation t und z als constant zu betrachten. Dadurch erhält man die beiden Gleichungen:

$$(y-b)\,dx+(x-a)\,dy=0,$$

$$2dx\,dy+(x-a)\,d^2y=0;$$

und aus ihnen, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{dy}{dx}=y',\quad \frac{d^2y}{dx^2}=y''$$

setzt,

$$a=x+\frac{2y'}{y''},\quad b=y-\frac{2y'^2}{y''}.$$

Nachdem hierdurch die Centralpunkte der Kreisverwandtschaft in ihrer Abhängigkeit von x und y ausgedrückt sind, erhält man durch Substitution dieser Ausdrücke in (2) für den Krümmungskreis folgende Gleichung:

---

*) So lange x eine Gerade beschreibt, kann dx constant und daher $d^2x=0$ angenommen werden.

$$(3) \qquad z = \frac{y - \left(y\frac{y''}{2y'} - y'\right)(t-x)}{1 - \frac{y''}{2y'}(t-x)}.$$

Diese Betrachtung bestätigt zunächst die Richtigkeit eines Satzes, den Siebeck in seiner ersten Abhandlung ohne Beweis mitgetheilt hat*). Da nämlich der Krümmungskreis einer Geraden kreisverwandt ist, so geht er stets durch seinen Centralpunkt $b = y - \frac{2y'^2}{y''}$ hindurch (was auch die Gl. (3) bestätigt, denn für $t = \infty$ wird $z = y - \frac{2y'^2}{y''}$). Nimmt man nun an, dass die Gerade, welche von x und t beschrieben wird, sich um einen festen Punkt, den wir durch x bezeichnen wollen, dreht, so erhält man für y eine Schaar der Verwandtschaft $y = f(x)$ angehöriger Curven, die alle durch einen festen Punkt y (entsprechend x) hindurch gehen. Für diesen festen Punkt haben nun aber auch y' und y'' feste Werthe, und daher ist auch b ein unveränderlicher Punkt. Demnach haben die Krümmungskreise an dem gemeinschaftlichen Punkte einer Schaar durch denselben hindurch gehender Curven y, welche alle nach der nämlichen Verwandtschaft $y = f(x)$ den sich in einem Punkte schneidenden Geraden x entsprechen, noch einen zweiten Punkt gemein, und bilden ein System von Chordalkreisen.

3. Setzt man in der Gl. (3)

$$t - x = t_1$$

und lässt t veränderlich sein, während x fest bleibt, so beschreibt t_1 eine der Geraden t parallele Gerade, die aber durch den Nullpunkt geht. Daher kann man, wenn k irgend einen bestimmten Punkt dieser Geraden, und σ eine reelle Variable bedeutet,

$$t_1 = k\sigma$$

setzen. Wird ausserdem noch der Kürze wegen

$$\frac{y''}{y'} = u$$

gesetzt, so geht die Gleichung (3) des Krümmungskreises über in:

$$z = \frac{y - (\frac{1}{2}yu - y')k\sigma}{1 - \frac{1}{2}uk\sigma}.$$

---

*) Crelle's Journ. Bd. 55. pag. 232. Note.

Diesen Ausdruck kann man nun durch Einführung einer anderen reellen Variablen τ auf die §. 1. erwähnte Form

$$(4) \qquad z = \frac{y + iv\tau}{1 + i\tau}$$

bringen, so dass dann v den dem Berührungspunkte y diametral gegenüberliegenden Punkt des Krümmungskreises und folglich $\frac{y+v}{2}$ den Krümmungsmittelpunkt bedeutet. Zu diesem Ende setzt man

$$\sigma = -\frac{\tau}{\beta - \gamma\tau},$$

so dass τ für alle reellen Werthe von σ ebenfalls reell bleibt; dann erhält man:

$$z = \frac{y(\beta - \gamma\tau) + (\frac{1}{2}yu - y')k\tau}{\beta - \gamma\tau + \frac{1}{2}uk\tau} = \frac{y + \frac{(\frac{1}{2}uk - \gamma)y - y'k}{\beta}\tau}{1 + \frac{\frac{1}{2}uk - \gamma}{\beta}\tau}.$$

Soll nun dieser Ausdruck die Form (4) annehmen, so muss es zuerst möglich sein, die reellen Grössen β und γ so zu bestimmen, dass

$$\frac{\frac{1}{2}uk - \gamma}{\beta} = i$$

werde, und dann ist

$$iv = iy - \frac{y'k}{\beta}.$$

Diese Bestimmung ist aber möglich, denn man erhält sofort

$$\tfrac{1}{2}uk = \gamma + i\beta,$$

und folglich ist γ der reelle und $i\beta$ der imaginäre Theil der complexen Grösse $\frac{1}{2}uk$. Alsdann ergiebt sich für den diametral gegenüber liegenden Punkt:

$$v = y - \frac{ky'}{i\beta},$$

und für den Krümmungsmittelpunkt:

$$\frac{y + v}{2} = y - \frac{ky'}{2i\beta}.$$

Lässt man nun den Punkt y auf der gegebenen Curve seine Lage ändern, so beschreibt der Krümmungsmittelpunkt die Evolute der Curve; bezeichnet man daher den Evolutenpunkt, welcher dem

Curvenpunkt y zugehört, mit E, so erhält man für die Evolute die Gleichung

$$E = y - \frac{ky'}{2i\beta},$$

worin nun $2i\beta$ den imaginären Theil von ku oder $k\frac{y''}{y'}$ bedeutet. Dieser Ausdruck nimmt eine noch einfachere Gestalt an, wenn man den Neigungswinkel des veränderlichen Punktes y' einführt. Bezeichnet man diesen nämlich mit φ und setzt demgemäss

$$y' = \varrho e^{i\varphi},$$

so ist

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \left(\frac{d\varrho}{dx} + i\varrho\frac{d\varphi}{dx}\right)e^{i\varphi},$$

und daher

$$u = \frac{y''}{y'} = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{dx} + i\frac{d\varphi}{dx}.$$

Nun liegt ferner der Punkt k auf einer durch den Nullpunkt gehenden, mit x parallelen Geraden, folglich hat das Element dx die Richtung des Radius Vectors von k; bezeichnet daher $d\xi$ ein reelles Differential, ein Element der Hauptaxe, so kann

$$dx = kd\xi$$

gesetzt werden; dann ist

$$ku = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{d\xi} + i\frac{d\varphi}{d\xi},$$

und der imaginäre Theil hievon

$$2i\beta = i\frac{d\varphi}{d\xi};$$

ebenso ist

$$ky' = k\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi},$$

und damit erhält man für die Evolute den ausserordentlich einfachen Ausdruck:

$$E = y + i\frac{dy}{d\varphi},$$

worin φ den Neigungswinkel des Punktes $\frac{dy}{dx}$ bedeutet. Der Krümmungshalbmesser endlich wird dann ausgedrückt durch

$$\text{mod.}\left(\frac{dy}{d\varphi}\right).$$

4. Wenn der Krümmungskreis in eine Gerade übergeht, so ist der Berührungspunkt ein Wendepunkt der Curve. Dies tritt nun ein, wenn die dem Krümmungskreise kreisverwandte Gerade durch ihren Centralpunkt hindurch geht. Wenn also für irgend einen Werth von x der Centralpunkt

$$a = x + \frac{2y'}{y''}$$

auf der Geraden x selbst liegt, so ist der entsprechende Curvenpunkt y ein Wendepunkt. In diesem Falle ist aber $a - x$ ein Punkt, dessen Radius Vector der Geraden x parallel ist, dasselbe gilt also auch von $\frac{2y'}{y''}$ und von $\frac{y'}{y''}$. Construirt man daher die Curve, welche der veränderliche Punkt $\frac{y'}{y''}$ beschreibt, und sucht die Punkte auf, in welchen sie von einer durch den Nullpunkt mit der Geraden x parallel gezogenen Geraden geschnitten wird, so geben diese Punkte die Werthe von $\frac{1}{2}(a-x)$, für welche die Curve y Wendepunkte besitzt.

II.

5. Eine zweite Bemerkung betrifft die Bestimmung der Fusspunktencurve für eine gegebene Curve. Um diese zu erhalten, muss zuerst die Aufgabe gelöst werden, den Fusspunkt des Perpendikels zu finden, das vom Nullpunkte auf eine gegebene Gerade herabgelassen ist. Sei

$$a + b\tau$$

der Ausdruck einer Geraden, welche durch a hindurchgeht und mit ob parallel läuft. Fällt man von o auf dieselbe ein Perpendikel und bezeichnet mit p den Fusspunkt desselben, so liegt erstlich p auf der obigen Geraden; also giebt es einen reellen Werth von τ, für welchen

$$p = a + b\tau$$

ist; zweitens aber steht op senkrecht auf ob, daher muss es auch einen reellen Werth σ geben, für welchen

$$p = ib\sigma$$

ist. Man hat also

$$a + b\tau = ib\sigma$$

oder

$$\frac{a}{b} = -\tau + i\sigma.$$

Hiernach sind die beiden reellen Werthe τ und σ dadurch bestimmt, dass $-\tau$ der reelle und $i\sigma$ der imaginäre Theil der complexen Grösse $\frac{a}{b}$ sein muss. Wendet man eine von Bjerknes *) vorgeschlagene Bezeichnungsweise an, nach welcher der in i multiplicirte Theil einer complexen Grösse u durch

$$\text{im}\,(u)$$

ausgedrückt wird, so kann man in unserem Falle schreiben:

$$\sigma = \text{im}\left(\frac{a}{b}\right),$$

und erhält dann für den gesuchten Fusspunkt p des auf die Gerade $a + b\tau$ vom Nullpunkte gefällten Perpendikels den Ausdruck

$$p = ib\;\text{im}\left(\frac{a}{b}\right).$$

Nun sei, durch eine reelle Variable ϱ ausgedrückt,

$$z = f(\varrho)$$

die Gleichung einer Curve; dann wird die Tangente am Punkte z durch

$$z + \frac{dz}{d\varrho}\tau$$

ausgedrückt**), wo τ eine andere reelle Variable bedeutet. Für den Fusspunkt y des aus dem Nullpunkte auf die Tangente gefällten Perpendikels erhält man daher nach dem Vorigen:

$$(5) \qquad y = i\frac{dz}{d\varrho}\;\text{im}\left(\frac{z}{\frac{dz}{d\varrho}}\right),$$

und dies ist also für ein veränderliches z zugleich die Gleichung der Fusspunktencurve.

Um diese Betrachtung auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir die Fusspunktencurve einer Hyperbel aufsuchen. Man kann

*) Ueber die geometrische Repräsentation der Gleichungen zwischen zwei veränderlichen, reellen oder complexen Grössen. Universitäts-Progr. Christiania 1859. pag. 28.

**) Siebeck. Crelle's Journ. Bd. 55. pag. 234.

leicht einen einfachen Ausdruck für eine Hyperbel gewinnen, wenn man die Eigenschaft analytisch ausdrückt, dass zwei von einem Hyperbelpunkte mit den Asymptoten parallel laufende Gerade von den Asymptoten zwei Stücke abschneiden, deren Product constant ist. Sei z ein beliebiger Punkt der Hyperbel, deren Mittelpunkt im Nullpunkte liege; man ziehe aus z zwei Parallelen mit den Asymptoten und bezeichne die Durchschnittspunkte mit den letzteren durch x und u, so ist, wenn der constante Werth des Products der Abschnitte durch c^2 bezeichnet wird,

$$xu = c^2 \quad \text{und} \quad x + u = z.$$

Durchläuft nun x die eine Asymptote, so beschreibt $u = \frac{c^2}{x}$ die andere Asymptote, und die Hyperbel wird durch die Gleichung

$$z = x + \frac{c^2}{x}$$

ausgedrückt. Da c die mittlere Proportionale zwischen den Asymptotenpunkten x und u ist, so halbirt der Radius Vector des Punktes c den Winkel zwischen den Asymptoten; es wird daher am einfachsten sein, c als Ausdruck der Einheit anzunehmen, und dann hat man für die Hyperbel

$$z = x + \frac{1}{x},$$

worin nun x eine durch o gehende Gerade beschreibt, welche die eine Asymptote der Hyperbel bildet, während die andere von dem veränderlichen Punkte $\frac{1}{x}$ beschrieben wird. Will man jetzt z durch eine reelle Variable ϱ ausgedrückt haben, so braucht man nur

$$x = k\varrho$$

zu setzen, wo k einen beliebigen Punkt der Asymptote x bedeutet. Wir wollen der Einfachheit wegen gleich annehmen, dass dieser Punkt k vom Nullpunkte die Entfernung 1 habe, dass also mod. $k = 1$ sei.

Um nun die Fusspunktencurve der Hyperbel zu finden, bilden wir zunächst

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

und mit Berücksichtigung von $dx = k\,d\varrho$:

$$\frac{dz}{d\varrho}=\frac{k}{x}(x-\frac{1}{x})=\frac{1}{\varrho}(x-\frac{1}{x}).$$

Man übersieht leicht, dass durch $x-\frac{1}{x}$ die der Hyperbel z conjugirte Hyperbel ausgedrückt wird, weil $-\frac{1}{x}$ dem Punkte $\frac{1}{x}$ diametral gegenüberliegt; bezeichnet man diese durch z', so hat man einfach

$$\frac{dz}{d\varrho}=\frac{z'}{\varrho},$$

(worin zugleich der Satz enthalten ist, dass die Tangente einer Hyperbel dem conjugirten Durchmesser parallel ist), und erhält dann aus (5) die Fusspunktencurve ausgedrückt durch die Gleichung

$$y=i\frac{z'}{\varrho}\operatorname{im}\left(\frac{\varrho z}{z'}\right).$$

Weil aber ϱ reell ist, so ist $\operatorname{im}\left(\frac{\varrho z}{z'}\right)=\varrho\operatorname{im}\left(\frac{z}{z'}\right)$, und daher

$$y=iz'\operatorname{im}\left(\frac{z}{z'}\right).$$

Um nun diese Gleichung weiter zu entwickeln, kehren wir zu den reellen, die complexen Grössen zusammensetzenden Ausdrücken zurück. Bezeichnet man mit α den Winkel, welchen die Asymptote x mit der Hauptaxe bildet, so ist, weil mod. $k=1$ angenommen war,

$$k=\cos\alpha+i\sin\alpha,\quad x=k\varrho=\varrho(\cos\alpha+i\sin\alpha);$$

demnach

$$x\pm\frac{1}{x}=(\varrho\pm\frac{1}{\varrho})\cos\alpha+i(\varrho\mp\frac{1}{\varrho})\sin\alpha,$$

also, wenn man der Kürze wegen

$$\varrho+\frac{1}{\varrho}=\delta,\quad \varrho-\frac{1}{\varrho}=\varepsilon$$

setzt:

$$\frac{z}{z'}=\frac{\delta\cos\alpha+i\varepsilon\sin\alpha}{\varepsilon\cos\alpha+i\delta\sin\alpha}=\frac{\delta\varepsilon+i\,\frac{\varepsilon^2-\delta^2}{2}\sin 2\alpha}{\varepsilon^2\cos^2\alpha+\delta^2\sin^2\alpha}.$$

Demnach ist

$$\operatorname{im}\left(\frac{z}{z'}\right)=\frac{\frac{1}{2}(\varepsilon^2-\delta^2)\sin 2\alpha}{\varepsilon^2\cos^2\alpha+\delta^2\sin^2\alpha}=-\frac{2\sin 2\alpha}{\varrho^2+\frac{1}{\varrho^2}-2\cos 2\alpha}.$$

Um nun dies wieder durch x auszudrücken, führe man Exponentialgrössen ein und schreibe

$$i\,.\operatorname{im}\left(\frac{z}{z'}\right)=-\frac{e^{2i\alpha}-e^{-2i\alpha}}{\varrho^2+\frac{1}{\varrho^2}-e^{2i\alpha}-e^{-2i\alpha}};$$

substituirt man darin

$$\varrho=\frac{x}{k} \quad \text{und } e^{i\alpha}=k,$$

so erhält man:

$$i\,.\operatorname{im}\left(\frac{z}{z'}\right)=-\frac{k^2-\frac{1}{k^2}}{\frac{x^2}{k^2}+\frac{k^2}{x^2}-k^2-\frac{1}{k^2}}$$

$$=-\frac{k^2-\frac{1}{k^2}}{\left(\frac{x}{k^2}-\frac{k^2}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)},$$

und endlich, da $z'=x-\frac{1}{x}$ war,

$$y=-\frac{k^2-\frac{1}{k^2}}{\frac{x}{k^2}-\frac{k^2}{x}}.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung für die Fusspunktencurve der Hyperbel. Dieselbe lässt sich aber mit einer anderen Hyperbel in Beziehung setzen. Weil nämlich

$$\frac{x}{k^2}=\frac{\varrho}{k}$$

ist, so beschreibt der veränderliche Punkt $\frac{x}{k^2}$ die Gerade $\frac{1}{x}$; setzt man daher $\frac{x}{k^2}=v$, so sind v und $\frac{1}{v}$ wiederum die Asymptoten der gegebenen Hyperbel. Ausserdem ist $k^2-\frac{1}{k^2}=2i\sin 2\alpha$, man hat also auch

$$y = -\frac{2i \sin 2\alpha}{v - \frac{1}{v}}$$

oder

$$y = \frac{2 \sin 2\alpha}{iv + \frac{1}{iv}}.$$

Darin ist aber $iv + \frac{1}{iv} = w$ der Ausdruck einer Hyperbel, deren Asymptoten auf denen der gegebenen Hyperbel senkrecht stehen. Setzt man endlich noch

$$\frac{w}{2 \sin 2\alpha} = w',$$

so ist w' eine der Hyperbel w ähnliche und ähnlich liegende Hyperbel, da ihre Radien Vectoren im Verhältnisse von $1 : 2 \sin 2\alpha$ verkleinert sind, und man erhält

$$y = \frac{1}{w'},$$

so dass die Fusspunktencurve y der Hyperbel w' reciprok ist. Für den speciellen Fall der gleichseitigen Hyperbel, in welchem die Fusspunktencurve eine Lemiscate ist, hat Siebeck dies Resultat aus einer anderen Betrachtung abgeleitet *).

III.

6. Ich wende mich nun zur Betrachtung einer speciellen Art von Curven, die aus den Kegelschnitten entspringen. Siebeck hat in seiner zweiten Abhandlung (Grunert's Archiv Bd. 33.) gezeigt, dass in Uebereinstimmung mit dem barycentrischen Calcul der Ausdruck

$$y = \frac{a + 2b\tau + c\tau^2}{\varkappa + 2\lambda\tau + \mu\tau^2}$$

einen Kegelschnitt bedeutet, wenn τ eine reelle Variable bezeichnet, und der Nenner ganz reell ist. Es wird weiter unten sich zeigen, wie man direct zu diesem Ausdruck gelangen kann. Da hierin y für ein unendlich grosses τ einen endlichen Werth annimmt, so lange μ von Null verschieden ist, so geht die von y beschriebene Curve entweder gar nicht oder einmal oder zwei Mal durch den unendlich entfernten Punkt, je nachdem die Gleichung

---

*) Crelle's Journ. Bd. 55. p. 252.

$$\varkappa + 2\lambda\tau + \mu\tau^2 = 0$$

keine oder zwei gleiche oder zwei ungleiche reelle Wurzeln hat. Der Punkt y wird daher in diesen drei Fällen, wie Siebeck auch angiebt, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel beschreiben.

Man kann nun in diesen drei Fällen der obigen Gleichung einfachere Gestalten geben. Wenn man nämlich statt der Variablen τ eine andere stets reell bleibende Variable σ einführt, durch welche der Ausdruck für y seine Form nicht ändert, was im Allgemeinen durch eine Substitution von der Form

$$\tau = \frac{\alpha + \beta\sigma}{1 + \gamma\sigma}$$

geleistet wird, so kann in den drei erwähnten Fällen der Nenner auf $1 + \sigma^2$, 1, $1 - \sigma^2$ reducirt werden, so dass man für die Parabel dieselbe Form wieder erhält, unter welcher Siebeck diese Curve in seiner ersten Abhandlung betrachtet hat. Die Ausführung der Rechnung, welche keinerlei Schwierigkeiten unterliegt, möge hier der Kürze wegen übergangen werden.

Es soll nun die Parabel weiter nicht berücksichtigt, sondern nur die Ellipse und Hyperbel betrachtet werden, deren Gleichungen sich also in den Formen

$$y = \frac{a + 2b\sigma + c\sigma^2}{1 + \sigma^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{a + 2b\sigma + c\sigma^2}{1 - \sigma^2}$$

schreiben lassen; a, b, c bedeuten darin beliebige complexe Constanten. Nun ist aber ersichtlich, dass jeder dieser Ausdrücke sogleich in den anderen übergeht, wenn σ sich in $i\sigma$ verwandelt. Daher kann man beide Curven wieder unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte betrachten. Schreibt man nämlich x statt σ, und betrachtet die durch die Gleichung

$$y = \frac{a + 2bx + cx^2}{1 - x^2}$$

ausgedrückte Verwandtschaft, so beschreibt y eine Hyperbel, wenn x die Hauptaxe, und eine Ellipse, wenn x die imaginäre Axe durchläuft; wenn aber x eine beliebige durch Null gehende Gerade beschreibt, so wird eine neue Art von Curven entstehen.

Die vorige Gleichung nimmt eine noch einfachere Gestalt an, wenn man die Curve so parallel mit sich selbst verschiebt, dass der Mittelpunkt mit dem Nullpunkte zusammenfällt. Suchen wir daher zuerst den Mittelpunkt. Bezeichnet man diesen mit m, und

mit y und y' zwei diametral gegenüberliegende Punkte des Kegelschnitts, so muss m so bestimmt werden können, dass

$$y-m=-(y'-m)$$

werde. Bezeichnen nun x und x' die Werthe von x, welche y und y' entsprechen, so hat man

$$y-m=\frac{(a-m)+2bx+(c+m)x^2}{1-x^2}=-\frac{(a-m)+2bx'+(c+m)x'^2}{1-x'^2}.$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn man

$$x'=\frac{1}{x}$$

setzt, was erlaubt ist, da $\frac{1}{x}$ ein Punkt der Geraden x ist, sowohl wenn diese mit der Hauptaxe, als auch wenn sie mit der imaginären Axe zusammenfällt. Hierdurch erhält man

$$\frac{(a-m)+2bx+(c+m)x^2}{1-x^2}=\frac{(c+m)+2bx+(a-m)x^2}{1-x^2},$$

und diese Gleichung wird erfüllt, wenn

$$a-m=c+m \quad \text{oder} \quad m=\frac{a-c}{2}$$

ist. Daher ist $\frac{a-c}{2}$ der Mittelpunkt des Kegelschnitts. Verschiebt man nun den letzteren so, dass der Mittelpunkt in den Nullpunkt fällt, so wird jeder Punkt dieses verschobenen Kegelschnitts durch $y-m$ ausgedrückt; schreibt man wieder y dafür und setzt ausserdem

$$a-m=c+m=\frac{a+c}{2}=n,$$

so ergiebt sich als Mittelpunkts-Gleichung des Kegelschnitts

$$y=\frac{2bx+n(1+x^2)}{1-x^2}.$$

Derselbe geht stets durch n (für $x=0$), also auch durch $-n$ (für $x=\infty$); beschreibt ferner x die imaginäre Axe, so kann $x=\pm i$ werden, dann ist $y=\pm ib$; also sind $\pm ib$ Punkte der Ellipse; bei der Hyperbel dagegen, wo x die Hauptaxe beschreibt, kann x nicht $=i$ werden, daher geht die Hyperbel weder durch b noch durch ib.

7. Bezeichnet man den Punkt des Kegelschnitts, welcher dem Punkte $-x$ entspricht, mit $\overline{y}$, so hat man für diesen

$$\bar{y} = \frac{-2bx + n(1+x^2)}{1-x^2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{y-\bar{y}}{2} = \frac{2bx}{1-x^2}, \quad \frac{y+\bar{y}}{2} = n\frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Ist nun x reell, so sind $\frac{x}{1-x^2}$ und $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ beide reelle Grössen, daher verschiebt sich bei veränderlichem x die Sehne $y\bar{y}$ parallel mit der Geraden ob, während ihr Halbirungspunkt $\frac{y+\bar{y}}{2}$ auf der Geraden on liegt. Ist dagegen x rein imaginär, so ist zwar $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ wieder reell, aber $\frac{x}{1-x^2}$ rein imaginär, folglich steht dann die Sehne $y\bar{y}$ senkrecht auf ob, und ihr Halbirungspunkt beschreibt ebenfalls die Gerade on. Hieraus erhellt, dass bei der Hyperbel n und b, und bei der Ellipse n und ib die Endpunkte conjugirter Halbdurchmesser sind.

Führt man nun statt x eine andere Variable z ein, die mit jener in der Beziehung

$$x = \frac{g+z}{1+gz}$$

steht, so durchläuft z die nämliche Gerade wie x, wenn man für g einen beliebigen Punkt dieser Geraden annimmt, denn dann sind x, g und z gleichzeitig reell oder rein imaginär. Diese Substitution hat nun aber die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass durch sie der Kegelschnitt-Ausdruck seine Form nicht ändert. Denn man erhält

$$y = \frac{2b(1+gz)(g+z) + n[(1+gz)^2 + (g+z)^2]}{(1+gz)^2 - (g+z)^2},$$

also, wenn man

$$\frac{2ng + b(1+g^2)}{1-g^2} = b', \quad \frac{2bg + n(1+g^2)}{1-g^2} = n'$$

setzt,

$$y = \frac{2b'z + n'(1+z^2)}{1-z^2}.$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass auch n' und b' (bei der Ellipse n und ib') die Endpunkte conjugirter Halbdurchmesser sind. Nun ist aber $y = n'$, wenn $z = 0$ oder $x = g$ ist; nimmt man also für g

nach und nach jeden Punkt der Geraden x an, so fällt n' nach und nach mit jedem Punkte des Kegelschnitts zusammen. Schreibt man nun wieder x für g und zieht durch einen beliebigen Punkt

(6) $$n' = \frac{2bx + n(1 + x^2)}{1 - x^2}$$

des Kegelschnitts einen Durchmesser, so ist der eine Endpunkt des ihm conjugirten Durchmessers durch den Ausdruck

(7) $$b' = \frac{2nx + b(1 + x^2)}{1 - x^2}$$

(bei der Ellipse durch ib') bestimmt. Der letztere Ausdruck hat dieselbe Form wie der erstere, indem nur b und n mit einander vertauscht sind. Daher beschreibt b' ebenfalls eine Hyperbel, welche mit der ersteren den unendlich entfernten Punkt (entsprechend $x = \pm 1$) gemeinschaftlich hat. Ist also

$$y = \frac{2bx + n(1 + x^2)}{1 - x^2}$$

bei reellem x Ausdruck einer Hyperbel, so ist

$$y = \frac{2nx + b(1 + x^2)}{1 - x^2}$$

der Ausdruck für die conjugirte Hyperbel.

Aus den Gleichungen (6) und (7) erhält man ohne Mühe

$$\frac{1 + x^2}{1 - x^2} = \frac{nn' - bb'}{n^2 - b^2}, \quad \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{nb' - bn'}{n^2 - b^2},$$

und wenn man das Quadrat der zweiten dieser Gleichungen von dem der ersten abzieht:

$$n'^2 - b'^2 = n^2 - b^2,$$

was sich auch schreiben lässt

$$n'^2 + (ib')^2 = n^2 + (ib)^2.$$

Darin liegt der bekannte Satz, dass bei der Hyperbel die Differenz und bei der Ellipse die Summe der Quadrate conjugirter Halbdurchmesser constant ist. Zugleich bestätigt sich die Bemerkung Siebeck's, dass zwei Punkte x und y, die zu einander in der Verwandtschaft

$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

stehen, die Endpunkte conjugirter Halbdurchmesser einer Ellipse

sind; als Ergänzung dazu aber ergiebt sich, dass zwei Punkten, die in der Verwandtschaft

$$x^2 - y^2 = \text{const.}$$

stehen, die Endpunkte conjugirter Halbdurchmesser einer Hyperbel bilden. Setzt man nun

$$n^2 - b^2 = e^2,$$

so folgt ferner, dass $+e$ und $-e$ die beiden Brennpunkte sind. Die Ellipse und Hyperbel sind daher confocal, was auch daraus hervorgeht, dass beide Curven der nämlichen Verwandtschaft angehören. Siebeck hat nämlich den Begriff der Brennpunkte einer Verwandtschaft aufgestellt, die dadurch definirt sind, dass in ihnen der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ verschwindet, und in der That fallen bei Kegelschnitten in der Regel diese Brennpunkte mit den gewöhnlich so genannten Brennpunkten zusammen*). Bildet man nun in der vorliegenden Verwandtschaft $\frac{dy}{dx}$, und lässt diesen Ausdruck verschwinden, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = 2\,\frac{b + (n+y)\,x}{1 - x^2} = 0,$$

und hieraus

$$x = \frac{-n \pm e}{b}, \quad y = \pm e.$$

8. Wir gehen nun dazu über, die Asymptoten der Hyperbel aufzusuchen. Der unendlich entfernte Punkt entspricht den Punkten $+1$ und -1 der Hauptaxe. Nehmen wir zuerst den ersteren, $x = +1$, so haben wir als Asymptote eine Gerade w zu suchen, welche durch den Nullpunkt geht, also von der Form

$$w = l.\sigma$$

ist, wo l einen noch näher zu bestimmenden Punkt und σ eine reelle Variable bedeutet; ferner muss w für $x = 1$ unendlich werden, jedoch so, dass $y - w$ sich der Null nähert. Ist nun

$$\sigma = \frac{\alpha + \beta x}{1 + \gamma x},$$

---

*) Es kann aber unter ganz besonderen Umständen auch Fälle geben, in denen diese Punkte zwar die Eigenschaft, Rückkehrpunkte zu sein, bewahren, nicht aber als eigentliche Brennpunkte auftreten.

so muss σ für $x=1$ unendlich werden, also $\gamma=-1$ sein; man kann daher setzen:

$$w=l.\frac{\alpha+\beta x}{1-x},$$

und hat nun α, β und l den obigen Bedingungen gemäss zu bestimmen. Nun ist

$$y-w=\frac{2bx+n(1+x^2)}{1-x^2}-l\frac{\alpha+\beta x}{1-x}$$
$$=\frac{2bx+n(1+x^2)-l(\alpha+\beta x)(1+x)}{1-x^2};$$

soll aber dieser Ausdruck für $x=1$ nicht nur nicht unendlich werden, sondern sogar verschwinden, so muss der Zähler von der Form

$$h(1-x)^2$$

werden. Dies giebt die Bedingungen

$$h=n-l\alpha,\quad 2h=l(\alpha+\beta)-2b,\quad h=n-l\beta;$$

aus denen

$$\beta=\alpha,\quad l\alpha=\frac{n+b}{2},\qquad h=\frac{n-b}{2}$$

folgt. Der Ausdruck für die eine Asymptote wird daher

$$w=\frac{n+b}{2}\cdot\frac{1+x}{1-x} \text{ und zugleich } y-w=\frac{n-b}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}.$$

Auf dieselbe Weise findet sich die zweite Asymptote, welche für $x=-1$ den unendlich entfernten Punkt mit der Hyperbel gemein hat. Bezeichnet man diese mit w', so erhält man für sie

$$w'=\frac{n-b}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x} \text{ und } y-w'=\frac{n+b}{2}\cdot\frac{1+x}{1-x}.$$

Hieraus folgt nun aber unmittelbar

$$y=w+w' \text{ und } ww'=\frac{n^2-b^2}{4}=\tfrac{1}{4}e^2.$$

Damit sind wir wieder zu dem einfachen Ausdrucke für die Hyperbel zurückgelangt, der schon §. 5. aufgestellt wurde. In dem Falle, dass man $\frac{1}{2}e$ zur Einheit nimmt, sind w und w' reciprok; da nun aber auch im allgemeinen Falle $w'=\frac{\frac{1}{4}e^2}{w}$ ist, und daher die Geraden w und w' mit dem Radius Vector von $\frac{1}{2}e$ zu beiden

Seiten gleiche Winkel einschliessen, und ausserdem $\frac{1}{2}e$ die mittlere Proportionale je zweier Punkte w und w' ist, so wollen wir die letzteren reciprok in Bezug auf $\frac{1}{2}e$ nennen. Durch Substitution der Ausdrücke für w und w' kann man nun auch schreiben

$$y=\frac{n+b}{2}\cdot\frac{1+x}{1-x}+\frac{n-b}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}.$$

9. Diese Gleichung kann auch direct durch eine leichte Umformung aus unserer ursprünglichen Gleichung gewonnen werden. Ihre Existenz ist daher von der Linie, welche die Variable x beschreibt, unabhängig. Demnach kann man sich die Frage vorlegen, was die Linien w und w' bedeuten, wenn x nicht mehr die Hauptaxe, sondern die imaginäre Axe, y also eine Ellipse durchläuft. Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{n+b}{2}=p,\quad \frac{n-b}{2}=q;$$

so ist

$$w=p\frac{1+x}{1-x},\quad w'=q\frac{1-x}{1+x}.$$

Sobald nun x rein imaginär ist, beschreibt nach §. 1. w einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius op, ebenso w' einen concentrischen Kreis mit dem Radius oq, jedoch in entgegengesetzter Richtung. Diese beiden Kreise treten also bei der Ellipse an die Stelle der Asymptoten der Hyperbel. Da immer noch w und w' in Bezug auf $\frac{1}{2}e$ reciprok sind, so bilden die nach zwei entsprechenden Punkten der Kreise gerichteten Radien mit der Geraden oe zu beiden Seiten gleiche Winkel, und wegen der Gleichung $y=w+w'$ ist der entsprechende Punkt der Ellipse der vierte Eckpunkt des Parallelogramms aus je zwei entsprechenden Radien dieser Kreise. Diese beiden Radien haben gleiche Richtung, wenn sie in die Richtung oe fallen, und direct entgegengesetzte Richtung, wenn sie senkrecht auf oe stehen; daher ist die Summe der Radien die grosse, und die Differenz die kleine Halbaxe der Ellipse. Da endlich von den drei Grössen p, q, e zwei beliebig gewählt werden können, so kann man folgenden Satz aussprechen: Zieht man durch den Mittelpunkt zweier concentrischer Kreise eine beliebige feste Gerade und vollendet das Parallelogramm aus je zwei Radien, welche verschiedenen Kreisen angehören und mit der festen Geraden zu beiden Seiten gleiche Winkel einschliessen, so beschreibt der vierte Eckpunkt dieser Parallelogramme eine Ellipse, deren Halbaxen die Summe und Differenz der Radien sind. Die Brennpunkte liegen auf der festen Geraden, und die

halbe Excentricität ist die mittlere Proportionale aus den Durchmessern der Kreise.

Da nun die in §. 5. betrachtete einfache Form

$$y = w + \frac{\frac{1}{4}e^2}{w}$$

ebensowohl für die Hyperbel wie für die Ellipse gültig ist, so kann man von ihr ausgehend durch leichte Transformationen zu dem Kegelschnitt-Ausdrucke gelangen, von dem wir mit Siebeck ausgegangen sind, was hier indessen nicht näher ausgeführt werden soll.

10. In der bisher betrachteten Verwandtschaft

$$y = \frac{2bx + n(1+x^2)}{1-x^2}$$

entspricht der Hauptaxe eine Hyperbel, der imaginären Axe eine Ellipse. Diese beiden Kegelschnitte müssen daher die Uebergangsgestalten von Curven bilden, welche beliebigen durch den Nullpunkt gehenden Geraden entsprechen. Diese Curven sollen nun im Folgenden näher untersucht werden.

Zuerst gehen sie alle durch die Punkte n und $-n$, da x die Werthe 0 und ∞ annimmt; ferner sind sie sämmtlich geschlossene Curven, da x nicht $= \pm 1$, also y nicht unendlich werden kann. Einen Mittelpunkt aber besitzen sie nicht; denn es geht y in $-y$ über, wenn man x in $\frac{1}{x}$ verwandelt; wenn aber x weder die Haupt-, noch die imaginäre Axe beschreibt, so ist $\frac{1}{x}$ niemals ein Punkt der Geraden x. Dagegen ergiebt sich hieraus, dass je zweien Geraden, welche mit der Hauptaxe zu beiden Seiten gleiche Winkel bilden, zwei congruente und diametral gegenüberliegende Curven entsprechen.

Die Variabeln w und w' beschreiben auch jetzt noch Kreise, deren Mittelpunkte aber nicht mehr zusammenfallen. Da nämlich

$$w = p\frac{1+x}{1-x}, \quad w' = q\frac{1-x}{1+x}$$

ist, so geht der Kreis w durch p und $-p$ hindurch. Ausserdem ist

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2p}{(1-x)^2} \quad \text{also für } x = 0 \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = 2p,$$

folglich bildet die Tangente im Punkte p mit der Geraden x denselben Winkel, wie die Gerade op mit der Hauptaxe. Ebenso geht der Kreis w' durch q und $-q$, und seine Tangente in q bildet mit der Geraden x den Winkel loq. Hiernach können beide Kreise leicht gezeichnet werden, und da immer noch

$$ww' = pq = \tfrac{1}{4}e^2,$$

also die beiden Kreise in Bezug auf $\frac{1}{2}e$ reciprok sind, so findet man je zwei entsprechende Punkte, wenn man Radien Vectoren zieht, die mit der Geraden oe zu beiden Seiten gleiche Winkel bilden. Endlich ist nun auch noch immer $y = w + w'$, also jeder Curvenpunkt die Summe je zweier entsprechender Punkte der Kreise w und w', und daher kann die Curve mit Hülfe der letzteren leicht construirt werden.

Da der Kreis w durch p und $-p$, und w' durch q und $-q$ hindurchgeht, so liegt der Nullpunkt stets innerhalb eines jeden. Daher sind nur die beiden Fälle möglich, dass entweder die Kreise sich schneiden, oder dass einer ganz innerhalb des anderen liegt. In dem Falle nun, dass die Kreise sich schneiden, kann leicht gezeigt werden, dass die Durchschnittspunkte entsprechende Punkte sind; denn, wenn w zugleich ein Punkt des Kreises w' ist, so muss wegen der involutorischen Kreisverwandtschaft $ww' = \frac{1}{4}e^2$ auch w' ein Punkt des Kreises w sein; im Allgemeinen aber werden die entsprechenden Punkte nicht zusammenfallen, da dies nur geschieht, wenn $w = w' = \pm\frac{1}{2}e$ ist, also kann dem einen Durchschnittspunkte kein anderer, als der andere Durchchnittspunkt entsprechen. Hieraus folgt aber, dass die Summe $w + w'$ denselben Werth erhält, mag man für w den einen oder den anderen Durchschnittspunkt setzen; demnach bekommt y für zwei verschiedene Werthe von x denselben Werth, die Curve y geht also zweimal durch ein und den nämlichen Punkt. Wenn daher die Gerade x so liegt, dass die Kreise w und w' sich schneiden, so hat die Curve y einen Doppelpunkt.

In den beiden Punkten $+\frac{1}{2}e$ und $-\frac{1}{2}e$ fallen je zwei entsprechende Punkte der Kreisverwandtschaft $ww' = \frac{1}{4}e^2$ auf einander. Geht also der Kreis w durch einen dieser Punkte, so geht auch w' durch denselben Punkt; einen zweiten Punkt aber können die Kreise alsdann nicht gemeinschaftlich haben, denn, fände dies statt, so müsste dem zweiten Durchschnittspunkte der erste entsprechen, was nicht der Fall ist. Also berühren sich dann die Kreise in $\pm\frac{1}{2}e$. Bei dieser Lage nun geht der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt über. Denn sucht man die Punkte x,

welche $w = w' = \pm \frac{1}{2} e$ entsprechen, bestimmt man also x aus der Gleichung

$$\pm \tfrac{1}{2} e = \frac{n+b}{2} \cdot \frac{1+x}{1-x},$$

so erhält man

$$x = \frac{-n \pm e}{b};$$

dies sind aber nach §. 7. die Punkte, für welche $\frac{dy}{dx}$ verschwindet. Nun hat Siebeck *) gezeigt, dass, wenn die von der Variablen x beschriebene Linie durch einen Punkt hindurch geht, für welchen $\frac{dy}{dx}$ verschwindet, die Linie y in dem entsprechenden Punkte einen Rückkehrpunkt hat. Unsere Curve hat also einen Rückkehrpunkt, wenn die Gerade x durch einen der Punkte $\frac{-n \pm e}{b}$ hindurchgeht, und diese Rückkehrpunkte sind zugleich die Brennpunkte der Kegelschnitte, denn wenn $w = w' \pm \frac{1}{2} e$ ist, so ist

$$y = w + w' = \pm e.$$

Jene beiden Punkte $\frac{-n \pm e}{b}$ sind reciprok, denn ihr Product ist

$$\frac{n^2 - e^2}{b^2} = 1.$$

Hiernach hat man drei verschiedene Gestalten unserer Curven zu unterscheiden. Sie haben entweder einen Doppelpunkt oder nicht, den Uebergang von der einen Gestalt zur andern bildet eine dritte, bei welcher der Doppelpunkt sich in einen Rückkehrpunkt verwandelt.

Die Hyperbel, welche zweimal durch den unendlich entfernten Punkt geht, kann als eine Curve angesehen werden, welche einen Doppelpunkt in unendlicher Entfernung besitzt. Bei dieser Curve durchläuft x die Hauptaxe. Dreht man nun diese Gerade um den Nullpunkt, so tritt der Doppelpunkt in die Endlichkeit; er verwandelt sich dann in einen Rückkehrpunkt, wenn die Gerade x bei der Drehung einen der Punkte $\frac{-n \pm e}{b}$ erreicht. Bei weiterer Drehung geht nun der Doppelpunkt verloren, und die Curve verwandelt sich endlich in eine Ellipse, wenn die Gerade mit der

---

*) Crelle's Journ. Bd. 55.

imaginären Axe zusammenfällt. Setzt man nun die Drehung noch weiter fort, so wiederholen sich die früheren Gestalten der Curve in umgekehrter Reihenfolge, denn es kann nun jede folgende Gerade als eine der früheren reciproke angesehen werden, und nach der im Anfange dieses Paragraphen gemachten Bemerkung sind dann je zwei Curven, welche reciproken Geraden entsprechen, congruent und zwar so, dass je zwei ihrer Punkte diametral gegenüberliegen.

11. Um die Frage über das Eintreten eines Doppelpunktes noch von einem anderen Gesichtspunkte aus zu betrachten, seien x_1 und x_2 diejenigen Punkte der Geraden x, welchen der Doppelpunkt entspricht. Da für diese $w = w'$ wird, so hat man für sie die Beziehung

$$p \frac{1+x_1}{1-x_1} = q \frac{1-x_2}{1+x_2},$$

welche sich auch, wenn man

$$p+q=n \quad \text{und} \quad p-q=b$$

einführt, in der Form

$$b(1+x_1 x_2)+n(x_1+x_2)=0$$

schreiben lässt. Dies zeigt, dass die Punkte x_1 und x_2 zu einander in involutorischer Kreisverwandtschaft stehen. Denkt man sich nämlich x_1 längs der Geraden x veränderlich, so beschreibt x_2 einen Kreis, der vermöge der vorigen Gleichung den Ausdruck

$$x_2 = -\frac{b+nx_1}{n+bx_1}$$

hat und darnach für jede Lage der Geraden x leicht construirt werden kann. Nun schliesst man wieder wie oben, dass die Durchschnittspunkte der Geraden x mit diesem Kreise einander entsprechende Punkte sind, und, da die gesuchten Punkte x_1 und x_2, welche dem Doppelpunkte entsprechen, auf der Geraden x liegen, dass diese Punkte x_1 und x_2 eben die Durchschnittspunkte sein müssen. Hieraus erhellt, dass die Curve y einen Doppelpunkt oder einen Rückkehrpunkt oder keinen von beiden besitzt, jenachdem die Gerade x den von ihr abhängigen Kreis $-\frac{b+nx}{n+bx}$ schneidet, berührt oder nicht schneidet. In dem Falle der Existenz eines Doppelpunktes können dann auch die Punkte x_1 und x_2 leicht durch Construction gefunden werden.

12. Wir können nun zur weiteren Untersuchung der Curven

y ein Princip in Anwendung bringen, welches Siebeck *) angiebt. Betrachtet man nämlich den Ausdruck

$$(8) \qquad u=\frac{b(x+z)+n(1+xz)}{1-xz},$$

welcher in den der Curve

$$y=\frac{2bx+n(1+x^2)}{1-x^2}$$

übergeht, wenn $z=x$ ist, und lässt z die nämliche Gerade beschreiben, wie x, so beschreibt u für jeden bestimmten Werth von x einen Kreis. Da nun z einmal $=x$ werden muss, so wird auch einmal $u=y$, und daher hat der Kreis u mit der Curve y einen Punkt gemein, und zwar denjenigen, welcher dem Punkte x der Geraden entspricht. Ausserdem aber kann gezeigt werden, dass der Kreis u die Curve y in diesem gemeinschaftlichen Punkte berührt. Um dies zu beweisen und zugleich eine bequemere Constructionsart für die Kreise u zu gewinnen, ziehen wir die Kreise w und w' zu Hülfe. Führt man in (8) die Beziehungen

$$b=p-q, \quad n=p+q$$

ein, so kann man schreiben

$$u=2\,\frac{p(1+x)(1+z)+q(1-x)(1-z)}{(1+x)(1-z)+(1-x)(1+z)}.$$

Setzt man dann

$$p\,\frac{1+z}{1-z}=t, \quad q\,\frac{1-z}{1+z}=t';$$

so beschreiben t und t' die nämlichen Kreise wie w und w', weil z dieselbe Gerade durchläuft, wie x. Dadurch erhält man

$$u=2.\frac{p\,\frac{1+z}{1-z}+q\,\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1+z}{1-z}}=2\,\frac{t+w'}{1+\frac{w't}{pq}},$$

oder, weil

$$\frac{w'}{pq}=\frac{1}{w}$$

ist,

$$(9) \qquad u=\frac{2w(w'+t)}{w+t} \text{ oder auch } u=\frac{2w'(w+t')}{w'+t'}.$$

---

*) Grunert's Archiv Bd. 33. pag. 466.

Nun wird wieder, wenn $t = w$ ist, $u = w + w' = y$. Ferner hat man

$$dy = dw + dw',$$

und, da

$$dw' = -\frac{pq}{w^2}dw = -\frac{w'}{w}dw$$

ist,

$$dy = \frac{w - w'}{w}dw.$$

Andrerseits ist

$$du = \frac{2w(w - w')}{(w + t)^2}dt;$$

für den gemeinschaftlichen Punkt, für welchen $t = w$ und $dt = dw$ ist, erhält man daher

$$du = \frac{w - w'}{2w}dw \text{ und somit } du = \tfrac{1}{2}dy;$$

die Elemente der Curve y und des Kreises u haben also in dem gemeinschaftlichen Punkte gleiche Richtung und folglich berühren sich die beiden Linien.

Hieran knüpft sich zunächst ein sehr bequemes Mittel, um an einem beliebigen Punkte der Curve y eine Tangente zu ziehen. Da nämlich

$$\frac{dy}{w - w'} = \frac{dw}{w}$$

ist, so bildet der Radius Vector ow mit dem Kreiselemente dw denselben Winkel, wie die Gerade $w'w$ mit dem Curvenelemente dy. Man ziehe also zuerst an dem betreffenden Punkte des Kreises w eine Tangente und nenne den einen Winkel derselben gegen die Richtung ow etwa δ; alsdann ziehe man durch y eine Parallele mit der Geraden $w'w$, und zwar in der Richtung von w' nach w, und trage an diese den Winkel δ nach derjenigen Seite an, nach welcher er von der Richtung ow aus gerechnet liegt; der zweite Schenkel dieses Winkels ist dann die verlangte Tangente. Ferner kann nun auch die Construction des Kreises u leicht geschehen; denn da dieser durch den Punkt y geht und ausserdem in diesem Punkte von der eben gefundenen Tangente berührt wird, so bedarf man zu seiner Construction nur noch eines einzigen Punktes, den man mit Hülfe der Centralpunkte der Kreisverwandtschaft, in der die Kreise t und u stehen, finden kann. Diese Centralpunkte ergeben sich aus (9) augenblicklich als

$$t = -w \text{ und } u = 2w.$$

Wir werden aber im nächsten Paragraphen sehen, wie man einen solchen Punkt noch leichter finden kann.

Wenn der Kreis t durch seinen Centralpunkt $-w$ hindurchgeht, so verwandelt sich der Kreis u in eine Gerade, also in eine Tangente der Curve. Dies geschieht aber nur in dem Falle, dass w entweder $=p$ oder $=-p$ ist, denn nur dann geht der Kreis t (oder w) auch durch den diametral gegenüberliegenden Punkt $-p$ oder p hindurch. Nun entsprechen den Punkten $\pm p$ des Kreises w die Punkte $\pm q$ des Kreises w', und $\pm n$ der Curve y; an den letzteren Punkten gehen also die Berührungskreise in Tangenten über, und wir wollen diese zur Unterscheidung von den Kreisen u mit den Buchstaben v und v' bezeichnen. Um ihre Gleichungen zu finden, braucht man sich nur zu erinnern, dass den Werthen $w = \pm p$ die Werthe $x = 0$ und $x = \infty$ entsprechen, und erhält dann für sie die Gleichungen

$$v = n + bz \text{ und } v' = -n - \frac{b}{z},$$

wonach sie ohne Weiteres gezeichnet werden können, denn sie gehen resp. durch n und $-n$ und bilden resp. mit den Geraden x und $\frac{1}{x}$ denselben Winkel, wie die Gerade ob mit der Hauptaxe.

13. Die Berührungskreise u haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie sich alle in einem gemeinschaftlichen Punkte, der also auch der Durchschnittspunkt der beiden eben erwähnten Tangenten ist, schneiden. Um dies zu beweisen, sei D der Durchschnittspunkt dieser Tangenten, und z_1 und z_2 die beiden Werthe von z, welchen auf den Geraden v und v' dieser Punkt entspricht, sei also zugleich

$$D = n + bz_1 \text{ und } D = -n - \frac{b}{z_2}.$$

Stellt man nun die Frage, ob es immer einen Werth von z giebt, für welchen $u = D$ wird, so hat man zu untersuchen, ob die Gleichung

$$D = \frac{b(x+z) + n(1+xz)}{1-xz}$$

immer erfüllt werden kann, d. h. ob der hieraus folgende Werth von z immer einen Punkt der Geraden x darstellt. Man zieht hieraus

$$z = \frac{D-n-bx}{b+(D+n)x},$$

und indem man darin die Werthe $D - n = bz_1$ und $D + n = -\frac{b}{z_2}$ substituirt,

$$z = \frac{z_1 - x}{z_2 - x} z_2.$$

Nun sind aber x, z_1, z_2 Punkte einer und derselben Geraden, die durch Null geht, also ist $\frac{z_1 - x}{z_2 - x}$ reell und daher auch z ein Punkt dieser Geraden. Hieraus folgt, dass es für jeden Werth von x einen Punkt z der Geraden x giebt, für welchen $u = D$ wird, und daher schneiden sich in der That alle diese Kreise in einem und demselben Punkte D.

Wenn der Fall eintritt, dass die auf den beiden Tangenten in n und $-n$ beweglichen Punkte den Durchschnittspunkt D derselben für den gleichen Werth von z erreichen, dass also $z_1 = z_2$ ist, so ist auch $z = z_2$ und daher von x unabhängig. Man erhält dann

$$D = n + bz_2 = -n - \frac{b}{z_2}$$

und daraus für z_2 die beiden Werthe

$$z_2 = \frac{-n \pm e}{b}.$$

Dieser Fall tritt also ein, wenn die Gerade x (oder z) durch einen der beiden bemerkenswerthen Punkte hindurch geht, welchen der Rückkehrpunkt der Curve entspricht, und zwar ist der gemeinschaftliche Punkt aller obigen Berührungskreise der Rückkehrpunkt selber. In der That, setzt man die Werthe von z_2 ein, so ergiebt sich

$$D = \pm e.$$

Wir finden also: Wenn die Curve y einen Rückkehrpunkt hat, so gehen alle Berührungskreise u und daher auch die beiden Tangenten der Curve in n und $-n$ durch den Rückkehrpunkt hindurh.

Es liegt nun die Vermuthung sehr nahe, dass auch der Doppelpunkt, wenn ein solcher existirt, allen Berührungskreisen u gemeinschaftlich sein wird. Um dies zu beweisen, schicken wir noch eine andere Betrachtung voran, die auf die Bedeutung dieser Kreise ein neues Licht wirft. Schreibt man nämlich die Gleichung (8) derselben in der Form

$$u = \frac{n + bx - \left(-n - \frac{b}{x}\right) xz}{1 - xz}$$

und setzt

$$(10) \qquad n + bx = k, \; -n - \frac{b}{x} = k',$$

sodass man auch hat

$$u = \frac{k - k'xz}{1 - xz},$$

so sind k und k' diejenigen Punkte der Tangenten v und v', welche dem Punkte x entsprechen. Durch diese beiden Punkte aber geht der Kreis u hindurch, da u für $z = 0$ und $z = \infty$ die Werthe k und k' annimmt. Folglich sind k und k' die Durchschnitte des Kreises u mit den beiden Tangenten v und v'. Untersucht man nun aber, in welcher Verwandtschaft je zwei solche Punkte k und k' stehen, indem man aus den Gleichungen (10) x eliminirt, so erhält man

$$k' + n = -\frac{b^2}{k - n}.$$

Demnach stehen die Punkte k und k' in Kreisverwandtschaft, und folglich werden die Tangenten v und v' von den sämmtlichen Berührungskreisen u in conformen Punktreihen geschnitten. Die Gegenpunkte derselben (oder die Centralpunkte der Kreisverwandtschaft) sind n und $-n$; die Hauptpunkte, d. h. diejenigen, in welchen zwei entsprechende Punkte auf einander fallen, aber $= \pm e$, also die Brennpunkte der Kegelschnitte *).

Aehnlich verhalten sich die Durchschnitte der Kreise u unter einander. Bezeichnet man mit Siebeck den Ausdruck (8) derselben kurz durch

$$u = f(x, z)$$

und nimmt man irgend zwei, u_h und u_k, welche den Punkten x_h und x_k angehören, aus ihnen heraus:

$$u_h = f(x_h, z), \quad u_k = f(x_k, z);$$

so wird ihr Durchschnittspunkt durch

$$f(x_h, x_k)$$

ausgedrückt, weil die Function f in Beziehung auf x und z symmetrisch ist, und daher u_h für $z = x_k$ denselben Werth annimmt, wie u_k für $z = x_h$. Je zwei Kreise durchschneiden sich natürlich in zwei Punkten; von diesen ist aber der eine jedesmal der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt D aller Kreise. Dieser bleibt

*) Vgl. Siebeck, Grunert's Archiv Bd. 33. pag. 470.

fest, während der andere sich mit dem Werthe von x_k ändert, folglich wird durch $f(x_h, x_k)$ jedesmal der andere Durchschnittspunkt dargestellt. Wenn man also für x_k nach und nach alle Werthe des x setzt, so erhält man alle Punkte, in denen der Kreis u_h von allen übrigen Kreisen u geschnitten wird. Sind nun s_1 und s_2 irgend zwei feste Werthe der x, und u_1 und u_2 die ihnen zugehörigen Kreise, so erhält man die Durchschnitte dieser beiden mit irgend einem beliebigen Kreise u, wenn man in den Ausdrücken

$$u_1 = \frac{b(s_1+x)+n(1+s_1x)}{1-s_1x}$$

$$u_2 = \frac{b(s_2+x)+n(1+s_2x)}{1-s_2x},$$

dem x den gleichen Werth zuertheilt. Eliminirt man also x aus diesen Gleichungen, so ergiebt sich die Verwandtschaft, in welcher je zwei Durchschnittspunkte u_1 und u_2 mit irgend einem dritten Kreise u zu einander stehen. Setzt man der Kürze wegen

$$n+bs_1 = k_1, \quad n+bs_2 = k_2$$

$$-n-\frac{b}{s_1} = k'_1, \quad -n-\frac{b}{s_2} = k'_2;$$

so sind diese vier Punkte die Durchschnitte der Kreise u_1 und u_2 mit den Tangenten v und v', und da man nun hat

$$u_1 = \frac{k_1-k'_1 s_1 x}{1-s_1x}, \quad u_2 = \frac{k_2-k'_2s_2x}{1-s_2x},$$

so ergiebt sich

$$u_1-k_1 = (u_1-k'_1)s_1x; \quad u_2-k_2 = (u_2-k'_2)s_2x$$

und daher

$$\frac{u_1-k_1}{u_2-k_2} = \frac{u_1-k'_1}{u_2-k'_2}\cdot\frac{s_1}{s_2}.$$

Folglich stehen auch je zwei Durchschnittspunkte u_1 und u_2 in Kreisverwandtschaft; das Doppelschnittsverhältniss

$\frac{u_2-k_1}{u_1-k_2} : \frac{u_1-k'_1}{u_2-k'_2}$ ist constant $= \frac{s_1}{s_2}$.

Nehmen wir nun den Fall an, dass die Curve einen Doppelpunkt besitzt, so existiren auch zwei Kreise u, welche die Curve in dem Doppelpunkte berühren. Diese Kreise haben erstlich, wie alle, den Punkt D mit einander gemein, und ausserdem noch einen zweiten Punkt, den wir mit E bezeichnen wollen. Da nun

der Doppelpunkt, welcher vorläufig D' genannt werden möge, ebenfalls diesen beiden Kreisen gemeinschaftlich ist, so muss er entweder mit D oder mit E zusammenfallen; es kann aber leicht gezeigt werden, dass er mit E nicht zusammenfallen kann, dass er also der Punkt D selber sein muss. Bezeichnet man nämlich, wie in §. 11., mit x_1 und x_2 die beiden Werthe der x, welchen der Doppelpunkt entspricht, und dann jetzt mit u_1 und u_2 die diesen Werthen angehörigen Kreise, ferner mit k_1, k_2 und k_1', k_2' die Durchschnitte dieser Kreise mit den Tangenten v und v', so ist:

$$(11) \qquad u_1=\frac{k_1-k_1'x_1z}{1-x_1z}, \quad u_2=\frac{k_2-k_2'x_2z}{1-x_2z}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich nun noch vereinfachen. Nach §. 11. sind nämlich die Werthe x_1 und x_2 durch die symmetrische Gleichung

$$x_2=-\frac{b+nx_1}{n+bx_1}$$

verbunden, welche sich mit Einführung von k_1 und k_1' schreiben lässt:

$$x_2=\frac{k_1'x_1}{k_1}.$$

Ebenso ist:

$$x_1=-\frac{b+nx_2}{n+bx_2}=\frac{k_2'x_2}{k_2};$$

man hat also:

$$k_1'x_1=k_1x_2, \quad k_2'x_2=k_2x_1.$$

Substituirt man dies in den Gleichungen (11), so erhält man:

$$u_1=k_1\frac{1-x_2z}{1-x_1z}, \quad u_2=k_2\frac{1-x_1z}{1-x_2z}.$$

Hieraus ergiebt sich nun nach dem Früheren der Ausdruck für den Punkt E, wenn man in u_1 setzt $z=x_2$ und in u_2 setzt $z=x_1$, also ist:

$$E=k_1\frac{1-x_2^2}{1-x_1x_2}=k_2\frac{1-x_1^2}{1-x_1x_2};$$

der Doppelpunkt D' dagegen entsteht aus u_1, wenn $z=x_1$, und aus u_2, wenn $z=x_2$ gesetzt wird, folglich hat man:

$$D'=k_1\frac{1-x_1x_2}{1-x_1^2}=k_2\frac{1-x_1x_2}{1-x_2^2}.$$

Diese Ausdrücke zeigen, dass D' nur dann $=E$ sein kann, wenn $x_1=x_2$ ist; bei der Existenz eines Doppelpunktes aber stellen

nach §. 11. die Werthe x_1 und x_2 die Durchschnittspunkte einer Geraden mit einem Kreise dar und sind also verschiedene Punkte; daher kann D' nicht $= E$ sein, sondern es ist

$$D' = D.$$

Bei der Existenz eines Rückkehrpunktes aber ist in der That $x_1 = x_2$; dann fallen nicht nur die Punkte D, D' und E alle in den Punkt $\pm e$, sondern die Kreise u_1 und u_2 schrumpfen auch in diesen Punkt zusammen.

Man kann nun das Ergebniss der vorigen Untersuchung in Folgendem zusammenfassen: Legt man durch den Doppel- oder Rückkehrpunkt der Curve y, wenn solche existiren, Kreise, welche die Curve berühren, so werden alle diese Kreise durch die gemeinsame Gleichung

$$(12) \qquad u = \frac{b(x+z) + n(1+xz)}{1-xz}$$

ausgedrückt, in welcher x den dem Berührungspunkte y entsprechenden, und z einen die Gerade x beschreibenden veränderlichen Punkt bedeutet. Diese Kreise gehen in geradlinige Tangenten v und v' über, wenn y mit n oder mit $-n$ zusammenfällt, und spielen in Beziehung auf die Curve y dieselbe Rolle, wie die Tangenten eines Kegelschnittes, nämlich je zwei unter ihnen werden von allen übrigen in kreisverwandten Punkten geschnitten. Hört die Existenz eines Doppel- oder Rückkehrpunktes auf, so verlieren die durch die Gleichung (12) ausgedrückten Kreise doch nicht ihre Bedeutung, auch bleibt ihr gemeinsamer Durchschnitt D, der zugleich der Durchschnitt der beiden Tangenten v und v' ist, bestehen, und hat, wie wir gleich sehen werden, mit dem Doppelpunkte eine Eigenschaft gemein. Verwandelt sich aber die Curve y in eine Ellipse, so rückt auch dieser Punkt D in's Unendliche, da dann die beiden Tangenten in n und $-n$ parallel werden.

14. Bezeichnen wir wieder, wie in §. 7., mit $\bar{y}$ den Punkt der Curve, welcher dem Punkte $-x$ der Geraden entspricht, so haben wir wie oben:

$$\frac{y-\bar{y}}{2} = \frac{2bx}{1-x^2}, \quad \frac{y+\bar{y}}{2} = n\,\frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Bei der Hyperbel und Ellipse stellte die letztere Gleichung eine Gerade dar, woraus folgte, dass der geometrische Ort der Halbirungspunkte der Sehnen $y\bar{y}$ eine Gerade war. Wenn nun aber

x eine beliebige durch Null gehende Gerade beschreibt, so drückt $n\frac{1+x^2}{1-x^2}$ nicht mehr eine Gerade aus. Setzt man nämlich $x^2=v$, so beschreibt v ebenfalls eine Gerade durch Null, aber nur den auf der einen Seite des Nullpunktes liegenden Theil derselben, da je zweien Werthen x und $-x$ der nämliche Punkt v entspricht. Also drückt

$$\frac{y+\bar{y}}{2}=n\frac{1+x^2}{1-x^2}=n\frac{1+v}{1-v}$$

ein Stück eines Kreises aus, das von n (für $v=0$) bis $-n$ (für $v=\infty$) reicht. Ueber diese Punkte geht das Kreisstück nicht hinaus, sondern, wenn x den Nullpunkt überschreitet, so kehrt v auf seiner Geraden wieder zurück, und daher wird auch der Kreisbogen von dem Punkte $\frac{y+\bar{y}}{2}$ wieder in umgekehrter Richtung zurück durchlaufen *). Auf diesem Kreisbogen nun liegen die sämmtlichen Halbirungspunkte der Sehnen $y\bar{y}$.

Diese Sehnen selbst aber gehen alle durch den Punkt D. Denn bildet man $y-D$ und $D-\bar{y}$, so erhält man:

$$y-D=\frac{2bx-(D-n)+(D+n)x^2}{1-x^2},$$

$$D-\bar{y}=\frac{2bx+D-n-(D+n)x^2}{1-x^2};$$

und, wenn man die Ausdrücke (§. 13.)

$$D-n=bz_1 \quad \text{und} \quad D+n=-\frac{b}{z_2}$$

substituirt,

$$y-D=\frac{2bx-bz_1-\frac{bx^2}{z_2}}{1-x^2},$$

$$D-\bar{y}=\frac{2bx+bz_1+\frac{bx^2}{z_2}}{1-x^2};$$

also ist

---

*) Es ist ohne Zweifel ein Vorzug dieses auf den imaginären Grössen beruhenden Punkt-Calculs, dass man mittelst desselben auch begrenzte Stücke von Curven und geraden Linien, und ebenso auch gebrochene, oder aus verschiedenen Curven zusammengesetzte Züge analytisch darstellen kann.

$$\frac{y-D}{D-\bar{y}}=\frac{2-\frac{z_1}{x}-\frac{x}{z_2}}{2+\frac{z_1}{x}+\frac{x}{z_2}}.$$

Nun sind aber x, z_1, z_2 Punkte der Geraden x, die durch 0 geht, also sind $\frac{z_1}{x}$ und $\frac{x}{z_2}$ reelle Grössen, und folglich ist auch $\frac{y-D}{D-\bar{y}}$ reell, also liegen die Punkte y, D, $\bar{y}$ in gerader Linie. Existirt nun ein Doppel- oder Rückkehrpunkt, so werden alle durch ihn gezogenen Sehnen von dem oben erwähnten Kreisbogen halbirt; existirt aber ein solcher Punkt nicht, so werden diejenigen Sehnen von dem Kreisbogen halbirt, welche durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt D der Berührungskreise u gehen.

Die Art, wie die Sehnen $y\bar{y}$ ihre Grösse und Richtung ändern, wird durch die Gleichung

$$\frac{y-\bar{y}}{2}=\frac{2bx}{1-x^2}=\frac{2b}{\frac{1}{x}-x}$$

gegeben. Da dieser Ausdruck einem Hyperbelausdrucke reciprok ist, so folgt aus §. 5., dass, wenn man die durch den Punkt D gehenden Sehnen ihrer Grösse und Richtung nach an den Nullpunkt anträgt, ihre Endpunkte die Fusspunktencurve einer Hyperbel, eine verallgemeinerte Lemniscate, bilden.

15. Statt der in §. 7. angewendeten Substitution benutzen wir hier die nur wenig davon abweichende

$$x=\frac{g-z}{1-gz},$$

nach welcher x und z in involutorischer Kreisverwandtschaft stehen. Auch diese hat die Eigenschaft, dass der Ausdruck für y seine Gestalt nicht ändert; nämlich setzt man hier:

$$b'=-\frac{2ng+b(1+g^2)}{1-g^2},\quad n'=\frac{2bg+n(1+g^2)}{1-g^2};$$

so erhält man:

$$y=\frac{2b'z+n'(1+z^2)}{1-z^2}.$$

Nun kann aber der Punkt g so gewählt werden, dass der Ausdruck für y ganz ungeändert bleibt; denn setzt man $n'=n$, so findet sich:

$$g = -\frac{b}{n},$$

und dann wird auch $b' = b$. Setzt man diesen Werth von g ein, so dass

$$x = -\frac{b + nz}{n + bz} \quad \text{und} \quad z = -\frac{b + nx}{n + bx} \qquad (13)$$

ist, so erhält y durch z denselben Ausdruck wie durch x. Das heisst: nach der von uns betrachteten Verwandtschaft entspricht die nämliche Curve y nicht bloss der durch Null gehenden Geraden x, sondern auch dem Kreise $-\frac{b + nx}{n + bx}$, und dies ist der nämliche Kreis, dessen Durchschnittspunkte mit der Geraden x die Punkte geben, welche dem Doppelpunkte entsprechen. (§. 11.)

Dies hängt damit zusammen, dass die Gleichung, welche y und x verbindet, in Beziehung auf x vom zweiten Grade ist; denn hieraus folgt, dass jedem Punkte y zwei Punkte x entsprechen müssen. Wie sich so eben gezeigt hat, stehen dann je zwei solche Punkte x und z in der durch die Gleichung (13) ausgedrückten involutorischen Kreisverwandtschaft.

IV.

Indem ich diese Betrachtungen, welche sich noch weiter ausspinnen liessen, hier abbreche, füge ich zum Schlusse die geometrische Bedeutung einiger algebraischen Gleichungen in einer tabellarischen Uebersicht hinzu, da ich glaube, dass eine solche für spätere Untersuchungen von Nutzen sein kann. In der folgenden Tabelle enthält die erste Columne die Gleichung, die zweite die von der Variablen x beschriebene Linie, die dritte die Linie, welche der nebenstehenden Gleichung gemäss alsdann die Variable y beschreibt. Zur Abkürzung ist die Gerade, deren Punkte die reellen Zahlen darstellen, durch H. A. (Hauptaxe) und die Gerade, deren Punkte die rein imaginären Zahlen darstellen, durch I. A. (Imaginäre Axe) bezeichnet. Die einzelnen Punkte sind stets mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie die complexen Grössen, welche sie darstellen. 0 bedeutet den Nullpunkt und 1 den auf der Hauptaxe liegenden Punkt, der die positive Einheit repräsentirt. Die von einem veränderlichen Punkte beschriebene Linie ist oft nur durch den, diese veränderliche Grösse bezeichnenden Buchstaben angedeutet worden.

Gleichung.	x	y
$y = a + bx$	H. A.	Gerade durch a, parallel mit $0b$.
$y = a + bx$	I. A.	Gerade durch a, senkrecht auf $0b$.
$y = a + bx$	Gerade durch 0	Gerade durch a, gegen x um den Winkel $10b$ geneigt.
$y = a + bx$	Beliebige Curve	Eine mit x ähnliche Curve. Alle Rad. Vect. der Curve x sind um den Winkel $10b$ gedreht und im Verhältnisse von $1 : \mathrm{mod}.\, b$ vergrössert. Ausserdem alle Punkte um $0a$ der Grösse und Richtung nach verschoben.
$y = \frac{a + bx}{1 + x}$	H. A.	Gerade durch a und b; $x =$ dem Schnittverhältniss $ay : yb$.
$y = \frac{a + bx}{c + dx}$	H. A.	Kreis durch $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$. Die Tangente in $\frac{a}{c}$ hat die Richtung des Radius Vector von $\frac{bc - ad}{c^2}$.
$y = \frac{a \pm ibx}{1 \pm ix}$	H. A.	Kreis über ab als Durchmesser.
$y = \frac{ax}{a + x}$	H. A.	Kreis durch 0 und a, der die H. A. in 0 berührt.
$y = \frac{x}{1 + x}$	I. A.	Kreis über 01 als Durchmesser.
$y = a\frac{1 + x}{1 - x}$	H. A.	Gerade durch a und $-a$.
$y = a\frac{1 + x}{1 - x}$	I. A.	Kreis um 0, mit dem Radius $0a$.
$y = a\frac{1 + x}{1 - x}$	Gerade durch 0	Kreis durch a und $-a$; die Tangente in a bildet mit x den Winkel $10a$.

Gleichung.	x	y
$y = \frac{1}{x}$	Gerade durch 0	Gerade durch 0, so liegend, dass die H. A. den Winkel zwischen ihr und x halbirt.
$y = \frac{1}{x}$	Beliebige Gerade	Kreis durch 0.
$y = x^2$	H. A.	Die positive H. A.
$y = x^2$	I. A.	Die negative H. A.
$y = x^2$	Gerade durch 0	Die eine Hälfte einer Geraden durch 0, von 0 bis ∞, deren Neigungswinkel gegen die H. A. doppelt so gross ist, als der der Geraden x.
$y = x^2$	Beliebige Gerade	Parabel. Brennpunkt in 0.
$y = x^2$	Kreis um 0 mit dem Rad. ϱ.	Kreis um 0 mit dem Rad. ϱ^2.
$y = x^2$	Beliebiger Kreis	Cardioide im allgem. Sinne. Die gewöhnliche Cardioide entsteht, wenn der Kreis x die H. A. oder die I. A. in 0 berührt. Der Rückkehrp. in 0.
$y = x + \frac{1}{x}$	Gerade durch 0	Hyperbel. Asymptoten in x und $\frac{1}{x}$. Die Axe ist die H. A. Brennpunkte in ± 2.
$y = x + \frac{1}{x}$	Kreis um 0 mit dem Rad. ϱ	Ellipse. Mittelp. in 0. Die H. A. ist die grosse Axe. Grosse Halbaxe $= \varrho + \frac{1}{\varrho}$, kleine Halbaxe $= \pm(\varrho - \frac{1}{\varrho})$. Brennpunkte in ± 2.
$y = x + \frac{1}{x}$	Beliebige Gerade	Curve mit x als Asympt., welche ausserdem die Curve stets in demselben Punkte schneidet, in welchem sie von einer Hyperbel $z + \frac{1}{z}$ (z eine Gerade

Gleichung.	x	y
		durch 0, mit x parallel) getroffen wird. Schneidet die Gerade x die H. A. zwischen $+1$ und -1, so hat die Curve einen Doppelpunkt, geht x durch 1 oder -1 hindurch, so existirt ein Rückkehrpunkt.
$y=x+\frac{1}{x}$	Gerade durch 1 u. senkr. auf d. H. A.	Cissoide; x die Asymptote. Rückkehrpunkt in 2.
$y=\frac{x^2}{1+x}$	I. A.	Cissoide. Asymptote durch -1 parallel der I. A. Rückkehrpunkt in 0. Fusspunktencurve der Parabel $2x-x^2$.
$y=\frac{1+x+x^2}{1+x}$	I. A.	Cissoide. Asymptote die I. A. Rückkehrpunkt in 1.
$y=\frac{x}{1+x^2}$	Gerade durch 0	Fusspunktencurve einer Hyperbel, deren Asymptoten ix und $\frac{1}{ix}$.
$y=a\frac{1-x^2}{1+x^2}$	H. A.	Das Stück einer durch 0 gehenden Geraden von a bis $-a$.
$y=a\frac{1+x^2}{1-x^2}$	Gerade durch 0	Der Bogen eines Kreises von a bis $-a$, dadurch bestimmt, dass die nach der Seite des Bogens gerichtete Tangente in a mit der Geraden x^2 den Winkel $10a$ bildet.
$y^2=x$	Gerade durch 0	Zwei auf einander senkrechte Gerade, welche die Winkel, die x mit der H. A. bildet, halbiren.
$y^2=x$	Beliebige Gerade	Gleichseitige Hyperbel. Mittelpunkt in 0. Die Asymptoten halbiren die Winkel der Geraden x mit der H. A.
$y^2+x^2=1$	Gerade durch 0	Zwei Stücke einer gleichseitigen Hyperbel, welche in $+1$ und -1 beginnen und

Gleichung.	x	y.
		sich der nur allein existirenden Asymptote ix nähern. Die Tangenten in 1 und -1 sind resp. $1-x^2$ und x^2-1. In ± 1 verschwindet $\frac{dy}{dx}$; diese Punkte sind Rückkehrpunkte, aber nicht die Brennpunkte der Hyperbel.
$y^2-x^2=1$	Gerade durch 0	Die beiden Stücke, welche die vorige gleichseitige Hyperbel ergänzen, mit x als Asymptote.
$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$	H. A.	Zwei Stücke einer gleichseitigen Hyperbel mit der Asymptote $i\frac{b}{a}x$, von $+b$ und $-b$ ausgehend.
$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$	H. A.	Die Ergänzungsstücke der vorigen Hyperbel, mit der Asymptote $\frac{b}{a}x$.
$y^2-x^2=1$	Beliebige Gerade	Curve mit zwei parallelen Asymptoten x und $-x$, aus zwei congruenten, diametral gegenüber liegenden Theilen bestehend. Die Tangente in y ist dem Rad. Vect. des entspr. Punktes x parallel. In den Durchschnitten der Curve mit der H. A. ist die eine Tangente den Asymptoten parallel und die andere senkrecht zu ihnen. Geht die Gerade x durch i hindurch, so ist 0 ein Doppelpunkt, in welchem die Curvenzweige sich senkrecht durchschneiden.

II.

Rede gehalten bei der feierlichen Eröffnung der Accademia Scientifico-Letteraria und des Istituto Tecnico Superiore zu Mailand

vom

Commendatore Professor *Francesco Brioschi.*

Ein Paar einleitende Worte des Herausgebers.

Durch die Errichtung der Accademia Scientifico-Letteraria und des Istituto Tecnico Superiore, einer wichtigen, durch diese Verbindung zweier, das Reich der Wissenschaften nach zwei Richtungen hin beherrschenden Institute in einem Institut, gewiss überaus merkwürdigen, in dieser Weise noch nicht existirenden Lehranstalt hat sich die Königlich italienische Regierung ein neues sehr grosses Verdienst um den wissenschaftlichen und technischen Unterricht erworben und durch die genannte Verbindung jedenfalls eine neue Bahn auf dem Felde des Unterrichtswesens gebrochen, welche als Epoche machend bezeichnet werden muss und gewiss von höchst erfreulichen und wichtigen Folgen begleitet sein wird. Von dem lebhaftesten Interesse für diese neue Lehranstalt und für die Idee, welcher dieselbe ihre Entstehung verdankt, beseelt, zugleich in der Absicht, das Interesse dafür in möglichst weiten Kreisen, namentlich auch in Deutschland, zu erregen, habe ich Herrn M. Curtze zu der Anfertigung der nachstehenden Uebersetzung der Rede veranlasst, mit welcher die neue wichtige Anstalt durch ihren berühmten Director, Herrn Francesco Brioschi, eingeweihet worden ist. Ich theile dieselbe im Folgenden mit und danke Herrn M. Curtze, dass er sich der von mir gewünschten Arbeit, zu welcher mir selbst meine so vielfach in Anspruch genommene Thätigkeit, wenigstens augenblicklich, keine Zeit übrig liess, — mir aber eine möglichst schleunige Mittheilung sehr wünschenswerth schien, — mit der grössten Bereitwilligkeit sogleich unterzogen hat.

Grunert.

Meine Herren!

Die Unterrichtsanstalten können ihrem hohen Zwecke nur dann Genüge leisten, wenn ihre Schöpfung und ihre Organisation den neuen Bedürfnissen der Wissenschaft und den neuen socialen Zuständen entspricht. Die Geschichte des öffentlichen Unterrichts bestätigt durch unzählige Beispiele diese Thatsache; die Wahrheit derselben zeigt sich in der ausschliesslich theologischen Richtung des Unterrichts im Mittelalter, in der speciell classischen, die man im fünfzehnten Jahrhundert an deren Stelle setzte, und in der wissenschaftlichen und technischen Richtung, die das moderne Zeitalter dieser letzteren hinzufügte. Aber die Culturgeschichte der Nationen macht dieselbe noch in die Augen fallender, indem sie gleichzeitig mit den grossen politischen Revolutionen entweder die Schöpfung neuer Institute verzeichnet, oder tiefgehende Modificationen in den Einrichtungen der bestehenden. Daher kommt der Ruf, den die in solchen Zeiten gestifteten Anstalten gleichsam augenblicklich bei ihrer Gründung erlangen; daher jedesmal die Aufregung der öffentlichen Meinung, die vielen Discussionen und Publicationen, sobald man die Hand an Neuerungen in dem Organismus derselben legt; daher endlich der Charakter der nationalen Institute, den sie aus der Uebereinstimmung zwischen den nationalen Wünschen und ihrer Aufgabe entnehmen, und daher die Liebe und Sorgfalt, mit denen wir sie von den Nationen gehegt sehen, die sie besitzen.

Es ist nicht mein Zweck, historisch die verschiedenen Erscheinungen dieser Thatsache aus einander zu setzen; aber von ihrer Wichtigkeit überzeugt, vor Allem aber überzeugt von der Wichtigkeit der hauptsächlichsten ihrer Consequenzen, dass es nämlich keine Hoffnung auf ein geregeltes Leben durch eine Unterrichtsanstalt gibt, wenn diese nicht durch die Stimme der öffentlichen Meinung entstanden ist, schien es mir die Pflicht meines Amtes zu sein, bei einer Gelegenheit, bei der eine so gebildete und edle Versammlung der Einweihung zweier höherer Lehranstalten beiwohnt, von dem eigenthümlichen Geiste derselben, von ihren gemeinschaftlichen und Specialzwecken, von ihrer wahrscheinlichen Zukunft zu sprechen, und ausserdem, so weit meine Kräfte es gestatten, zu zeigen, dass dieselben den intellectuellen und materiellen Bedürfnissen unseres Vaterlandes entsprechen und dass ihre Organisation die Frucht eines eifrigen Studiums der Zustände derjenigen Anstalten ist, welche bei den civilisirtesten Nationen dieselben Zwecke verfolgen.

Die Accademia Scientifico-Letteraria und das Istituto Tecnico-Superiore leiten beide ihren Ursprung aus dem Gesetze über den öffentlichen Unterricht vom 13. November 1859 her; aber weder die eine, noch das andere finden in diesem Gesetze ihre genau umgrenzte Erklärung. Das Gesetz stellt zum Theil den eigenthümlichen Geist der ersten fest, indem es bestimmt, dass in ihr vorzugsweise die der philosophischen und philologischen Facultät eigenthümlichen Lehren vorgetragen und die bezüglichen akademischen Grade verliehen werden sollen; es umschreibt den Charakter des zweiten, indem es anordnet, es solle eine Schule zur Bildung der Ingenieure umfassen; aber jede andere Specialbestimmung blieb der ausübenden Gewalt überlassen. Dieser Breite der Auslegung, glaube ich, muss man die Fehler zuschreiben, denen wir die derartigen Anstalten in den letzten Jahren verfallen sahen, Fehler, die theils allgemein, theils weniger bekannt sind, von denen aber die einen so wichtig sind, wie die anderen; und eben dieser Breite der Auslegung verdanken wir ohne Zweifel die gegenwärtige Organisation dieser Institute. Doch beunruhigen wir uns nicht mehr durch den Gedanken an die Vergangenheit, die Gegenwart zeigt sich mit freudigem Anblick. Wir weihen heute zwei Anstalten ein, deren eine einen bedeutenden Einfluss auf die Cultur der Nation auszuüben bestimmt ist, deren andere denselben specieller auf den öffentlichen Reichthum ausüben soll; lassen Sie uns für ihre Zukunft Sorge tragen.

Gestatten Sie mir, dass ich, um zuerst die wesentlichsten Theile der Organisation dieser Institute zu besprechen, einige wenige Betrachtungen in Bezug auf gewisse Fragen des öffentlichen Unterrichts anstelle, die genau mit ihnen zusammenhängen. Es gibt keinen Zweig des öffentlichen Unterrichts, der einen so bedeutenden Einfluss auf die Cultur einer Nation hätte, als der der Secundärschulen. Diese Thatsache, deren Existenz ersichtlich wird, wenn man auch nur ein Wenig die Zustände dieses Theiles des Unterrichtes in den verschiedenen Staaten Europas und den Grad ihrer Cultur betrachtet, hat ausserdem vor Augen liegende wirkende Ursachen, die ihren Ursprung der Natur des Secundär-Unterrichtes selbst verdanken. Der Secundär-Unterricht hat nämlich zwei verschiedene Ziele. Er soll denjenigen Jünglingen, welche wegen ihrer Vermögensverhältnisse oder aus sonstigen Beweggründen diesen Studien sich widmen, entweder einen gewissen Grad von allgemeiner Bildung oder die nothwendigen Kenntnisse zur Ergreifung gewisser bestimmter Berufszweige geben; er soll aber auch denen eine hinlängliche Vorbereitung ertheilen, welche die höheren Studien zu durchlaufen die Absicht

haben. Es ist nicht nothwendig, dass ich mich hier zu beweisen bemühe, welchen grossen Einfluss der erste Zweck auf die nationale Cultur ausüben muss; ich brauche nur an das Verhältniss der Zahl der Jünglinge zu erinnern, welche die Secundärstudien durchmachen, zu der Zahl derjenigen, welche zu den höheren Studien übergehen. Dies Verhältniss ist für Italien wie drei zu eins, und es ist daher das Streben, die Universitätsstudien zu durchlaufen, bei uns heute noch bei Weitem stärker als bei anderen Nationen. Ich bemerke nur noch, wie das zweite Ziel auf den Culturgrad einer Nation einen um Vieles bedeutenderen Einfluss hat, als man vielleicht gewöhnlich annimmt. Die Vorbereitung, die dem Secundär-Unterrichte anvertraut ist, darf nicht bloss darin bestehen, dass der Complex der zum Uebergang zu den höheren Studien unumgänglich nöthigen Kenntnisse gelehrt werde, sondern sie muss auch den Zweck haben, die Jünglinge an das Arbeiten zu gewöhnen, in ihnen diejenige wissenschaftliche Wissbegierde zu erregen, welche die Quelle der Selbstuntersuchungen und der Stetigkeit ist, und in ihrem Geiste diejenige Liebe zu den humanistischen und exacten Wissenschaften, als reine Wissenschaften betrachtet, zu erwecken, ohne welche die höheren Studien nichts Anderes sind, als ein Mittel, ein Zeugniss zu erhalten und damit das Recht zu erlangen, sich einem gewissen Berufe zu widmen. Wenn aber eine gute Auswahl der Unterrichtszweige des Secundär-Unterrichtes, wenn eine zweckmässige Vertheilung derselben, namentlich mit Rücksicht auf das Alter der Zöglinge, die Erreichung dieser Ziele herbeiführen kann, so zweifele ich nicht, dass die Thätigkeit des Lehrers eine wahrhaft wirksame Thätigkeit ist, eine Thätigkeit, die gleichsam an und für sich selbst wirksam sein kann. Dies haben die aufgeklärteren Regierungen begriffen, wie gross oder klein auch der Einfluss ist, den sie auf den öffentlichen Unterricht haben, und deshalb schufen sie Specialanstalten zum Unterrichte der zukünftigen Lehrer, deshalb acceptirten sie die Anstalten, die schon zu demselben Zwecke von weisen Professoren eingerichtet waren, und machten sie zu Staatsanstalten, deshalb endlich setzten sie Preise für die Lehrer aus, welche sich bei Ausübung ihrer Functionen wohl verdient machen würden. Ich werde mich nicht dabei aufhalten, von der Organisation dieser Institute zu sprechen; der wohlthätige Einfluss der École Normale zu Paris auf den Secundärunterricht, und noch mehr der der Seminarien Deutschlands, so weit derselbe die classischen und geschichtlichen Studien betrifft, welcher Einfluss auch von denen als unbestreitbar anerkannt wird, die sich zuerst gegen diese Anstalten erklärten, machte diese Institute populär und hat die Kenntniss der Organisation derselben

verbreitet. Aber richten Sie Ihre Aufmerksamkeit auf einen speciellen Punkt dieser Organisation, nämlich auf den Charakter des Verhältnisses, das zwischen diesen Instituten und anderen höheren Lehranstalten besteht! In Frankreich und in Preussen, um nur von diesen beiden Staaten zu sprechen, bestehen, wie bei uns, Universitäts-Facultäten; in dem ersten Staate Facultäten für die humanistischen und Facultäten für die exacten Wissenschaften; in dem zweiten philosophische Facultäten, welche die humanistischen und exacten Wissenschaften umfassen. Doch hat Frankreich noch eine Specialanstalt, die École Normale, die mit diesen Facultäten nur bei dem Examen für akademische Grade im Zusammenhange steht; Preussen besitzt durch die innere Organisation seiner Seminarien Anstalten, für welche die Vorlesungen der philosophischen Facultät nur einen Theil, und sicher nicht den wichtigsten Theil des Unterrichts bilden. In diesen Staaten wurde also die verschiedene Natur dieser beiden Unterrichtsarten erkannt und der Unterricht der Universitäts-Facultäten als ungenügend für den Normalunterricht erkannt.

Gehen wir von diesen allgemeinen Ideen dazu über, die Unterrichtsmittel zu betrachten, welche in früheren Zeiten, und die augenblicklich den Lehrern in Italien dargeboten sind, so sehen wir, dass die leuchtenden Beispiele, welche die civilisirtesten Nationen darbieten, fast vollständig unbekannt sind, dass die nützlichsten Lehren der Erfahrung gänzlich vernachlässigt werden. Nun frage ich, ist dieser bejammernswerthe Zustand der Dinge nur eine Folge der Missregierung, die vierzig Jahre hindurch in Italien gewährt hat? Ist der Weg, auf welchem wir heute einherschreiten, jenen Beispielen und jenen Lehren entsprechend? Ich fühle das ganze Gewicht dieser Fragen und ich würde mich nicht auf ein so schlüpfriges Terrain gewagt haben, wenn ich nicht überzeugt wäre, dass ich dieselben von einem so hohen Standpunkte aus auffassen könnte, dass jede Möglichkeit eines Tadels ausgeschlossen ist.

Wer auch die gegenwärtigen politischen, administrativen und ökonomischen Zustände Italiens mit denen der ersten Monate des Jahres 1859 vergleicht, muss, wie wenig günstig er auch für uns gesinnt sein mag, sicher zugeben, dass eine grosse Umwälzung in politischer, administrativer und ökonomischer Beziehung vor sich gegangen ist, und dass durch sie die Italiener jede Art von Departements-, Provincial- und Communalinteresse dem allgemeinen Interesse der Nation zu opfern gelernt haben. Können wir nun sagen, dass in Italien auch in Bezug auf den öffentlichen Unterricht eine Umwälzung vor sich gegangen? Finden wir in diesen

Jahren in Italien auch nur einen der grossen Gedanken in Anwendung gebracht, die, wie schon gesagt, die grossen politischen Revolutionen begleiten, die Frankreich seine École Normal, seine École Polytechnique und sein Institut National gaben, und in Deutschland die Hauptursache der wissenschaftlichen Bewegung auf seinen Universitäten waren? Man sage nicht, es sei dies die Schuld der Regierungen: die neuen Ideen, wenn auch noch so ausgezeichnet, lassen sich einem freien Lande nicht aufpfropfen, wenn ausserdem noch die Anwendung derselben einige Opfer kostet, und wenn vor der Anwendung die Majorität der Nation sich denselben günstig zeigen muss. Ist es denn aber möglich, dass die Vorarbeiten, die Arbeiten, welche die öffentliche Meinung über diese Ideen, die ich neu nenne, wenn sie es auch vielleicht nur für uns sind, aufklären und auf dieselben hinleiten sollen, sich ausführen lassen mittelst einer fast fortwährenden Gleichgültigkeit gegen Alles, was den öffentlichen Unterricht betrifft, die, wenn sie auch nur einen Augenblick aufhört, alte Vorurtheile oder veraltete Ansprüche und vage, unbestimmte Wünsche verschwinden lässt, die einmal auf das Feld der Praxis gebracht, die Leere des Gedankens enthüllen? Ich verzweifle nicht, vielmehr scheinen in diesen letzten Zeiten Symptome besserer Vorsätze hervorzutreten. Lassen Sie uns dieselben mit unserer ganzen Kraft unterstützen, und möge Italien in kurzer Zeit, seiner berühmten Traditionen eingedenk, mit Recht sagen können: sie haben die Zukunft vorbereitet!

Ich habe bis jetzt das eine der dringendsten Bedürfnisse Italiens berührt, das nämlich, welches die Nationalcultur betrifft; ich werde jetzt in Kürze von dem anderen sprechen, das speciellen Zusammenhang mit dem öffentlichen Reichthume hat. Die wunderbaren Fortschritte der positiven Wissenschaften und ihrer Anwendungen in unserem Jahrhundert erschlossen dem öffentlichen Unterrichte eine ganz neue Richtung: die technische. Geschaffen von dem Bedürfniss der modernen Gesellschaft, aber in sich selbst die Keime der eigenen Entwicklung tragend, erlangte der technische Unterricht in kurzer Zeit eine sehr bedeutende Wichtigkeit. Regierungen und Private fühlten die Nothwendigkeit, dass derselbe in eigenen Anstalten ertheilt werden müsse; seine augenblicklichen und wohlthätigen Folgen, die durch ihn hervorgebrachten Fortschritte der Industrie hatten mächtigen Einfluss, um die öffentliche Meinung auf seine Organisation und auf die Modificationen aufmerksam zu erhalten, die man bald darin einzuführen anfing. Die Regierungen, in welche Italien von der Restauration bis zum Jahre 59 zerfiel, sorgten nicht für diesen, ja verabscheueten zum grösseren Theile diesen Zweig des öffentlichen Unterrichts, und

zwar nicht mit Rücksicht auf die Specialität dieses Unterrichtszweiges, sondern wegen der grossen Bedeutsamkeit seiner Folgen. Die Entwicklung der Industrie schuf Bedingungen, die zum grossen Theile für despotische und wenig erleuchtete Regierungen unannehmbar waren; der Associationsgeist, die Handelsfreiheit, mit einem Worte alle praktischen Formen des Fortschrittes; welche die industrielle Oekonomie zur Grundlage haben, sind mit Regierungsgewalten, die denen ähnlich sind, welche Italien so lange Jahre hindurch besass, unverträglich. Es ist daher nicht zu verwundern, wenn wir uns heute beinahe noch auf dem Punkte befinden, dass wir die ersten Schritte in diesem Unterrichtszweige thun; aber diese unfreiwillige Zögerung legt uns sehr wichtige Verpflichtungen auf, und wir müssen denselben auf's Sorgsamste nachkommen. Wenn wir jedesmal, sobald in diesen letzten Jahren eine Weltausstellung in England oder Frankreich die Kräfte der Industrie der verschiedenen Nationen mit einander in Vergleich stellte, und jedesmal ein Handelsvertrag die Tarife auf gewisse Producte der Industrie erniedrigte, Regierungen, Parlamente, Männer der Wissenschaft und Industrielle mit der grössten Aufmerksamkeit sich mit der Ausbreitung der Organisation des technischen Unterrichtes beschäftigen sahen, weil sie in ihm eine Hauptquelle des Fortschrittes erkannten, was für Anstrengungen müssen wir da machen, die wir, obgleich zuletzt in die Gemeinschaft der Nationen eingetreten, schon Handelsverträge besitzen, die uns mit einigen derselben verbinden, von denen andere die Sanction der Staatsgewalten erwarten; wir, denen dieselben politischen Institutionen die Zurückweisung auch nicht einer der ökonomischen Freiheiten gestatten.

Das Gesetz von 1859 über den öffentlichen Unterricht und andere spätere Gesetze der Localregierungen verbreiteten über den grössten Theil Italiens Anstalten für den Secundärunterricht, die man technische Schulen und technische Institute genannt hat, die einen vorzugsweise der Pflege der Gemeinden, die anderen der der Provinzen anvertraut. Es ist nicht meine Absicht, die verschiedenen Bestimmungen des Gesetzes oder der diese Institute betreffenden Reglements zu analysiren. Diese Analyse wäre hier nicht am Platze und würde mich von dem Hauptgegenstande abziehen. Ich stehe jedoch nicht an, zu versichern, dass der Gedanke, welcher diesen Theil der Unterrichtsgesetzgebung eingegeben hat, gut ist, und dass er, wenn er nicht in der Ausführung verschlechtert wird, sehr gute Resultate liefern dürfte. Erlauben Sie mir, meine Ideen über diesen Punkt klarer aus einander zu setzen: Ich halte den Gedanken für gut, nach welchem der technische oder professionelle Unterricht Specialanstalten anvertraut

ist, die in den Städten gegründet sind, welche die Mittelpunkte der industriellen und commerciellen Bewegung ausmachen, und in denen die Jünglinge, welche sich einem bestimmten Berufe, der Industrie, dem Handel, dem Landbau widmen wollen, eine zweckmässige allgemeine und Specialbildung erlangen, wo also der Unterricht, besonders der in den positiven Wissenschaften, unter dem Gesichtspunkte ihrer praktischen Resultate ertheilt wird. Diese Principien, wie sie unser Gesetz enthält, finden wir von Pompée, von Saint-Marc Girardin, von Arago und von allen denjenigen empfohlen, welche, bis jetzt ohne glücklichen Erfolg, ebenso in Frankreich ein System von professionellem Secundärunterricht organisiren wollten, für den man von Salvandy bis zu dem gegenwärtigen Minister des öffentlichen Unterrichts nichts Besseres zu ersinnen wusste, als die Zweitheilung. Werden aber diese Principien wirklich angewendet werden und sind sie bei dem gegenwärtigen Zustande Italiens anwendbar? Wenn wir unser Augenmerk auf die Mittel richten, welche die gefallenen Regierungen vierzig Jahre hindurch den Jünglingen Italiens für den höhern technischen Unterricht darboten, so ist die Antwort nicht zweifelhaft, und wir können a priori behaupten, dass das richtigste Princip für den praktischen Unterricht, nach welchem in jenen Instituten die Lehrstunden gegeben werden sollen, für das Bedürfniss der Lehrer im Allgemeinen nicht anwendbar ist.

Ich habe die nothwendigen Bedingungen zu beleuchten versucht, welche, meiner Meinung nach, in Bezug auf den öffentlichen Unterricht für Italien die vorwiegenden sind; ich habe zu zeigen versucht, dass dieselben in dringendster Weise die Schöpfung einer Normalschule für die classischen, historischen, philosophischen und die reinen und angewandten positiven Wissenschaften verlangen, und bin so wieder auf den Hauptgegenstand meiner Rede gekommen, nämlich von den gemeinsamen Zwecken der beiden Anstalten zu sprechen, die wir heute einweihen. Der Unterrichtsplan der Accademia Scientifica Letteraria setzt unter den augenblicklichen ökonomischen Verhältnissen dieses Instituts und gemäss den Königlichen Decreten vom Juli und November des laufenden Jahres in erster Stelle einen Normalcursus zum Zweck der Ausbildung der zukünftigen Professoren der classischen Sprachen und Literaturen und der geschichtlichen und philosophischen Studien an den Secundär-Unterrichts-Anstalten fest. Das Gründungsdecret und das Reglement des Istituto Tecnico Superiore bestimmen, dass man in diesem Institute Habilitationszeugnisse zum Unterrichte in den angewandten mathematischen und Naturwissenschaften, wie er in den Secundär-Unterrichts-

Anstalten ertheilt wird, erlangen könne, und wenn auch aus Mangel der nöthigen Fonds diese Abtheilung des Instituts noch nicht in diesem Jahre eröffnet werden kann, so beschäftigte die directive Commission desselben sich doch mit ihrer Organisation und veröffentlichte ihr Programm, theils um die öffentliche Meinung auf eine Schule aufmerksam zu machen, die für Italien neu, in Frankreich von den competentesten Männern seit 1833, wenn auch vergebens, verlangt, eine der wichtigsten Abtheilungen einiger polytechnischer Anstalten Europas ausmacht, von denen ich nur die von Dresden und Zürich nennen will; theils um die Geringfügigkeit der Kosten an's Licht zu ziehen, die zur Verwirklichung desselben nöthig sind.

Dennoch ist, auch unter der Voraussetzung, dass die ökonomischen Verhältnisse beider Institute sich so günstig gestalten, dass sie die vollständige Ausführung alles dessen erlauben, was durch die gegenwärtigen Reglements festgesetzt ist, der Zweck, den ich ihnen gemeinschaftlich zuschrieb, nicht erfüllt, der Gedanke der Normalschule nämlich, wie ich ihn oben definirte, ist nicht vollständig. Um diesen Mangel beklagenswerth zu machen, trägt nicht bloss die Ueberlegung bei, dass, da die reinen positiven Wissenschaften ausserhalb des Umfangs des Normalcursus geblieben sind, die zukünftigen Lehrer derselben noch keine Specialschule, die sie auf ihrem steilen Wege unterstützt, besitzen, sondern eine andere bei Weitem mehr in's Gewicht fallende Betrachtung, dass nämlich sowohl die eine, als die andere Abtheilung des Normalcursus, die wir wenigstens wirklich besitzen, für sich diesen Mangel mit empfinden wird. Wenn die Trennung der positiven Wissenschaften und der sprachlichen, historischen und philosophischen Studien immer für ihre Fortschritte verderblich war, wenn sie bei dem gegenwärtigen Zustande dieser Wissenschaften und jener Studien ein Anachronismus ist, so darf sie noch viel weniger ein Grundprincip der Organisation einer Normalschule bilden. Sehen wir uns vor, die Abtheilungen einer Normalschule, die zur Erlangung von Habilitationszeugnissen für specielle Unterrichtsfächer führen können, mit einer Trennung zu verwechseln, welche die traurigsten Folgen für die Bildung der jungen Professoren haben würde. Und lassen wir vor Allem ja nicht aus den Augen, dass die Normalschulen ihrer Natur nach Schulen einer bestimmten Methode sind, indem wir diese Benennung nicht, wie man viele Jahre hindurch that, auf die pädagogische Methode beschränken, sondern sie so weit ausdehnen, dass sie die Methode des Studiums und die Methode der Untersuchung in sich fasst. „Die Philosophen der literarischen Schule haben durch ihre Feindseligkeit und ihren Indifferentismus

gegen die Resultate der Naturwissenschaften den Weg zu jedem wahren Fortschritte verschlossen", schrieb ganz vor Kurzem Renan, indem er einen Irrthum der Methode angriff. Möge dieser gewichtige Ausspruch, aus seinem allgemeinsten Gesichtspunkte aufgefasst, sich vollständig der Gemüther bei der Leitung des Studiums der neuen Generation Italiens bemächtigen.

Wenn aber auch die Normalcurse unserer beiden Institute heute noch eine Lücke lassen, die, wenn sie fortdauerte, ihnen gefährlich werden könnte, so sind sie doch anderntheils der Art constituirt, dass jede Modification, die in eine derselben eingeführt wird und dieselbe auf dem angegebenen Wege zu vervollständigen strebt, dasselbe Streben auch für das Andere einschliesst. Die beiden Anstalten haben also ein grosses gemeinschaftliches Interesse, sie müssen zusammengehen, um an's Ziel zu gelangen, und ich zweifle nicht, dass sie es erreichen werden. „Die ehrenwerthesten Hoffnungen sind kühn", schreibt Guizot in seinen Memoiren bei der Erinnerung, wieviel er, als Minister des öffentlichen Unterrichts des Königreichs Frankreich, für die Erweiterung des naturgeschichtlichen Museums zu Paris gethan; ich wende mich an den Minister des öffentlichen Unterrichts des Königreichs Italien und sage: diese meine Hoffnungen sind ehrenhaft, machen Sie, dass sie nicht zu kühn sind.

Indem ich von dem gemeinsamen Ziele zu den Specialzwecken beider Institute übergehe, bemerke ich, dass die Accademia Scientifico Letteraria ein historisch-philologisches Institut umfasst, welches das Doctordiplom in den historisch-philologischen Wissenschaften zu ertheilen berechtigt ist, und dass das Istituto Tecnico Superiore zwei Specialschulen besitzt, eine für Civil-Ingenieure, eine andere für die Mechaniker, welche die bezüglichen Zeugnisse zur Ausübung dieser Berufszweige ertheilen. Ausserdem werden in diesem letzteren Institute im laufenden Jahre zwei freie ausserordentliche Curse gehalten werden, nämlich ein Cursus der Schnell-Feldmesskunde, in welchem unsere jungen Ingenieure mit den ausserhalb Italiens schon in Anwendung gekommenen Methoden und Instrumenten, die zur Abkürzung der geodätischen Operationen bestimmt sind, von ihrem berühmten Erfinder bekannt gemacht werden sollen, der andere über einen interessanten Theil der angewandten Zoologie, über die Acclimatisation und Aufzucht der nützlichen Thiere. Endlich hoffe ich, dieser Schule binnen Kurzem durch die edele Initiative der Akademie der schönen Künste eine Specialschule für Civil-Architekten hinzufügen zu können.

Wenn das philologisch-historische Institut auch für jetzt nur

wenig andere Unterrichtszweige umfasst, als die der Normalschule, so kann es doch auch in diesen Grenzen nützliche Dienste leisten, da es ein Mittel zu einer vollständig freien historischen und philologischen Bildung darbietet. Ich glaube aber, dass es erst an dem Tage wirklichen Einfluss auszuüben vermag, an welchem die neue Generation, durch die Normalschule an anhaltende und strenge Studien gewöhnt, selbst wünschen wird, in ihnen fortzuschreiten und sich zu vervollkommnen.

Ich werde mich hier nicht bei der Organisation des Unterrichts dieser Abtheilung der Akademie aufhalten und eben so wenig bei der der Specialschulen für Ingenieure des Instituts. Die Programme dieser Anstalten sind veröffentlicht und Sie können über den Werth derselben urtheilen. Es scheint mir jedoch zweckmässig, zu bemerken, dass die Accademia Scientifico-Letteraria und das Istituto Tecnico Superiore die wichtigsten Anordnungen ihrer administrativen Organisation gemein haben. Das Princip der Decentralisation ist in ihnen im weitesten Maasse zur Anwendung gelangt, und die Localwirkung der directiven Commissionen kann einen bedeutenden Einfluss auf die Vervollständigung und die Fortschritte dieser Anstalten ausüben. Auch die Bildung dieser directiven Commissionen harmonirt mit diesem Principe; und ich glaube, dass, weil sowohl der materielle Zuschuss, als die Gemeinde und eine hochverdiente Privatgesellschaft durch Erlaubniss des Gebrauches der ihr eigenthümlichen Sammlungen dem höheren technischen Institute die Mittel darreichen, es mit Recht für nöthig erachtet werden sollte, dass die hohe Direction dieser Anstalt einer Commission anvertraut würde, in der die Interessen der Nation, der Gemeinde und dieser Gesellschaft repräsentirt wären; die moralische Unterstützung, die diese Provinz immer bei jedem Werke des Nationalinteresses dem Gouvernement angedeihen lässt, die Sorgfalt, die Kosten und die Opfer, welche sie gebracht, um die Zustände des Elementar- und Secundär-Unterrichtes zu verbessern, dürften es der Regierung rathsam erscheinen lassen, diese Commissionen aus Vertretern des Staats, der Provinz und der Gemeinde zusammenzusetzen. Endlich in Anbetracht des gemeinsamen Zieles beider Institute stelle man einen Zusammenhang zwischen diesen Commissionen in ihrem Präsidium her.

Erlauben Sie mir noch einige wenige Worte über die Specialschulen des höheren technischen Instituts. Die Traditionen des Berufs der Ingenieure sind in unserer Provinz so ehrenvoll, dass nach meiner Meinung es ein schwerer Irrthum wäre, denselben bei der Organisation von Schulen, die zur Ausbildung von Inge-

nieuren bestimmt sind, nicht Rechnung zu tragen. Aber anderseits steht von ihnen vollständig fest, dass sie diesen Traditionen nicht treu geblieben sind, indem sie beinahe vollständig den grossen Fortschritten der angewandten Wissenschaften fremd blieben und den Geist und die Ausdehnungssphäre dieser Berufszweige im Verhältniss zu diesen Fortschritten zu modificiren unterliessen. Die Fremdherrschaft zerriss, um die Wahrheit zu sagen, den Faden dieser Traditionen, indem sie jene Associationen vernichtete, welche, Collegien genannt, einige Jahrhunderte hindurch vorzugsweise die bewegende Kraft für den Fortschritt des Ingenieurwesens abgaben, und denen wir jene Bauten, jene Kanäle verdanken, welche einen so grossen Einfluss auf die Bewässerung und den Ackerbau hatten und die auch heute noch die juristische Grundlage in vielen Streitigkeiten bilden. Die Statuten dieser Collegien enthalten Disciplinen zur Uebung von Berufszweigen, die heut zu Tage aufgegeben sind und die doch sehr zweckmässig in's Leben zurückgerufen werden könnten. So findet sich z. B. der Gedanke der Theilung der Berufszweige der Ingenieure, Architekten, Geometer, Feldmesser und der dazu führenden Studien, ein Gedanke, den wir heute auf der höchsten Stufe in den polytechnischen Anstalten Deutschlands angewendet sehen und den wir für unser Institut adoptirt haben, in diesen Statuten vertheidigt und von den Gouverneuren, die aus den Syndicis oder den Beamten des Collegiums gewählt wurden, mit Eifer festgehalten. Ich spreche nicht von den anderen ausgezeichneten Bestimmungen, die den zwölf oder dreizehn Statuten, welche das Collegium von Mailand von 1565 bis 1775 besass, gemein waren, ich werde nur zwei Auszüge aus dem letzten derselben anführen, das, wie wenigstens Verri schreibt, unter Inspiration des berühmten Frisi zusammengestellt, mir das vollständigste und am Besten redigirte zu sein scheint. Ich schicke voraus, dass zu jener Zeit die Schulen des Palatin, die in diesen Palast der Brera verlegt waren, ausser den litterarischen, ökonomischen, juristischen und medicinischen Unterrichtszweigen, die Parini, Soave, Beccaria, Lampugnani und Moscati anvertraut waren, einen Cursus von drei Jahren mit den Specialzweigen der Physik, Mechanik, Hydraulik, Civil-Architektur u. s. w. zum Unterrichte der Ingenieure, Architekten, Geometer und Feldmesser umfassten. Viele Artikel dieses Statuts drehen sich um die Beziehungen des Collegiums zu dieser Schule; — „Sobald", schreibt das nämliche Statut, „von dem Collegium die Lösung von Fragen der Architektur, der Hydraulik, der Abschätzung von Grundstücken u. s. w. verlangt wird" (und Jeder begreift, wie wichtig dieses Amt oder diese Pflicht des

Collegiums war), „und die Fragen Gegenstände betreffen, die von den geometrischen, mechanischen und hydraulischen Theorien abhängen, und nicht Objecte der reinen Praxis sind, so wird man eine Abschrift zwei Professoren der Schule übergeben, damit diese schriftlich ihre Meinung sagen, dieselbe den Syndicis der ersten Versammlung übergeben, und diese zur grösseren Klarheit bei den Verhandlungen des Collegiums dienen können.“ Und in einem anderen Artikel: „Da die praktischen Wissenschaften der Ingenieure, Architekten, Geometer und Feldmesser den Gebrauch verschiedener Maschinen und Instrumente verlangen, so soll zur grösseren Bequemlichkeit des öffentlichen Unterrichts für sie auf Kosten der Casse des Collegiums Sorge getragen und dieselben in einer der beiden Schulen, die im Gymnasium der Brera zum Unterrichte der Ingenieure bestimmt sind, aufbewahrt werden, und jedesmal, wenn dieselben von den Ingenieuren oder den Meistern der Militär-Architekten verlangt werden, soll für einige Tage der unentgeltliche Gebrauch gestattet sein.“

Wenn ich einen Augenblick Ihre Aufmerksamkeit auf die Erinnerungen der Vergangenheit zu richten versucht habe, so that ich dies nicht sowohl deshalb, um vorzugsweise die Ingenieure, welche dieser Versammlung beiwohnen, an die Wichtigkeit, welche diese Collegien und die gegenseitige Unterstützung zwischen Collegium und Schule für uns gehabt haben, zu erinnern, als deshalb, um mir den Weg zu bereiten, ihnen zu sagen: Die Schulen sind wiedergeboren und heute weihen wir sie ein; lassen Sie jene Associationen wiederaufleben, lassen Sie sie wiedererstehen im Geiste unserer Zeiten und Sie werden in diesen Schulen jede Art der Unterstützung finden!

Meine Herren, ich habe in grossen Zügen den Geist, die Ziele, die zu hoffende Zukunft der beiden wichtigen Institute zu zeichnen gesucht. Dem Minister, der mit gerechtem Stolze sagen kann, ich gab ihnen diese Grundlage, empfehle ich ihre Weiterbildung; Ihnen, die Sie durch Ihre Gegenwart zeigen, dass Sie den Werth derselben erkannt haben, empfehle ich, die öffentliche Meinung auf dieselben aufmerksam zu erhalten. Wir werden dann in nicht zu langer Zeit von diesen Schulen sagen können, was Arago von der französischen polytechnischen Schule sagte:

„Sie ist mehr als eine Schule, sie ist eine Nationalanstalt!“

[Auszug aus der Rivista Italiana.]

III.

Zur Ballistik.

Einige Integrale, welche bei der Auflösung des ballistischen Problems vorkommen.

Von

Herrn Dr. *Ligowski*,

Lehrer an der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule und am See-Cadetten-Institut in Berlin.

Im 22sten Bande des Archivs Nr. XXVI. kommt Herr Professor Grunert bei der daselbst gegebenen neuen Auflösung des ballistischen Problems auf Integrale von der Form:

$$\int U^n du \quad \text{und} \quad \int U^n u du,$$

wobei

$$U = c - u\sqrt{1+u^2} - \ln(u + \sqrt{1+u^2})$$

ist. Führt man in diese Integrale für u die hyperbolische Function $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ ein, dann wird:

$$du = \mathfrak{Cos}\,\varphi d\varphi \quad \text{und} \quad U = c - \mathfrak{Sin}\,\varphi\,\mathfrak{Cos}\,\varphi - \varphi,$$

oder auch, da

$$\mathfrak{Sin}\,\varphi\,\mathfrak{Cos}\,\varphi = \tfrac{1}{2}\mathfrak{Sin}\,2\varphi$$

ist,

$$U = c - \tfrac{1}{2}\mathfrak{Sin}\,2\varphi - \varphi,$$

mithin

$$dU = -(\mathfrak{Cos}\,2\varphi + 1)d\varphi = -2\,\mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi.$$

Aus $\int U^n du$ wird nun $\int U^n \mathfrak{Cos}\,\varphi d\varphi$.

Durch theilweise Integration ergiebt sich:

1) $$\int U^n \mathfrak{Cos}\,\varphi d\varphi = U^n \mathfrak{Sin}\,\varphi + 2n \int U^{n-1} \mathfrak{Cos}\,\varphi^2 \mathfrak{Sin}\,\varphi d\varphi.$$

Integrirt man auf der rechten Seite noch einmal theilweise, so entsteht:

2)

$$\int U^n \mathfrak{Cos}\,\varphi d\varphi = U^n \mathfrak{Sin}\,\varphi + \frac{2n}{3} U^{n-1} \mathfrak{Cos}\,\varphi^3 + \frac{2n(2n-2)}{3} \int U^{n-2} \mathfrak{Cos}\,\varphi^5 d\varphi.$$

Eine nochmalige Integration liefert:

3) $$\int U^n \mathfrak{Cos}\,\varphi d\varphi = U^n \mathfrak{Sin}\,\varphi + \frac{2n}{3} U^{n-1} \mathfrak{Cos}\,\varphi^3$$
$$+ \frac{2n(2n-2)}{3.5} U^{n-2} \mathfrak{Sin}\,\varphi \left(\mathfrak{Cos}\,\varphi^4 + \tfrac{4}{3} \mathfrak{Cos}\,\varphi^2 + \tfrac{8}{3}\right)$$
$$+ \frac{2n(2n-2)(2n-4)}{3.5} U^{n-3} \left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi^7}{7} + \tfrac{4}{3} \frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi^5}{5} + \tfrac{8}{3} \frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi^3}{3}\right)$$
$$+ \frac{2n(2n-2)(2n-4)(2n-6)}{3.5} \int U^{n-4} \left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi^9}{7} + \tfrac{4}{3} \frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi^7}{5} + \tfrac{8}{3} \frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi^5}{3}\right) d\varphi.$$

Man ersieht aus dem Vorstehenden, dass das Integral

$$\int U^n \mathfrak{Cos}\,\varphi d\varphi,$$

je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, zurückgeführt wird auf die Integrale

$$\int \mathfrak{Cos}\,\varphi^{2r+1} d\varphi \quad \text{und} \quad \int U \mathfrak{Cos}\,\varphi^{2r+1} d\varphi.$$

Zur Bestimmung von $\int \mathfrak{Cos}\,\varphi^{2r+1} d\varphi$ ergiebt sich durch theilweise Integration die Reductionsformel:

4)

$$\int \mathfrak{Cos}\,\varphi^{2r+1} d\varphi = \frac{1}{2r+1} \mathfrak{Cos}\,\varphi^{2r-1} \mathfrak{Sin}\,\varphi + \frac{2r}{2r+1} \int \mathfrak{Cos}\,\varphi^{2r-1} d\varphi,$$

durch deren wiederholte Anwendung man erhält:

5) $$\int \mathfrak{Cos}\,\varphi^{2r+1} d\varphi = \frac{\mathfrak{Sin}\,\varphi}{2r+1} \cdot \sum_{\mu=0}^{\mu=r} \frac{(r)_\mu}{(r-\frac{1}{2})_\mu} \mathfrak{Cos}\,\varphi^{2(r-\mu)}.$$

Aus $\int U \mathfrak{Cos}\,\varphi^{2r+1} d\varphi$ wird durch theilweise Integration gefunden:

$$\int U \mathfrak{Cos}\,\varphi^{2r+1} d\varphi = U \mathfrak{Cos}\,\varphi^{2r} \mathfrak{Sin}\,\varphi + 2 \int \mathfrak{Cos}\,\varphi^{2r+2} \mathfrak{Sin}\,\varphi d\varphi$$
$$- 2r \int U \mathfrak{Cos}\,\varphi^{2r-1} \mathfrak{Sin}\,\varphi^2 d\varphi.$$

Setzt man für $\mathfrak{Sin}\,\varphi^2$ seinen Werth $\mathfrak{Cos}\,\varphi^2 - 1$, so entsteht nach einer einfachen Reduction und Integration:

6)

$$\int U \mathrm{Cos}\,\varphi^{2r+1} d\varphi = \frac{U \mathrm{Cos}\,\varphi^{2r} \mathrm{Sin}\,\varphi}{2r+1} + \frac{2 \mathrm{Cos}\,\varphi^{2r+3}}{(2r+1)(2r+3)} + \frac{2r}{2r+1} \int U \mathrm{Cos}\,\varphi^{2r-1} d\varphi.$$

Eine wiederholte Anwendung dieser Reductionsformel giebt, wenn man berücksichtigt, dass nach No. 2)

$$\int U \mathrm{Cos}\,\varphi\, d\varphi = U \mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{2}{3} \mathrm{Cos}\,\varphi^3$$

ist,

7) $$\int U \mathrm{Cos}\,\varphi^{2r+1}\, d\varphi = \frac{U \mathrm{Sin}\,\varphi}{2r+1} \sum_{\mu=0}^{\mu=r} \frac{(r)_\mu}{(r-\frac{1}{2})_\mu} \mathrm{Cos}\,\varphi^{2(r-\mu)}$$

$$+ \frac{2}{2r+1} \sum_{\mu=0}^{\mu=r} \frac{(r)_\mu}{(r-\frac{1}{2})_\mu} \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi^{2(r-\mu)+3}}{2(r-\mu)+3}.$$

Mit Hülfe der vorstehenden Formeln erhält man nun sofort:

8) $$\int U \mathrm{Cos}\,\varphi\, d\varphi = U \mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{2}{3} \mathrm{Cos}\,\varphi^3,$$

9)

$$\int U^2 \mathrm{Cos}\,\varphi\, d\varphi = U^2 \mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{4}{3} U \mathrm{Cos}\,\varphi^3 + \tfrac{8}{15} \mathrm{Sin}\,\varphi (\mathrm{Cos}\,\varphi^4 + \tfrac{4}{3} \mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \tfrac{8}{3}),$$

10)

$$\int U^3 \mathrm{Cos}\,\varphi\, d\varphi = U^3 \mathrm{Sin}\,\varphi + 2U^2 \mathrm{Cos}\,\varphi^3 + \frac{8U}{3} \mathrm{Sin}\,\varphi (\mathrm{Cos}\,\varphi^4 + \tfrac{4}{3} \mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \tfrac{8}{3})$$

$$+ \tfrac{16}{5} \mathrm{Cos}\,\varphi^3 (\tfrac{1}{7} \mathrm{Cos}\,\varphi^4 + \tfrac{4}{15} \mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \tfrac{8}{9}),$$

11)

$$\int U^4 \mathrm{Cos}\,\varphi\, d\varphi = U^4 \mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{8}{3} U^3 \mathrm{Cos}\,\varphi^3 + \tfrac{16}{5} U^2 \mathrm{Sin}\,\varphi (\mathrm{Cos}\,\varphi^4 + \tfrac{4}{3} \mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \tfrac{8}{3})$$

$$+ \tfrac{64}{5} U \mathrm{Cos}\,\varphi^3 (\tfrac{1}{7} \mathrm{Cos}\,\varphi^4 + \tfrac{4}{15} \mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \tfrac{8}{9})$$

$$+ \tfrac{128}{15} \mathrm{Sin}\,\varphi (\tfrac{1}{21} \mathrm{Cos}\,\varphi^8 + \tfrac{124}{735} \mathrm{Cos}\,\varphi^6 + \tfrac{2704}{3675} (\mathrm{Cos}\,\varphi^4 + \tfrac{4}{3} \mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \tfrac{8}{3})).$$

Das Integral $\int U^n u\,du$ geht, wenn $\mathrm{Sin}\,\varphi$ für u gesetzt wird, über in:

$$\int U^n \mathrm{Cos}\,\varphi\, \mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi,$$

oder, da

$$\mathrm{Sin}\,\varphi\, \mathrm{Cos}\,\varphi = \tfrac{1}{2} \mathrm{Sin}\, 2\varphi$$

ist, in:

12) $$\int U^n u\,du = \tfrac{1}{2} \int (c - \tfrac{1}{2} \mathrm{Sin}\, 2\varphi - \varphi)^n \mathrm{Sin}\, 2\varphi\, d\varphi.$$

Setzt man ψ statt 2φ, so entsteht:

$$\int U^n u\,du = (\tfrac{1}{2})^{n+2} \int (2c - \psi - \mathrm{Sin}\,\psi)^n \mathrm{Sin}\,\psi\, d\psi.$$

Wenn zur Abkürzung $2c-\psi=V$ gesetzt wird, so erhält man:

13) $$\int U^n u du=(\tfrac{1}{2})^{n+2}\int(V-\mathfrak{Sin}\,\psi)^n\,\mathfrak{Sin}\,\psi d\psi,$$

also auch:

14) $$\int U^n u du=(\tfrac{1}{2})^{n+2}\sum_{\mu=0}^{\mu=n}(-1)^\mu (n)_\mu \int V^{n-\mu}\,\mathfrak{Sin}\,\psi^{\mu+1}d\psi.$$

Das gesuchte Integral ist daher zurückgeführt auf Integrale von der Form:

$$\int V^p\,\mathfrak{Sin}\,\psi^r d\psi.$$

Durch theilweise Integration wird:

$$\int V^p\,\mathfrak{Sin}\,\psi^r d\psi = V^p\,\mathfrak{Sin}\,\psi^{r-1}\,\mathfrak{Cos}\,\psi - \int \mathfrak{Cos}\,\psi d V^p\,\mathfrak{Sin}\,\psi^{r-1}$$
$$= V^p\,\mathfrak{Sin}\,\psi^{r-1}\,\mathfrak{Cos}\,\psi + p\int V^{p-1}\,\mathfrak{Sin}\,\psi^{r-1}\,\mathfrak{Cos}\,\psi d\psi$$
$$-(r-1)\int V^p\,\mathfrak{Sin}\,\psi^{r-2}\,\mathfrak{Cos}\,\psi^2 d\psi.$$

Für $\mathfrak{Cos}\,\psi^2$, $1+\mathfrak{Sin}\,\psi^2$ eingesetzt, giebt nach einer einfachen Umformung und theilweiser Integration:

15) $$\int V^p\,\mathfrak{Sin}\,\psi^r d\psi = \frac{V^p\,\mathfrak{Sin}\,\psi^{r-1}\,\mathfrak{Cos}\,\psi}{r}+\frac{p}{r^2}V^{p-1}\mathfrak{Sin}\,\psi^r$$
$$+\frac{p(p-1)}{r^2}\int V^{p-2}\,\mathfrak{Sin}\,\psi^r d\psi - \frac{r-1}{r}\int V^p\,\mathfrak{Sin}\,\psi^{r-2}\,d\psi.$$

Durch Anwendung der Formel 15) erhält man:

16) $$\int V\,\mathfrak{Sin}\,\psi d\psi = V\,\mathfrak{Cos}\,\psi+\mathfrak{Sin}\,\psi,$$

17) $$\int V^2\,\mathfrak{Sin}\,\psi d\psi = V^2\,\mathfrak{Cos}\,\psi+2V\,\mathfrak{Sin}\,\psi+2\,\mathfrak{Cos}\,\psi,$$

18)
$$\int V^3\,\mathfrak{Sin}\,\psi d\psi = V^3\,\mathfrak{Cos}\,\psi+3V^2\,\mathfrak{Sin}\,\psi+6V\,\mathfrak{Cos}\,\psi+6\,\mathfrak{Sin}\,\psi,$$

19)
$$\int V^4\,\mathfrak{Sin}\psi d\psi = V^4\,\mathfrak{Cos}\psi+4V^3\,\mathfrak{Sin}\psi+12V^2\,\mathfrak{Cos}\,\psi+24V\mathfrak{Sin}\psi+24\mathfrak{Cos}\psi,$$

20) $$\int\mathfrak{Sin}\,\psi^2 d\psi = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\psi\,\mathfrak{Cos}\,\psi+\tfrac{1}{2}V,$$

21) $$\int V\,\mathfrak{Sin}\,\psi^2 d\psi = \frac{V}{2}\mathfrak{Sin}\,\psi\,\mathfrak{Cos}\,\psi+\tfrac{1}{4}\,\mathfrak{Sin}\,\psi^2+\tfrac{1}{4}V^2,$$

22)
$$\int V^2\,\mathfrak{Sin}\,\psi^2 d\psi = \frac{V^2}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\psi\,\mathfrak{Cos}\,\psi+\frac{V}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\psi^2+\tfrac{1}{4}\,\mathfrak{Sin}\,\psi\,\mathfrak{Cos}\,\psi+\frac{V}{4}+\frac{V^3}{6},$$

23)

$$\int V^3 \mathrm{Sin}\,\psi^2 d\psi = \tfrac{1}{3} V^3 \mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi + \tfrac{3}{4} V^2 \mathrm{Sin}\,\psi^2 + \tfrac{3}{4} V\,\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi + \tfrac{3}{8}\mathrm{Sin}\,\psi^2 + \tfrac{3}{8} V^2 + \tfrac{1}{8} V^4,$$

24) $$\int \mathrm{Sin}\,\psi^3 d\psi = \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{2}{3}\mathrm{Cos}\,\psi,$$

25)

$$\int V\,\mathrm{Sin}\,\psi^3 d\psi = \tfrac{1}{3} V\,\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi + \tfrac{1}{9}\mathrm{Sin}\,\psi^3 - \tfrac{2}{3} V\,\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{2}{3}\mathrm{Sin}\,\psi,$$

26)

$$\int V^2 \mathrm{Sin}\,\psi^3 d\psi = \tfrac{1}{3} V^2 \mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi + \tfrac{2}{9} V\,\mathrm{Sin}\,\psi^3 + \tfrac{2}{27}\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{4}{27}\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{2}{3} V^2\,\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{4}{3} V\,\mathrm{Sin}\,\psi - \tfrac{4}{3}\mathrm{Cos}\,\psi,$$

27) $$\int \mathrm{Sin}\,\psi^4 d\psi = \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,\psi^3\,\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{3}{8}\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{3}{8} V,$$

28)

$$\int V\,\mathrm{Sin}\,\psi^4 d\psi = \tfrac{1}{4} V\,\mathrm{Sin}\,\psi^3\,\mathrm{Cos}\,\psi + \tfrac{1}{16}\mathrm{Sin}\,\psi^4 - \tfrac{3}{8} V\,\mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{3}{16}\mathrm{Sin}\,\psi^2 - \tfrac{3}{16} V^2,$$

29) $$\int \mathrm{Sin}\,\psi^5 d\psi = \tfrac{1}{5}\mathrm{Sin}\,\psi^4\,\mathrm{Cos}\,\psi - \tfrac{4}{15}\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi + \tfrac{8}{15}\mathrm{Cos}\,\psi.$$

Die Formel 14) in Verbindung mit No. 16) bis No. 29) giebt nun:

30)

$$\int U u\,du = \tfrac{1}{4}\int (V - \mathrm{Sin}\,\psi)\,\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi = \tfrac{1}{16}[V(2\,\mathrm{Cos}\,\psi - 1) + \mathrm{Sin}\,\psi(2 - \mathrm{Cos}\,\psi)],$$

31) $$\int U^2 u\,du = \tfrac{1}{16}\int (V - \mathrm{Sin}\,\psi)^2\,\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi$$

$$= \tfrac{1}{32}[V^2(2\,\mathrm{Cos}\,\psi - 1) + 2V\,\mathrm{Sin}\,\psi(2 - \mathrm{Cos}\,\psi) + \tfrac{1}{3}\mathrm{Sin}\,\psi^2(2\,\mathrm{Cos}\,\psi - 3) + \tfrac{8}{3}\mathrm{Cos}\,\psi],$$

32) $$\int U^3 u\,du = \tfrac{1}{32}\int (V - \mathrm{Sin}\,\psi)^3\,\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi$$

$$= \tfrac{1}{64}[V^3(2\,\mathrm{Cos}\,\psi - 1) + 3V^2\,\mathrm{Sin}\,\psi(2 - \mathrm{Cos}\,\psi) + \tfrac{1}{4} V(4\,\mathrm{Sin}\,\psi^2(2\,\mathrm{Cos}\,\psi - 3) + 32\,\mathrm{Cos}\,\psi - 3) + \tfrac{1}{6}\mathrm{Sin}\,\psi^3(4 - 3\,\mathrm{Cos}\,\psi) + \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\,\psi(32 - 3\,\mathrm{Cos}\,\psi)],$$

33) $$\int U^4 u\,du = \tfrac{1}{64}\int (V - \mathrm{Sin}\,\psi)^4\,\mathrm{Sin}\,\psi\,d\psi$$

$$= \tfrac{1}{128}[V^4(2\,\mathrm{Cos}\,\psi - 1) + 4V^3\,\mathrm{Sin}\,\psi(2 - \mathrm{Cos}\,\psi) + \tfrac{1}{2} V^2(4\,\mathrm{Sin}\,\psi^2(2\,\mathrm{Cos}\,\psi - 3) + 32\,\mathrm{Cos}\,\psi - 3) + \tfrac{1}{3} V(2\,\mathrm{Sin}\,\psi^3(4 - 3\,\mathrm{Cos}\,\psi) + 3\,\mathrm{Sin}\,\psi(32 - 3\,\mathrm{Cos}\,\psi)) + \tfrac{1}{10}\mathrm{Sin}\,\psi^4(4\,\mathrm{Cos}\,\psi - 5) + \tfrac{1}{90}\mathrm{Sin}\,\psi^2(32\,\mathrm{Cos}\,\psi - 3) + \tfrac{1408}{45}\mathrm{Cos}\,\psi].$$

N a c h t r a g.

In demselben Bande des Archivs auf Seite 395. hat Herr Professor Grunert zur Bestimmung der Coordinaten der Flugbahn die Gleichungen

1) . . . . $x = -\overline{\omega}\int_{tg\,i}^{u} \frac{u\,du}{1+\mu\overline{\omega}U}$

und

2) . . . . $y = -\overline{\omega}\int_{tg\,i}^{u} \frac{du}{1+\mu\overline{\omega}U}$

gegeben. Führt man, wie in dem Vorstehenden, $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ statt u ein und setzt $\operatorname{tg} i = \mathfrak{Sin}\,\gamma$, dann hat man zur Bestimmung von x und y:

3) . . . . $x = -\overline{\omega}\int_{\gamma}^{\varphi} \frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\varphi\,d\varphi}{1+\mu\overline{\omega}U}$

und

4) . . . . $y = -\overline{\omega}\int_{\gamma}^{\varphi} \frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi\,d\varphi}{1+\mu\overline{\omega}U}$.

Bezeichnet man die unbestimmten Integrale

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\varphi\,d\varphi}{1+\mu\overline{\omega}U} \quad \text{und} \quad \int \frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi\,d\varphi}{1+\mu\overline{\omega}U}$$

durch $f(\varphi)$ und $F(\varphi)$, dann sind x und y gegeben durch

5) . . . . $x = \overline{\omega}(f(\gamma) - f(\varphi))$

und

6) . . . . $y = \overline{\omega}(F(\gamma) - F(\varphi))$.

Zur Abkürzung setzen wir:

$$1 + \mu\overline{\omega}U = W \quad \text{und} \quad \mu\overline{\omega} = \tfrac{1}{2}h,$$

dann ist:

$$dW = -2\mu\overline{\omega}\,\mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi = -h\,\mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi.$$

Durch theilweise Integration ergiebt sich:

$$f(\varphi) = \int \frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\varphi\,d\varphi}{W} = \tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi^2}{W} - \frac{h}{2}\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi^4 d\varphi}{W^2}.$$

Wenn $\int \mathfrak{Cos}\,\varphi^4 d\varphi = P_1$ gesetzt wird, dann entsteht durch weitere Integration:

7) $$f(\varphi) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi^2}{W} - \frac{hP_1}{W^2} + 2!\,h^2 \int \frac{P_1\,\mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi}{W^3}\right).$$

Wir bezeichnen:

$$\int P_1 \mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi \text{ durch } P_2,$$
$$\int P_2 \mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi \quad ,, \quad P_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\int P_r \mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi \text{ durch } P_{r+1};$$

dann ergiebt sich aus No. 7) durch fortgesetzte theilweise Integration:

$$8)\quad f(\varphi) = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi^2}{W} - \frac{hP_1}{W^2} + \frac{2!\,h^2 P_2}{W^3} - \frac{3!\,h^3 P_3}{W^4} + \frac{4!\,h^4 P_4}{W^5} - \cdots$$
$$\cdots + \frac{(-1)^r r!\,h^r P_r}{W^{r+1}} + (-1)^{r+1}(r+1)!\,h^r \int \frac{P_r \mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi}{W^{r+1}}\Big), \quad r \geq 1$$

oder auch:

$$9)\quad f(\varphi) = \frac{1}{2h}\Big(\frac{h}{W}\mathfrak{Cos}\,\varphi^2 - \Big(\frac{h}{W}\Big)^2 P_1 + 2!\Big(\frac{h}{W}\Big)^3 P_2 - 3!\Big(\frac{h}{W}\Big)^4 P_3$$
$$+ 4!\Big(\frac{h}{W}\Big)^5 P_4 - \cdots + (-1)^r r!\Big(\frac{h}{W}\Big)^{r+1} . P_r$$
$$+ (-1)^{r+1}(r+1)!\,h^{r+1}\int \frac{P_r \mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi}{W^{r+1}}\Big).$$

Integrirt man $F(\varphi) = \int \frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi d\varphi}{W}$ theilweise, so entsteht:

$$10)\ \ldots\quad F(\varphi) = \frac{\mathfrak{Sin}\,\varphi}{W} - h\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\varphi\,\mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi}{W^2},$$

und nach einer zweiten Integration:

$$11)\quad F(\varphi) = \tfrac{1}{3}\Big(3\frac{\mathfrak{Sin}\,\varphi}{W} - h\frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi^3}{W^2} + 2h^2\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi^5 d\varphi}{W^3}\Big).$$

Setzen wir:

$$\int \mathfrak{Cos}\,\varphi^5 d\varphi = Q_1,$$
$$\int Q_1 \mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi = Q_2,$$
$$\int Q_2 \mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi = Q_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\int Q_r \mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi = Q_{r+1};$$

dann ergiebt sich aus No. 11) durch fortgesetzte Integration:

$$F(\varphi) = \tfrac{1}{3}\Big(\frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\varphi}{W} - \frac{h\,\mathfrak{Cos}\,\varphi^3}{W^2} + \frac{2!\,h^2 Q_1}{W^3} - \frac{3!\,h^3 Q_2}{W^4} + \frac{4!\,h^4 Q_3}{W^5} - \cdots$$
$$+ \frac{(-1)^r r!\,h^r Q_{r-1}}{W^{r+1}} + (-1)^{r+1}(r+1)!\,h^{r+1}\int \frac{Q_{r-1}\mathfrak{Cos}\,\varphi^2 d\varphi}{W^{r+2}}\Big), \quad r \geq 2$$

oder auch:

$$12)\quad F(\varphi)=\frac{1}{3h}\left(3\left(\frac{h}{W}\right)\mathfrak{Sin}\,\varphi-\left(\frac{h}{W}\right)^2\mathfrak{Cos}\,\varphi^3+2!\left(\frac{h}{W}\right)^3Q_1 -3!\left(\frac{h}{W}\right)^4Q_2+4!\left(\frac{h}{W}\right)^5Q_3-\ldots+(-1)^r r!\left(\frac{h}{W}\right)^{r+1}Q_{r-1} +(-1)^{r+1}(r+1)!\,h^{r+2}\int\frac{Q_{r-1}\,\mathfrak{Cos}\,\varphi^2d\varphi}{W^{r+2}}\right).$$

Wenn die Reihen in No. 9) und No. 12) convergiren, dann lassen sich zu jedem φ mit Hülfe von No. 5) und No. 6) x und y berechnen.

IV.

Construction derjenigen linearen Differential-Gleichung, deren particuläre Integrale die Producte der particulären Integrale zweier gegebenen linearen Differentialgleichungen sind.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Wären etwa gegeben folgende zwei lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung:

$$1)\quad y''=my'+ny,$$

$$2)\quad \eta''=\mu\eta'+\nu\eta;$$

in welchen m, n, μ und ν beliebige Functionen von x bedeuten mögen, und es sei zu suchen eine solche lineare Differentialgleichung in u, für welche

$$3)\quad u=\eta y$$

ist. Aus 3) folgt:

4) $$u' = \eta y' + \eta' y,$$

5) $$u'' = \eta y'' + 2\eta' y' + \eta'' y;$$

und setzt man in 5) statt y'' und η'' ihre aus 1) und 2) hervorgehenden Werthe, so erhält man:

$$u'' = m\eta y' + \mu y \eta' + 2\eta' y' + (n + \nu) y \eta,$$

oder geordnet:

6) $$u'' - (n + \nu) u = m\eta y' + m y \eta' + 2\eta' y'.$$

Differenzirt man diese Gleichung, und setzt man hierin sogleich wieder statt y'' und η'' ihre aus 1) und 2) folgenden Werthe, so erhält man:

7) $$u''' - (n + \nu) u' - (n' + \nu' + mn + \mu\nu) u$$
$$= \eta y' (m' + m^2 + 2\nu) + \eta' y (\mu' + \mu^2 + 2n) + 3(m + \mu) \eta' y'.$$

Differenzirt man nun diese Gleichung, so erhält man nach einigen Reductionen:

8) $$u'''' - (n + \nu) u'' - (2n' + 2\nu' + mn + \mu\nu) u'$$
$$- (n'' + \nu'' + mn' + \mu\nu' + 2m'n + 2\mu'\nu + m^2 n + \mu^2 \nu + 4n\nu) u$$
$$= \eta' y' (4m' + 4\mu' + 4m^2 + 4\mu^2 + 2n + 2\nu + 6m\mu)$$
$$+ \eta y' (m'' + 3mm' + m^3 + 5m\nu + 3\mu\nu + 2\nu')$$
$$+ \eta' y (\mu'' + 3\mu\mu' + \mu^3 + 5n\mu + 3mn + 2n').$$

Werden nun aus den drei Gleichungen 4), 6) und 8) die drei Grössen

$$\eta' y', \quad \eta y', \quad \eta' y$$

eliminirt, so erhält man eine lineare Differentialgleichung vierter Ordnung in u, und diese Gleichung ist die gesuchte.

V.

Construction derjenigen linearen Differentialgleichung, deren particuläre Integrale die Quadrate sind der particulären Integrale der linearen Differentialgleichung

1) $$X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = 0.$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Ich setze

2) $$z = y^2,$$

dann ist:

3) $$z' = 2yy',$$

4) $$z'' = 2yy'' + 2y'^2.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit X_2, und setzt man sodann statt $X_2 y''$ den aus 1) folgenden Werth, so hat man:

$$X_2 z'' = -2y(X_1 y' + X_0 y) + 2X_2 y'^2,$$

und setzt man hierin statt $2yy'$ seinen Werth z', ferner z statt y^2, so erhält man:

5) $$X_2 z'' + X_1 z' + 2X_0 z = 2X_2 y'^2.$$

Wird diese Gleichung abermals differenzirt, so erhält man:

$$X_2 z''' + (X_2' + X_1) z'' + (X_1' + 2X_0) z' + 2X_0' z = 2X_2' y'^2 + 4X_2 y' y''.$$

Setzt man auch hierein für $X_2 y''$ seinen aus 1) folgenden Werth, so hat man:

$$X_2 z''' + (X_2' + X_1) z'' + (X_1' + 2X_0) z' + 2X_0' z = 2X_2' y'^2 - 4y'(X_1 y' + X_0 y)$$

oder, statt $2yy'$ seinen Werth z' gesetzt:

6) $$X_2 z''' + (X_2' + X_1) z'' + (X_1' + 4X_0) z' + 2X_0' z = (2X_2' - 4X_1) y'^2.$$

Durch Elimination von y'^2 aus 5) und 6) erhält man die gesuchte Gleichung, und diese ist:

$$X_2^2 z''' + 3X_1 X_2 z'' + (X_1' X_2 - X_1 X_2' + 4X_0 X_2 + 2X_1^2) z' + (4X_0 X_1 + 2X_0' X_2 - 2X_0 X_2') z = 0.$$

VI.

Zwei geometrische Aufgaben aus der Kurvenlehre.

Von

Herrn Oberst *von Dewall,*

zweitem Bevollmächtigten bei der Bundes-Militair-Commission in Frankfurt a. M.

I. Aufgabe.

In einem gegebenen Kreise VDV' (Taf. I. Fig. I.) ist der Halbmesser $CD=r$ in A so getheilt, dass $AD=\frac{2}{5}r=a$ ist; errichtet man in A auf CD die Senkrechte AB und verlängert dieselbe rechts und links, dann ist $AB=AG=2.AD=2a$, also, wenn man AB in O und AG in O' halbirt, $AO=OB=AO'=O'G=a$.

Denkt man sich nun die Linie AB dergestalt stetig bewegt, dass der eine Endpunkt B auf dem Umfange des gegebenen Kreises fortrückt, während der Mittelpunkt O beständig in der Linie BG oder ihrer Verlängerung bleibt, dann beschreibt gleichzeitig der andere Endpunkt A eine Kurve, deren Gleichung gesucht wird.

Auflösung.

Beginnt die Bewegung der AB in der Art, dass B auf dem Bogen BZV, also der Mittelpunkt O in der Richtung von O nach B fortrückt, so nimmt die Kurve, welche A beschreibt, ihren Anfang in A und läuft oberhalb AB von der Linken zur Rechten. Der Punkt B kann auf dem Umfang des gegebenen Kreises nur bis zum Punkt V gelangen, dessen senkrechter Abstand VW von AB gleich ist $OB=a$; alsdann fällt O in W und A in P, wo $VW=WP=a$. Bei fortgesetzter, also rückschreitender Bewegung des Punktes B von V nach B, kehrt B in seine ursprüngliche Lage zurück, während O nach Q und A nach S gekommen

ist, in welchem letztern Punkte daher AS zum zweitenmal von der Kurve geschnitten wird. Die Kurve nimmt nun, während sich B auf dem Bogen BD von B nach D bewegt, den in der Figur angedeuteten Lauf unterhalb AS und schneidet CD in T, wenn B in D und O in A angekommen ist. In T tritt eine veränderte Richtung der Kurve ein; denn während sich B über D hinaus auf dem Bogen DG und O von A nach O' fortbewegt, beschreibt A den rechts von CD liegenden Zweig TMA; es wird daher die AS zum drittenmal von der Kurve, und zwar in A geschnitten.

Der fernere Verlauf der Kurve links von CD ist genau so, wie derselbe eben für den Theil rechts von CD beschrieben worden ist: Der oberhalb AS' liegende Zweig entsteht, wenn B von G bis V' und demnächst von V' wieder zurück nach G rückt; der unterhalb AS' liegende Zweig $SN'T$ wird durch die Bewegung des Punktes B von V' nach D und endlich der Zweig $TM'A$ durch das Fortschreiten des Punktes B von D nach B beschrieben. Es geht hieraus und aus der Natur der Aufgabe hervor, dass die Zweige der Kurve, welche rechts und links von CD liegen, einander gleich sind, und dass man daher nur einen dieser Zweige zu bestimmen braucht, um zugleich den andern zu haben. Da aber jeder Zweig wiederum aus drei, dem Anschein nach verschiedenen Aesten besteht, nämlich der Zweig rechts von CD aus den Aesten APS, SNT und TMA, so werden wir die Gleichung für einen jeden dieser drei Aeste entwickeln und dann untersuchen, ob sich hieraus eine allgemeine Gleichung für die ganze durch die Drehung der AB entstandene Kurve ableiten lässt.

Für die Entwickelung dieser Gleichungen nehmen wir SS' und CD als Koordinaten-Achsen, A als den Anfangspunkt an und zählen die Abscissen von A nach S, die Ordinaten von A auf AD und AC.

1. Gleichung für den Zweig *APS*.

Gesetzt der Punkt Y (Taf. I. Fig. 1.) der Kurve sei entstanden, indem sich AB in die Lage YZ begeben, so dass $EY=EZ=a$ ist, dann hat man, wenn man YX senkrecht auf AB fällt, für Y die Abscisse $AX=x$ und die Ordinate $YX=y$. Setzt man $OE=u$, dann ist, weil $OX=a-x$, $XE=a-x+u$ und es folgt aus dem rechtwinkligen Δ EXY:

$$(a-x+u)^2=a^2-y^2,$$

also

$$x=a+u\pm\sqrt{a^2-y^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Zur Auflösung der Aufgabe ist mithin nur erforderlich, u durch a und y auszudrücken. Zieht man zu dem Ende BZ, BC und CZ und setzt den Winkel, um welchen sich AB gedreht, um aus der Lage AB in die Lage YZ zu kommen, nämlich $\angle AEY = \varphi$, ferner $\angle BCZ = \psi$, $\angle CBA = \alpha$ und $CB = CZ = r$, so sind α und r gegebene Stücke und man kann die Abhängigkeit der beiden Winkel φ und ψ von einander bestimmen, indem man aus jedem der beiden Dreiecke BCZ und BEZ die gemeinschaftliche Seite BZ ausdrückt und die erhaltenen Werthe gleich setzt.

Es ist nämlich im $\triangle BCZ$, weil $\angle CBZ = 90^0 - \frac{1}{2}\psi$ ist:

$$BZ : r = \sin\psi : \cos\tfrac{1}{2}\psi,$$

folglich

$$BZ = \frac{r \sin\psi}{\cos\frac{1}{2}\psi}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ferner ist im $\triangle$ BEZ, weil $\angle EBZ = 90^0 - (\frac{1}{2}\psi - \alpha)$ ist:

$$BZ : a = \sin\varphi : \cos(\tfrac{1}{2}\psi - \alpha),$$

also

$$BZ = \frac{a \sin\varphi}{\cos(\frac{1}{2}\psi - \alpha)}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

und es folgt aus (2) und (3):

$$r \sin\psi \cos(\tfrac{1}{2}\psi - \alpha) = a \sin\varphi \cos\tfrac{1}{2}\psi. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Bestimmt man nun noch FZ aus $\triangle$ CFZ und EF aus $\triangle$ BEF und bemerkt, dass $FZ + EF = EZ = a$, so erhält man noch eine weitere, zur Auflösung der Aufgabe erforderliche Gleichung. Man findet, weil im $\triangle CFZ$ der $\angle CFZ = 180^0 - (\alpha + \varphi)$ ist:

$$FZ : r = \sin\psi : \sin(\alpha + \varphi),$$

$$FZ = \frac{r \sin\psi}{\sin(\alpha + \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

und weil im $\triangle BEF$ $EB = a - u$ ist:

$$EF : a - u = \sin\alpha : \sin(\alpha + \varphi),$$

$$EF = \frac{(a-u)\sin\alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Addirt man (5) und (6), dann folgt

$$a = \frac{r \sin\psi + (a-u)\sin\alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Die Gleichungen (4) und (7) reichen hin, um u durch a und y auszudrücken; denn die in denselben vorkommenden Funktionen des Winkels φ sind aus dem $\Delta\, EXY$ durch a und u zu ersetzen, r und α sind konstant, und wenn man aus (4) $\sin\psi$ entwickelt und in (7) substituirt, so verschwindet ψ und man erhält eine Gleichung zwischen u, a und y.

Löst man zunächst in (4) $\cos(\frac{1}{2}\psi-\alpha)$ auf und dividirt die dann entstehende Gleichung durch $\cos\frac{1}{2}\psi$, so erhält man:

$$r\sin\psi\cos\alpha+r\sin\psi\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi\sin\alpha=a\sin\varphi,$$

und indem man $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi=\dfrac{1-\cos\psi}{\sin\psi}$ setzt:

$$r\sin\psi\cos\alpha+r\sin\alpha\,(1-\cos\psi)=a\sin\varphi;$$

führt man nun, der einfachern Rechnung wegen für r, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ die Zahlenwerthe ein, welche sich aus dem rechtwinkligen $\Delta\, ABC$ sofort ergeben, nämlich:

$$r=\tfrac{5}{2}a,\ \sin\alpha=\tfrac{3}{5},\ \cos\alpha=\tfrac{4}{5};$$

dann ist

$$4\sin\psi+3\,(1-\cos\psi)=2\sin\varphi,$$

oder

$$3\sqrt{1-\sin^2\psi}=3+4\sin\psi-2\sin\varphi,$$

woraus folgt:

$$\sin\psi=\tfrac{2}{25}(4\sin\varphi-6\pm3\sqrt{4+3\sin\varphi-\sin^2\varphi}).$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist $\psi<90^0$, daher $\sin\psi$ positiv; mithin kann vor der Wurzel nur das Zeichen + gelten und es ist daher:

$$\sin\psi=\tfrac{2}{5}(4\sin\varphi-6+3\sqrt{4+3\sin\varphi-\sin^2\varphi}) \quad . \ . \ (8)$$

Löst man (7) nach u auf, dann findet man, nachdem man zuvor auch dort für r, $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ die Werthe gesetzt hat:

$$u=a+\tfrac{25}{6}a\sin\psi-a\cos\varphi-\tfrac{4}{3}a\sin\varphi,$$

und indem man hier $\sin\psi$ aus (8) substituirt:

$$u=-a-a\cos\varphi+a\sqrt{4+3\sin\varphi-\sin^2\varphi}.$$

Setzt man, wie aus $\Delta\, EXY$ folgt:

$$\sin\varphi=\frac{y}{a}\ \text{ und }\ \cos\varphi=\pm\frac{1}{a}\sqrt{a^2-y^2},$$

dann ist:

$$u = -a \mp \sqrt{a^2 - y^2} + a\sqrt{4 + \frac{3y}{a} - \frac{y^2}{a^2}}$$

oder:

$$u = -a \mp \sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{4a^2 + 3ay - y^2}, \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und (9) in (1) substituirt giebt endlich:

$$x = \mp 2\sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{4a^2 + 3ay - y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

als Gleichung für den Zweig APS.

Da, wenn y positiv und > 0 und $< a$ ist,

$$2\sqrt{a^2 - y^2} < \sqrt{4a^2 + 3ay - y^2},$$

so erhält man, welches der beiden Zeichen $\mp$ in (10) man auch gelten lässt, für x stets positive Zahlenwerthe. Demnach gehören in dem Zweige APS zu jeder Ordinate $y > 0$ und $< a$ zwei verschiedene Abscissen.

2. Gleichung für den Zweig SNT.

Ist der Punkt Y (Taf. I. Fig. 2.) der Kurve dadurch entstanden, dass die sich bewegende Linie von BS nach YZ, mithin der Mittelpunkt von Q bis E fortgerückt, so ist $EY = EZ = a$, $AX = x$ die Abscisse, $YX = y$ die Ordinate des Punktes Y, und wenn man $EQ = u$, also $BE = a - u$ setzt, dann folgt, weil $AX = x = AB + BE + EX = 2a + a - u + EX$, $EX = x + u - 3a$, und daher im rechtwinkligen ΔEXY:

$$(x + u - 3a)^2 = a^2 - y^2,$$

mithin

$$x = 3a - u \pm \sqrt{a^2 - y^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Zieht man BZ, CZ, CB, verlängert CB bis sie YZ in F trifft, bezeichnet den Drehungswinkel $BEZ = \varphi$, den $\angle BCZ = \psi$, und verfährt ganz nach den oben unter 1. angegebenen Grundsätzen, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$r \sin\psi \cos(\tfrac{1}{2}\psi + \alpha) = a \sin\varphi \cos\tfrac{1}{2}\psi, \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und

$$a = \frac{r \sin\psi + (a - u)\sin\alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

von denen (13) völlig mit (7) übereinstimmt und (12) nur darin von (4) abweicht, dass hier $\cos(\frac{1}{2}\psi + \alpha)$ statt $\cos(\frac{1}{2}\varphi - \alpha)$ steht.

Aus (12) findet man:

$$\sin\psi = \tfrac{2}{25}(4\sin\varphi + 6 \pm 3\sqrt{4-3\sin\varphi - \sin^2\varphi}), \;.\;.\;(14)$$

aus (13) $$u = a + \tfrac{25}{6}a\sin\psi - a\cos\varphi - \tfrac{4}{3}a\sin\varphi, \;.\;.\;(15)$$

und (14) in (15) substituirt giebt:

$$u = 3a - a\cos\varphi \pm a\sqrt{4-3\sin\varphi - \sin^2\varphi}. \;.\;.\;.\;(16)$$

Um zu entscheiden, welches von den beiden Zeichen $\pm$ vor der Wurzel Gültigkeit hat, berücksichtige man, dass der Zweig *SNT*, dessen Gleichung wir suchen, in *T* endigt, nachdem die beschriebene Linie in die Lage *DT* gekommen, also der Drehungswinkel $\varphi = 90^0$ und $u = AQ = 3a$ geworden ist; es muss daher für jeden Werth von $\varphi < 90^0$ auch $u < 3a$ werden, und dies kann, weil $a\cos\varphi < a\sqrt{4-3\sin\varphi - \sin^2\varphi}$ ist, nur geschehen, wenn vor der Wurzel in (16) das Zeichen — genommen wird. Demnach ist

$$u = 3a - a\cos\varphi - a\sqrt{4-3\sin\varphi - \sin^2\varphi}. \;.\;.\;.\;(17)$$

Setzt man diesen Werth von u in (11) und verfährt im Uebrigen wie oben unter 1, dann ergiebt sich:

$$x = \pm 2\sqrt{a^2-y^2} + \sqrt{4a^2-3ay-y^2}. \;.\;.\;.\;.\;(18)$$

Da, wenn $a > y$, auch $2\sqrt{a^2-y^2} > \sqrt{4a^2-3ay-y^2}$, und x für den Zweig *SNT* nur positiv sein kann, so muss in (18) lediglich das Zeichen $+$ vor $2\sqrt{a^2-y^2}$ gelten, und daher ist die gesuchte Gleichung des Zweiges *SNT*:

$$x = +2\sqrt{a^2-y^2} + \sqrt{4a^2-3ay-y^2}. \;.\;.\;.\;(19)$$

3. Gleichung für den Zweig *TMA*.

Der Zweig *TMA* (Taf. I. Fig. 3.) entsteht, wie oben bemerkt, durch die stetige Bewegung des Endpunkts der beschreibenden Linie auf dem Bogen *DG* und ihres Mittelpunkts von *A* bis *O'*. Ist nun *Y* ein Punkt der Kurve durch den Eintritt der beschreibenden Linie in die Lage *YZ* entstanden, so ist $AX = x$ die Abscisse, $XY = y$ die Ordinate von *Y*, und wenn man $AE = u$, also $EX = x + u$ setzt, dann giebt das rechtwinklige $\Delta\, EXY$, in welchem $EY = a$:

$$(x+u)^2 = a^2 - y^2,$$

mithin:

$$x = -u + \sqrt{a^2-y^2}. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(20)$$

Zieht man BZ, BC, CZ, verlängert ZY bis sie BC in F trifft, so ergeben sich für BZ aus den Dreiecken CBZ und EBZ genau dieselben Werthe wie oben in (2), daher auch dieselbe Gleichung wie (12), und man erhält wie (14):

$$\sin\psi = \tfrac{2}{25}(4\sin\varphi + 6 \pm 3\sqrt{4 - 3\sin\varphi - \sin^2\varphi}) \quad . \quad . \quad (21)$$

Dagegen folgt aus $\Delta\, CFZ$, weil $\angle\, CFZ = 180^0 + (\alpha - \varphi) = 180^0 - (\varphi - \alpha)$:

$$ZF = \frac{r\sin\psi}{\sin(\varphi - \alpha)},$$

und aus $\Delta\, FEB$, wo $EB = 2a + u$:

$$EF = \frac{(2a + u)\sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)},$$

mithin, weil $ZF - EF = ZE = a$,

$$a = \frac{r\sin\psi - (2a + u)\sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)},$$

woraus folgt:

$$u = a\cos\varphi - \tfrac{4}{3}a\sin\varphi + \tfrac{25}{6}a\sin\psi - 2a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Setzt man $\sin\psi$ aus (21) in (22), dann ist:

$$u = a\cos\varphi \pm a\sqrt{4 - 3\sin\varphi - \sin^2\varphi}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Da hier φ ein stumpfer Winkel, also $\cos\varphi$ und $a\cos\varphi$ immer negativ ist, so muss, damit man für u eine positive Zahl erhalte, vor der Wurzel das Zeichen $+$ gelten, und daher hat man:

$$u = a\cos\varphi + a\sqrt{4 - 3\sin\varphi - \sin^2\varphi},$$

und dies giebt, in (20) substituirt:

$$x = \pm 2\sqrt{a^2 - y^2} - \sqrt{4a^2 - 3ay - y^2},$$

wo nur das Zeichen $+$ genommen werden darf, weil x eine positive Zahl sein muss. Demnach ist die gesuchte Gleichung für den Zweig TMA:

$$x = +2\sqrt{a^2 - y^2} - \sqrt{4a^2 - 3ay - y^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Stellen wir nunmehr die Gleichungen für die drei rechts von der Ordinaten-Achse CD (Taf. I. Fig. 1.) liegenden Zweige APS, SNT und TMA, des näheren Vergleichs wegen, zusammen. Wir fanden:

(10) für den Zweig APS: $x = \mp 2\sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{4a^2 + 3ay - y^2}$
(19) „ „ „ SNT: $x = + 2\sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{4a^2 - 3ay - y^2}$
(24) „ „ „ TMA: $x = + 2\sqrt{a^2 - y^2} - \sqrt{4a^2 - 3ay - y^2}$.

Hieraus folgt, dass, abgesehen von den Vorzeichen, die drei ersten Glieder rechter Seits gleich, die zweiten Glieder aber darin von einander verschieden sind, dass in (10) $+3ay$ steht, während an derselben Stelle in (19) und (24) $-3ay$ erscheint. Diese Verschiedenheit verschwindet indess, wenn man berücksichtigt, dass (19) und (24) Gleichungen für die unterhalb der Abscissen-Achse liegenden Zweige sind, dass mithin die Ordinaten y dieser Zweige, im Gegensatze zu den Ordinaten des oberhalb der Abscissen-Achse liegenden Zweigs APS negativ genommen werden müssen. Thut man dies, zählt man also die positiven Ordinaten auf der Achse CD von A nach D, die negativen von A nach C, dann fassen sich die vorstehenden drei Gleichungen in die für alle drei Zweige allgemein gültige

$$x = \mp 2\sqrt{a^2 - y^2} \pm \sqrt{4a^2 + 3ay - y^2}$$

zusammen. Auch sind in dieser Gleichung die drei Zweige links von CD enthalten, wenn man das aus den verschiedenen möglichen Werthen für $\pm y$ sich ergebende positive Resultat für x, negativ nimmt und dasselbe auf der Abscissen-Achse von A links nach S' aufträgt.

Demnach ist die Gleichung für die gesammte, durch die Umdrehung der AB entstandene Kurve:

$$\pm x = \mp 2\sqrt{a^2 - y^2} \pm \sqrt{4a^2 + 3ay - y^2}. \quad . \quad . \quad . \ (25)$$

Setzt man in (25) $y = 0$, dann erhält man:

$$\pm x = \mp 2a \pm 2a$$

und hieraus folgt $x = 0$, oder $+x = 4a$ und $-x = 4a$, d. h. die Kurve schneidet die Abscissen-Achse in dreien Punkten und zwar m Anfangspunkt A, in dem rechts davon gelegenen Punkt S, so dass $AS = 4a$, und in dem links von A gelegenen Punkt S', so dass ebenfalls $AS' = 4a$.

Für $+y = a$ giebt (25) $x = \pm a \,.\, 2{,}44\ldots$
„ $-y = a$ „ „ $x = 0$;

die Kurve hat also in jedem der beiden oberhalb der Abscissen-Achse liegenden Zweige eine Ordinate $+y = a$, welche zu der

Abscisse $x = \pm a . 0{,}244 \ldots$ gehört, mithin in dem ungefähren Abstand von $\frac{1}{4}a$ rechts und links von der Ordinaten-Achse liegt. Die drei unteren Zweige der Kurve dagegen haben nur eine einzige gemeinschaftliche Ordinate $-y = a$, welche durch diese Zweige auf der Ordinaten-Achse als $AT = a$ abgeschnitten wird.

Die Gleichung (25) giebt nun ferner für jeden positiven und negativen Werth von $y > 0$ und $< a$ zwei positive und zwei negative Werthe für x. Man erhält z. B.:

Für	$+y = a . 0{,}1$,	$x = \pm a . 4{,}0611 \ldots$	und	$x = \pm a . 0{,}0813 \ldots$
„	$-y = a . 0{,}1$,	$x = \pm a . 3{,}9108 \ldots$	„	$x = \pm a . 0{,}069 \ldots$
„	$+y = a . 0{,}2$,	$x = \pm a . 4{,}0949 \ldots$	„	$x = \pm a . 0{,}1759 \ldots$
„	$-y = a . 0{,}2$,	$x = \pm a . 3{,}7925 \ldots$	„	$x = \pm a . 0{,}1265 \ldots$
„	$+y = a . 0{,}5$,	$x = \pm a . 4{,}0232 \ldots$	„	$x = \pm a . 0{,}5592 \ldots$
„	$-y = a . 0{,}5$,	$x = \pm a . 3{,}232 \ldots$	„	$x = \pm a . 0{,}232 \ldots$
„	$+y = a . 0{,}8$,	$x = \pm a . 3{,}6 \ldots$	„	$x = \pm a . 1{,}2 \ldots$
„	$-y = a . 0{,}8$,	$x = \pm a . 2{,}17979 \ldots$	„	$x = \pm a . 0{,}22121 \ldots$
„	$+y = a . 0{,}9$,	$x = \pm a . 3{,}29868 \ldots$	„	$x = \pm a . 1{,}55512 \ldots$
„	$-y = a . 0{,}9$,	$x = \pm a . 1{,}57178 \ldots$	„	$x = \pm a . 0{,}17178 \ldots$

Aus dieser Uebersicht geht hervor, dass, wie wir auch schon oben bemerkten, jeder der beiden oberen Zweige der gegebenen Kurve (Taf. I. Fig. 1.) zwei gleiche rechts und links von PW und $P'W'$ liegende Ordinaten hat. Da zu denselben indess verschiedene Abscissen $\pm x$ gehören, so sind die beiden Theile, in welche die Zweige durch PW und $P'W'$ getheilt werden, nicht gleichmässig zur Abscissen-Achse gestellt und daher von verschiedener Grösse und Gestalt. Einige Abscissen für die Theile PS und $P'S'$ fallen, weil $\pm x > 4a$ werden kann, ausserhalb der Kurvenfläche, so dass die Kurven die Abscissen-Achse in S und S' erst schneiden, nachdem sie eine rückläufige Richtung angenommen haben. Will man die Punkte, wo diese Richtung beginnt, bestimmen, dann ist nur nöthig in Gleichung (10):

$$x = -2\sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{4a^2 + 3ay - y^2}$$

den Werth für y zu ermitteln, damit derselbe ein Maximum für x gebe. Man findet, wenn man nach den bekannten Regeln verfährt, annähernd $y = a . 0{,}2658 \ldots$ und hieraus $\pm x = a . 4{,}1027 \ldots$

Was die beiden unteren Zweige ST und $S'T$ der Kurve betrifft, so entfernen sich dieselben anfänglich sehr schnell von der Abscissen-Achse: denn für $\pm x = a . 2{,}17$ ist die Ordinate $-y$ bereits auf $a . 0{,}8$ gewachsen. Die letzte Hälfte der Züge weicht

daher nicht erheblich von der parallelen Richtung mit der Abscissen-Achse ab.

Für die unteren Zweige TMA und $TM'A$ machen wir aus den oben berechneten Zahlenwerthen die Wahrnehmung, dass mit dem Wachsen der Ordinaten anfänglich auch ein Wachsen der Abscissen verbunden ist, dass aber demnächst plötzlich ein umgekehrtes Verhältniss eintritt, indem mit dem ferneren Wachsen der Ordinaten eine Abnahme der Abscissen erfolgt. Während nämlich die Ordinaten $-y$ von 0 bis $a.0{,}5$ wachsen, wachsen auch die Abscissen $\pm x$ von 0 bis $a.0{,}23$; dagegen gehören zu der Ordinate $-y = a.0{,}8$ die Abscissen $\pm x = a.0{,}22$ u. s. w.; es erreichen also die Zweige TMA und $TM'A$ zwischen den Ordinaten $a.0{,}5$ und $a.0{,}8$ den grössten Abstand von der Ordinaten-Achse, oder diejenigen Punkte, von wo ab die Kurven sich der Ordinaten-Achse wieder zuwenden. Um diese Punkte genau zu bestimmen, suche man für die Gleichung (24)

$$x = 2\sqrt{a^2 - y^2} - \sqrt{4a^2 - 3ay - y^2}$$

den Werth von y, welcher x zu einem Maximum macht. Man findet $y = a.0{,}633\ldots.$ und $x = a.0{,}2443\ldots.$; die Koordinaten der Wendepunkte der Zweige TMA und $TM'A$ sind also $-y = a.0{,}633$ und $\pm x = a.0{,}2443$.

Die gesuchte Gleichung für die Kurve (25) ist abweichend von der gewöhnlichen Form nicht für die Ordinaten $\pm y$, sondern für die Abscissen $\pm x$ bestimmt worden, um höhere Gleichungen zu vermeiden. Legt man indess hierauf kein Gewicht, dann kann man selbstredend zu jeder gegebenen Abscisse $\pm x$ die zugehörige Ordinate finden, wenn man (25) nach y auflöst, wie folgendes Beispiel zeigt. Gesetzt es soll die zu $\pm x = 4a$ gehörge Ordinate, also SH (Taf. I. Fig. 1.) bestimmt werden, so hat man zunächst

$$4a = 2\sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{4a^2 + 3ay - y^2},$$

und wenn man die Wurzeln wegschafft,

$$9y^4 + 18ay^3 + 169a^2y^2 - 96a^3y = 0,$$

woraus folgt: $y = 0,$

und zugleich die kubische Gleichung:

$$9y^3 + 18ay^2 + 169a^2y - 96a^3 = 0.$$

Diese giebt annähernd $y = a.0{,}5301\ldots.$ und man hat daher:

zu $\pm x = 4a$ gehört die Ordinate $+y = 0$, und

die Ordinate $+y = a.0{,}5301\ldots. = SH = SH'$.

II. Aufgabe.

Behält man die gegebenen Stücke wie in der I. Aufgabe bei, und setzt dagegen fest, dass die Bewegung der AB (Taf. I. Fig. 4.) dergestalt erfolge, dass der eine Endpunkt B auf dem Umfang des gegebenen Kreises, der andere Endpunkt A gleichzeitig in der Linie CH fortrückt, alsdann beschreibt der Mittelpunkt O durch jene Bewegung der AB eine Kurve, deren Gleichung gesucht wird.

Auflösung.

Beginnt die Bewegung der AB so, dass der Punkt B auf dem Bogen BD, der Punkt A also aufwärts in AH fortrückt, dann gelangt, wenn B nach D gekommen, A nach H und O nach Q, wo $DQ = QH = a$ ist, und der Mittelpunkt O hat während dieser Bewegung den Zweig OYX beschrieben. Rückt B auf dem Bogen DJ weiter, so geht gleichzeitig A von H auf der AH wieder zurück, und wenn B nach J gekommen, fällt A in seine ursprüngliche Lage, und der Mittelpunkt hat den Zweig $QY'O'$ beschrieben. Der Punkt B kann jetzt, weil A in CH bleiben muss, dem Umfang des Kreises nicht weiter abwärts folgen; er muss vielmehr den bis jetzt zurückgelegten Weg auf dem Bogen JDB abermals durchlaufen, während A in der Richtung von A nach C fortrückt. Kommt B zum zweitenmal nach D, dann hat der Mittelpunkt O den Zweig $O'K'A$, und wenn B wieder in seine anfängliche Lage zurückkehrt, den Zweig AKO beschrieben.

Aus dieser Art der Entstehung der Kurve, deren Gleichung wir suchen, geht hervor, dass die Zweige OYQ und $Q'Y'O'$, und auch die Zweige $O'K'A$ und AKO einander gleich sind, weshalb wir hier ganz wie bei der I. Aufgabe verfahren und zunächst die Gleichungen für jeden der Zweige OYQ und AKO bestimmen, wobei wir JB und CH als Koordinaten-Achsen und A als den Anfangspunkt annehmen.

1. Gleichung für den Zweig OYQ.

Ist der Punkt Y der Kurve entstanden, indem AB in die Lage FE gekommen, dann ist $FY = YE = a$, und wenn man von Y die Senkrechte YX auf AB fällt, so hat man $AX = x$ als Abscisse, $XY = y$ als Ordinate von Y. Man ziehe $YG \# AB$, setze $AF = u$, dadurch wird $FG = u - y$ und das rechtwinklige ΔFGY giebt:

$$(u - y)^2 = a^2 - x^2,$$

also:

$$y = u \mp \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Da aber $y \leqq u$ sein muss, so kann vor der Wurzel nur das Zeichen $-$ gelten; man hat daher:

$$y = u - \sqrt{a^2 - x^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Verbindet man E mit D und C und setzt $\angle AFE = \varphi$, $\angle ACE = \psi$, $CD = CE = r$, dann ist im $\Delta\, CDE$, weil $\angle CDE = 90^0 - \frac{1}{2}\psi$:

$$DE : r = \sin\psi : \cos\tfrac{1}{2}\psi, \text{ also } DE = \frac{r\sin\psi}{\cos\frac{1}{2}\psi},$$

und im $\Delta\, DEF$, wo $\angle FDE = 90^0 + \frac{1}{2}\psi$:

$$DE : 2a = \sin\varphi : \cos\tfrac{1}{2}\psi, \text{ also } DE = \frac{2a\sin\varphi}{\cos\frac{1}{2}\psi}.$$

Die beiden Werthe von DE gleich gesetzt, giebt:

$$r\sin\psi = 2a\sin\varphi,$$

oder, indem man $r = \frac{5}{2}a$ einführt:

$$\sin\psi = \tfrac{4}{5}\sin\varphi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Ferner folgt aus $\Delta\, CEF$:

$$CF : 2a = \sin(\varphi + \psi) : \sin\psi, \text{ also } CF = \frac{2a\sin(\varphi+\psi)}{\sin\psi},$$

und da auch $CF = CA + AF = \frac{3}{2}a + u$, so ist:

$$\tfrac{3}{2}a + u = \frac{2a\sin(\varphi+\psi)}{\sin\psi}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Mittels der Gleichungen (2) und (3) lässt sich nun u durch x und a ausdrücken; denn indem man in (3) $\sin(\varphi + \psi)$ auflöst, erhält man:

$$u = -\tfrac{3}{2}a + 2a\sin\varphi\,\text{cotg}\,\psi + 2a\cos\varphi \quad \ldots\ldots (4)$$

und da aus (2), weil $\psi < 90^0$,

$$\cos\psi = +\sqrt{1 - \tfrac{16}{25}\sin^2\varphi} = \tfrac{1}{5}\sqrt{25 - 16\sin^2\varphi},$$

mithin $\text{cotg}\,\psi = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{\sqrt{25 - 16\sin^2\varphi}}{4\sin\varphi}$, so ist, wenn man diesen Werth von $\text{cotg}\,\psi$ in (4) substituirt,

$$u = -\tfrac{3}{2}a + \frac{a}{2}\sqrt{25 - 16\sin^2\varphi} + 2a\cos\varphi,$$

und wenn man hierin $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ aus ΔFGY, nämlich:

$\sin\varphi = \frac{x}{a}$ und $\cos\varphi = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ setzt, dann erhält man:

$$u = -\tfrac{3}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{25a^2-16x^2} + 2\sqrt{a^2-x^2}. \quad . \; . \; . \; (5)$$

Substituirt man (6) in (1), so ist

$$y = -\tfrac{3}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{25a^2-16x^2} + \sqrt{a^2-x^2} \quad . \; . \; . \; (6)$$

die gesuchte Gleichung für den Zweig *OYQ*.

2. Gleichung für den Zweig *AKO*.

Sei Y (Taf. I. Fig. 5.) ein Punkt der Kurve, dadurch entstanden, dass die beschreibende Linie bei ihrer Bewegung aus DQ' in die Lage FYE gekommen, dass also $FY = YE = a$, so ist $AX = x$ die Abscisse, $XY = y$ die Ordinate des Punktes Y. Zieht man aus Y die $YG \# AB$, verbindet E mit D und C und setzt $AF = u$, also $AG = u - y$, und $\angle DFE = \varphi$, $\angle DCE = \psi$, dann findet man, bei gleichem Verfahren wie oben unter 1., aus ΔFGY:

$$y = u - \sqrt{a^2-x^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

aus ΔDCE und ΔDEF:

$$\sin\psi = \tfrac{4}{5}\sin\varphi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

aus ΔCEF:

$$CF = \frac{2a\sin(\varphi-\psi)}{\sin\psi},$$

und weil $CF = CA - AF = \frac{3}{2}a - u$, so ist:

$$\tfrac{3}{2}a - u = \frac{2a\sin(\varphi-\psi)}{\sin\psi}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Die Gleichungen (7) und (8) sind übereinstimmend mit (1) und (2); nur (9) weicht hinsichtlich der Zeichen von (3) ab. Behandelt man (9) wie (3), so erhält man:

$$u = \tfrac{3}{2}a - 2a\sin\varphi \operatorname{cotg}\psi + 2a\cos\varphi,$$

oder:

$$u = \tfrac{3}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{25a^2-16x^2} + 2\sqrt{a^2-x^2}, \quad . \; . \; . \; (10)$$

so dass, wenn man (10) in (7) substituirt:

$$y = \tfrac{3}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{25a^2-16x^2} + \sqrt{a^2-x^2} \quad . \; . \; . \; . \; (11)$$

die verlangte Gleichung für den Zweig *AKO* ist.

Vergleichen wir die für die Zweige OYQ und AKO erhaltenen Gleichungen, nämlich:

(6) $$y = -\tfrac{3}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{25a^2 - 16x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}$$

und (11) $$y = +\tfrac{3}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{25a^2 - 16x^2} + \sqrt{a^2 - x^2},$$

so unterscheiden sich dieselben nur dadurch, dass die beiden ersten Glieder rechter Seits entgegengesetzte Vorzeichen haben. Erwägt man aber, dass man die unterhalb der Abscissen-Achse liegenden Ordinaten, im Gegensatz zu den oberhalb liegenden, durch negative Zahlen ausdrückt, dass mithin die zweite der obigen Gleichungen gemeinhin in der Form

$$-y = -\tfrac{3}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{25a^2 - 16x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

gewünscht wird, dann sind die Gleichungen für die oberhalb und unterhalb der Abscissen-Achse liegenden Zweige der Kurve nur in den Zeichen vor dem Gliede $\sqrt{a^2 - x^2}$ von einander verschieden, und da sich die Gleichungen auch nicht ändern, man mag x positiv oder negativ nehmen, so erhält man als allgemeine Gleichung für die gegebene Kurve:

$$\pm y = \pm\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{25a^2 - 16x^2} - \tfrac{3}{2}a, \quad . \ . \ . \ (12)$$

welche man, der bequemeren Rechnung wegen, auch so schreiben kann:

$$\pm y = \pm\sqrt{(a+x)(a-x)} + 0{,}5\sqrt{(5a+4x)(5a-4x)} - 1{,}5a.$$

Die Gleichung (12) zeigt, dass, wenn $x > 0$ und $x < a$ ist, zu gleichen entgegengesetzten Abscissen $\pm x$ gleiche Ordinaten gehören, so dass die beiden positiven Ordinaten, welche zu $\pm x$ gehören, unter sich, und die beiden negativen Ordinaten, welche zu $\pm x$ gehören, ebenfalls unter sich gleich sind. Die Kurve besteht daher, wie wir bereits aus der Art der Entstehung schlossen, aus zwei völlig gleichen Zweigen, in welche sie durch die Ordinaten-Achse getheilt wird.

Um die Gestalt der Kurve und ihrer Zweige näher kennen zu lernen, folgt hier die Berechnung einiger Punkte derselben.

Man findet aus Gleichung (12):

Für $\pm x = 0$,	$+y = 2a$	und $-y = 0$
„ $\pm x = a.0{,}1$,	$+y = a.1{,}986$	„ $-y = a.0{,}003$
„ $\pm x = a.0{,}2$,	$+y = a.1{,}947$	„ $-y = a.0{,}089$

Für $\pm x = a . 0,25$,	$+y = a . 1,918$	und	$-y = a . 0,019$
„ $\pm x = a . 0,5$,	$+y = a . 1,657$	„	$-y = a . 0,075$
„ $\pm x = a . 0,75$,	$+y = a . 1,161$	„	$-y = a . 0,161$
„ $\pm x = a . 0,8$,	$+y = a . 1,021$	„	$-y = a . 0,179$
„ $\pm x = a . 0,80691$,	$+y = a . 1,000$	„	$-y = a . 0,181$
„ $\pm x = a . 0,9$,	$+y = a . 0,671$	„	$-y = a . 0,20099$
„ $\pm x = a . 0,95$,	$+y = a . 0,437$	„	$-y = a . 0,187$
„ $\pm x = a . 0,99$,	$+y = a . 0,167$	„	$-y = a . 0,115$
„ $\pm x = a . 1,00$,	$+y = . 0$	„	$-y = 0$.

Man ersieht hieraus, dass die gegebene Kurve (Taf. I. Fig. 4.) durch den Anfangspunkt A der Koordinaten geht, die Achse der $+y$ in Q so schneidet, dass $AQ = 2a$, und die Achse der x in O und O' so, dass $+x = AO = a$ und $-x = AO' = a$ ist.

Ferner folgt, dass mit dem Wachsen der Abscissen $\pm x$ von 0 bis a die positiven Ordinaten $+y$ von $2a$ bis 0 abnehmen, während umgekehrt die negativen Ordinaten $-y$ zuerst mit den Abscissen von 0 an wachsen, demnächst aber schnell wieder bis 0 fallen.

Die Abnahme der positiven Ordinaten $+y$ erfolgt Anfangs sehr allmählig und beträgt von $x = 0$ bis $\pm x = \frac{1}{4}a$ noch nicht $\frac{1}{10}a$. Von hier an geht die Abnahme schneller vor sich, indem sie schon bei $\pm x = \frac{1}{2}a$ etwas mehr als $\frac{1}{3}a$, bei $\pm x = a . 0,80691$ genau $= a$ beträgt. Je mehr sich die Abscissen dem Werthe a nähern, desto schneller erfolgt die Abnahme der Ordinaten, weshalb der oberhalb der Abscissen-Achse liegende Zweig der Kurve in seinem letzten Theil sehr steil zu dieser Achse abfällt.

Die negativen Ordinaten $-y$ wachsen von 0 anfangend äusserst langsam, da ihre Grösse für $\pm x$ noch nicht $\frac{2}{10}a$ beträgt. Zwischen $\pm x = 0,9 . a$ und $\pm x = 0,95 . a$ erreichen sie ihr Maximum; denn für die letztere Abscisse ist die Ordinate wieder auf $0,187 . a$ gefallen und die weitere Abnahme erfolgt schnell von $0,187 . a$ bis 0. Um eine genaue Vorstellung von der Gestalt des unterhalb der Abscissen-Achse liegenden Zweiges der Kurve zu erhalten, muss man die Punkte bestimmen, wo die negativen Abscissen ihr Maximum erreichen. Zu dem Ende ist zu ermitteln, welcher Werth von x die Gleichung (11):

$$y = \tfrac{3}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{25a^2 - 16x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}$$

zu einem Maximum für y macht. Man findet als solchen Werth

$x = \frac{a}{4}\sqrt{13} = a.0{,}90138\ldots$, und wenn man diesen in die Gleichung setzt: $y = a.0{,}20101\ldots$ Die negativen Ordinaten sind mithin in den Punkten am grössesten, welche die Koordinaten $\pm x = a.0{,}90138$ und $-y = a.0{,}20101$ haben.

Demnach läuft der Zweig der unterhalb der Abscissen-Achse liegenden Kurve von A (Taf. I. Fig. 4.) aus rechts und links zunächst in einem sehr geringen und ganz allmählig zunehmenden Abstand längs dieser Achse hin, erreicht in der Entfernung von $\pm x = \frac{9}{10}a$ seinen grössten Abstand $-y = \frac{2}{10}a$ von der Achse und fällt dann steil gegen dieselbe ab.

VII.

Ueber eine geometrische Aufgabe.

Von

Herrn Oberst *von Dewall,*

zweitem Bevollmächtigten bei der Bundes-Militair-Commission in Frankfurt a. M.

In den von Joh. Rogner bearbeiteten „Materialien zum Gebrauch bei und nach dem Unterricht in der höheren Analysis, Gratz 1853" findet sich Seite 55 unter Nr. 657 die folgende

Aufgabe.

„In dem Durchmesser AB eines Halbkreises (Taf. II. Fig. 1.), dessen Mittelpunkt C ist, ist ein Punkt P gegeben; man soll in AB, zwischen A und P, einen solchen Punkt Q bestimmen, dass, wenn man von Q aus mit QP in der Fläche des gegebenen Halbkreises einen neuen Halbkreis beschreibt und an diesen von A aus eine Tangente AH zieht, das Segment GH derselben, welches zwischen

dem Berührungspunkt G und dem Umfang des gegebenen Halbkreises liegt, gleich dem Segment PB ist."

Die algebraische Auflösung dieser Aufgabe ist Seite 305. l. c. angegeben; da indess die geometrische Auflösung ebenfalls nicht ohne Interesse ist, so geben wir dieselbe im Nachstehenden, indem wir ihr zugleich die erstere des Vergleichs wegen und unter Beifügung einiger Bemerkungen folgen lassen.

I. Geometrische Auflösung.

Errichte in den gegebenen Punkten C und P die Senkrechten CO und PD auf AB, ziehe aus O die $OE \# AB$, beschreibe aus O mit OE einen Kreis, ziehe an diesen von A aus die Tangente AF und verlängere sie, bis sie die Senkrechte PD in D schneidet. Verbindet man nun D mit O und verlängert DO, so schneidet die Verlängerung die AB in dem gesuchten Punkt Q.

Beweis. Beschreibt man aus Q mit QP in der Fläche des gegebenen Halbkreises den Halbkreis SGP, so muss bewiesen werden, dass derselbe die AD in der von der Aufgabe verlangten Art berührt. Zu dem Ende fälle man von Q auf AD die Senkrechte QG und verbinde den Berührungspunkt F der Tangente AF mit dem Mittelpunkt O; alsdann ist in den Dreiecken OFD und OED: $OF = OE$, $OD = OD$ und $\angle OFD = \angle OED = 90^0$. mithin $\Delta OFD \cong \Delta OED$ und daher $\angle ODF = \angle ODE$, d. h. DQ halbirt den $\angle ADP$. Dies führt in Verbindung mit $\angle QGD = \angle QPD = 90^0$ und $DQ = DQ$ auf $\Delta QGD \cong \Delta QPD$, woraus folgt $QG = QP$, und deshalb geht der aus Q mit QP beschriebene Halbkreis durch den Punkt G, folglich ist GH, mithin auch AH eine Tangente an diesen Kreis.

Um nun, wie ferner erforderlich ist, den Nachweis zu führen, dass $GH = PB$, so verbinde man B mit dem Punkt H, wo AD den Umfang des gegebenen Halbkreises schneidet, mache $PK = PB$ und ziehe JK, dann berührt JK den um O beschriebenen Kreis. Denn, angenommen es berühre JK (Taf. II. Fig. 2.) den Kreis nicht, so muss sie entweder ganz ausserhalb desselben liegen, oder sie muss ihn schneiden. Gesetzt JK läge ausserhalb des Kreises, dann ziehe man aus L, wo der Kreis um O die OC trifft, $LM \# AB \# OE$, so ist $EM = OL = OE$; da aber $PE = CO = CB$ und nach der Konstruktion $PK = PB$ ist, so folgt: $PE - PK = CB - PB$, d. i. $EK = CP = OE = EM$, was nicht möglich ist. Daher hann JK nicht ausserhalb des Kreises um O liegen. Ebenso zeigt man, dass JK den Kreis nicht wie

JK' schneiden kann, mithin bleibt nur übrig, dass JK den Kreis berührt, also mit LM zusammen fällt und zugleich senkrecht auf DP (Taf. II. Fig. 1.) steht.

Man hat nun $\angle AHB = 90^0$, als Winkel im Halbkreis, mithin auch $\angle JHD = \angle JKD$, und weil, wie oben gezeigt, $\angle JDH = \angle JDK$ und $JD = JD$, so ist:

$\Delta JHD \cong \Delta JKD$, also . . . . 1., $HD = KD$.
Wir fanden oben $\Delta QGD \cong \Delta QPD$, daher ist . 2., $GD = PD$
und $\Delta OFD \cong \Delta OED$, „ „ . 3., $FD = ED$.
Aus 2. u. 3. ergiebt sich: $GD - FD = PD - ED$, d. i. 4., $GF = PE$
„ 1. „ 3. „ „ $HD - FD = KD - ED$, „ „ 5., $HF = KE$,
„ 4. „ 5. „ „ $GF - HF = PE - KE$, „ „ 6., $GH = PK$;

da aber $PK = PB$ gemacht worden, so folgt, dass auch $GH = PB$, d. h. dass die Tangente AH die von der Aufgabe geforderte Eigenschaft hat.

Anmerkung 1. Aus der vorstehenden Auflösung geht hervor, dass sich der gesuchte Punkt Q nur dann bestimmen lässt, wenn sich die beiden Linien AD und PD (Taf. II. Fig. 1.) schneiden, d. h. also, wenn $\angle BAD$ spitz ist. Es wird aber $\angle BAD = 90^0$, mithin $AD \# PD$, und also Q unbestimmbar, wenn der Halbmesser des Kreises um O gleich ist dem Halbmesser des gegebenen Halbkreises, oder, was dasselbe ist, wenn der Punkt P in B, dem Endpunkt des Durchmessers AB liegt. Demnach ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich, wenn P in einem der Endpunkte des Durchmessers AB gegeben ist.

Anmerkung 2. Liegt P in dem Mittelpunkt des Durchmessers, fällt also P mit C zusammen (Taf. II. Fig. 3.), so verschwindet der Halbmesser des Kreises um O, mithin der Kreis selbst, und die Tangente, welche wir von A aus an den Kreis um O zogen, wird jetzt die Linie AO. Daher bestimmt sich in diesem Fall der gesuchte Punkt Q durch Halbirung des $\angle AOP$ mittels der OQ; denn beschreibt man aus Q mit QP einen Halbkreis und fällt von Q die Senkrechte QG auf AO, so geht aus der Kongruenz der Dreiecke QGO und QPO sofort hervor: $QG = QP$ und $GO = OP = PB$, d. h. AO ist Tangente an den Kreis um Q und das Segment GO hat die geforderte Grösse.

Anmerkung 3. Liegt der Punkt P zwischen C und A (Taf. II. Fig. 4.), oder mit anderen Worten, soll das Segment der zu ziehenden Tangente grösser als der Halbmesser des gegebenen Halb-

kreises werden, so konstruirt man ganz ebenso, wie oben angegeben; nur muss man in diesem Fall diejenige der beiden Tangenten, welche sich von A aus an den Kreis um O ziehen lassen, wählen, die zwischen diesem Kreise und dem Durchmesser AB liegt, wie aus Taf. II. Fig. 4. näher zu ersehen ist.

Vergleicht man die Figuren Taf. II. 1, 3 und 4, so ergiebt sich, dass, wenn P zwischen B und C liegt, die äussere der beiden von A an den Kreis um O gehenden Tangenten, wenn dagegen P zwischen C und A liegt, die innere der beiden Tangenten zur weiteren Ausführung der Konstruktion genommen werden muss; während, wenn P in C liegt, die Stelle der Tangente durch AO (Taf. II. Fig. 3.) vertreten wird.

Anmerkung 4. Da nun aus den vorstehenden Erörterungen hervorgeht, dass die Konstruction allemal ausführbar ist, wo auch P zwischen A und B liegen mag, so ist man mit Bezug auf Anmerkung 1. zu dem Schlusse berechtigt, dass die Auflösung unserer Aufgabe nur in dem Einen Fall unmöglich ist, wenn P in einem der Endpunkte des Durchmessers liegt. Es liess sich dies Resultat auch schon aus dem Grunde erwarten, weil die von A aus zu ziehende Tangente zugleich Sehne des gegebenen Halbkreises sein muss, und daher ein Segment derselben nicht gleich dem Durchmesser dieses Halbkreises sein kann.

Anmerkung 5. Fällt man (Taf. II. Fig. 1.) von O auf HB die Senkrechte OR, so ergiebt sich aus der Kongruenz der Dreiecke OLJ und ORJ noch $OR = OL$, d. h. die Linie BH berührt den Kreis um O. Man kann daher folgenden Lehrsatz hinstellen:

> „Errichtet man in dem Mittelpunkte C eines Kreises auf einem Durchmesser einen senkrechten Halbmesser CO, beschreibt aus O mit einem beliebigen Halbmesser $OL < CO$ einen Kreis, zieht von dem einen Endpunkt A des Durchmessers AB eine Tangente AF an diesen Kreis und verbindet den Punkt H, wo die Tangente den Umfang des gegebenen Kreises schneidet, mit dem anderen Endpunkt B des Durchmessers, so ist auch diese Verbindungslinie BH eine Tangente an den um O beschriebenen Kreis."

II. Algebraische Auflösung.

Gesetzt es sei (Taf. II. Fig. 5.) P der gegebene Punkt in dem Durchmesser AB des gegebenen Halbkreises AHB, Q sei der gesuchte Mittelpunkt des Halbkreises SGP, an welchen letzteren

6*

eine Tangente AGH so gezogen worden, dass $GH = PB$. Verbindet man Q mit dem Berührungspunkt G und H mit B, und setzt, da die Auflösung der Aufgabe lediglich davon abhängt, QP zu bestimmen, $QP = QG = x$, während man die gegebenen Stücke $PB = GH = a$ und $PA = b$ annimmt, auch noch die Hülfsgrösse $AG = y$ einführt; so kommt es nun nur auf die Bildung zweier von einander unabhängiger Gleichungen zwischen x, y, a und b und demnächst auf die Entwickelung des Werthes von x an. Diese Gleichungen ergeben sich, wie folgt:

Da AG den Kreis SGP berührt, so ist $AP : AG = AG : AS$ und, weil $QG \# HB$, so hat man . . . . . $AG : GH = AQ : QB$.

Setzt man für die Glieder dieser Gleichungen die Werthe, nämlich:

$$AS = AP - PS = b - 2x,\quad AQ = AP - PQ = b - x$$
$$\text{und } QB = BP + QP = a + x,$$

dann ist:

(1) . . . . $b : y = y : b - 2x$,

(2) . . . . $y : a = b - x : a + x$.

Den Werth von y aus (2) in (1) substituirt und die dadurch entstehende Gleichung geordnet, giebt:

$$(3) \quad x^2 + \frac{a^2 + 4ab - b^2}{2b}\,x = ab,$$

und hieraus erhält man:

$$(4) \quad x = -\frac{a^2 + 4ab - b^2}{4b} \pm \sqrt{ab + \left(\frac{a^2 + 4ab - b^2}{4b}\right)^2}.$$

Soll x eine geometrische Bedeutung haben, so muss der aus Gleichung (4) resultirende Zahlenwerth positiv und reell sein; deshalb kann vor der Wurzelgrösse das Zeichen — nicht gelten, und es ist mithin:

$$(5) \quad x = -\frac{a^2 + 4ab - b^2}{4b} + \sqrt{ab + \left(\frac{a^2 + 4ab - b^2}{4b}\right)^2},$$

welcher Werth von x aus dem Grunde stets positiv ist, weil

$$\sqrt{ab + \left(\frac{a^2 + 4ab - b^2}{4b}\right)^2} > \frac{a^2 + 4ab - b^2}{4b}.$$

Anmerkung 1. Da a und b nach dem Sinn der Aufgabe reelle Zahlen bedeuten, auch in Gleichung (5) unter dem Wurzelzeichen keine Differenz vorkommt, so kann x nicht imaginär wer-

den. Deshalb, und weil, wie eben bemerkt, x immer positiv ist, so erkennt man die Unmöglichkeit der Auflösung unsrer Aufgabe daran: wenn sich aus Gleichung (5) solche Werthe für x ergeben, welche zu keinem geometrischen Resultat führen. Ein derartiger Werth ist z. B. $x=0$; denn es bedeutet $x=0$ offenbar, dass sich der gesuchte Halbkreis, mithin auch die gesuchte Tangente an denselben nicht darstellen lässt. Um nun zu ermitteln, ob wirklich solche Werthe für a und b existiren, welche, wenn sie, in (5) gesetzt, $x=0$ geben, setze man:

$$0=-\frac{a^2+4ab-b^2}{4b}+\sqrt{ab+\left(\frac{a^2+4ab-b^2}{4b}\right)^2},$$

woraus folgt: $0=ab$.

Dieser letzten Gleichung aber wird genügt, wenn einer der beiden Faktoren a oder $b=0$ ist; da aber nach der Bedeutung, welche b in der Aufgabe hat, dies nicht $=0$ angenommen werden darf, so bleibt nur:

$$a=0,$$

d. h., wenn man in Gleichung (5) setzt: $a=0$, so erhält man:

$$x=0,$$

und da $a=0$ nichts Anderes bedeutet, als dass (Taf. II. Fig. 5.) Punkt P in B, dem Endpunkt des Durchmessers AB, liegt, so folgt in Uebereinstimmung mit dem oben unter I. Anmerkung 1. erhaltenen Resultat, dass auch die algebraische Auflösung die Unmöglichkeit für den Fall nachweist, wenn P in einem Endpunkt des Durchmessers gegeben ist.

Substituirt man $a=0$ in Gleichung (4), dann folgt:

$$x=\frac{b}{4}\pm\frac{b}{4},$$

also, wenn man das Zeichen — gelten lässt, $x=0$, wie zuvor, während für das Zeichen + sich

$$x=\frac{b}{2}$$

ergiebt. Dieser letztere Werth für x zeigt indess ebenso wie $x=0$, die Unmöglichkeit der Auflösung: denn für $a=0$ ist b der Durchmesser, also $x=\frac{b}{2}$ der Halbmesser des gegebenen Halbkreises, d. h. der gesuchte Halbkreis fällt mit dem gegebenen zusammen, die Konstruktion führt daher zu keinem Resultat.

Anmerkung 2. Ist $a=b$, liegt also P in dem Mittelpunkt des Durchmessers AB (Taf. II. Fig. 3.), dann geht Gleichung (5) über in:

$$x=-b+\sqrt{2b^2}=b(-1+\sqrt{2}).$$

Will man diese Gleichung geometrisch konstruiren, so errichtet man auf AB in P den Halbmesser $PO=b$ senkrecht, verbindet A mit O, dann ist $AO=\sqrt{2b^2}$; trägt man nun von O aus auf AO die $OG=b$ ab, so erhält man $AG=x=-b+\sqrt{2b^2}$. Vergleicht man hiermit das unter I. Anmerkung 2. angegebene Verfahren, so überzeugt man sich von der Uebereinstimmung beider; denn dass das hier gefundene AG mit dem dort gefundenen $GQ=QP$ identisch ist, folgt einfach daraus, dass, weil $\angle GAQ=45^0$ und $\angle AGQ=90^0$, auch $\angle AQG=45^0=\angle GAQ$ sein muss.

Anmerkung 3. Setzt man den Durchmesser des gegebenen Halbkreises $a+b=d$, so kann jede beliebige Entfernung a des Punktes P von einem Endpunkt B des Durchmessers durch $a=\frac{d}{n}$ ausgedrückt werden, wenn man sich unter n nur jede beliebige positive Zahl >1 und ungleich d denkt. Für

$$a=\frac{d}{n}$$

folgt aber:

$$b=d-\frac{d}{n}=\frac{d}{n}(n-1),$$

und wenn man diese Werthe für a und b in Gleichung (5) substituirt, so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$(6) \ldots x=\frac{d}{n}\left[\frac{n^2-6n+4}{4(n-1)}+\sqrt{(n-1)+\left[\frac{n^2-6n+4}{4(n-1)}\right]^2}\,\right].$$

Diese Gleichung wird für x immer geometrisch brauchbare Werthe liefern, wenn sich nachweisen lässt, dass aus ihr

$$a+2x<d$$

folgt; denn dies ist (Taf. II. Fig. 5.) ein Zeichen, dass der mit x beschriebene Halbkreis innerhalb der Fläche des gegebenen Halbkreises liegt, und dass man daher die verlangte Tangente an ihn ziehen kann.

Prüfen wir nun, ob wirklich $a+2x<d$, indem wir $a=\frac{d}{n}$ und

für x den Gleichung (6) gefundenen Werth setzen, und zu dem Ende die Ungleichheit

$$\frac{d}{n}+\frac{2d}{n}\left[\frac{n^2-6n+4}{4(n-1)}+\sqrt{(n-1)+\left[\frac{n^2-6n+4}{4(n-1)}\right]^2}\right]<d$$

vorläufig als bestehend annehmen; dann folgt hieraus, wenn wir Alles mit $\frac{n}{d}$ multipliziren:

$$1+\frac{n^2-6n+4}{2(n-1)}+\sqrt{4(n-1)+\left[\frac{n^2-6n+4}{2(n-1)}\right]^2}<n$$

oder

$$\sqrt{4(n-1)+\left[\frac{n^2-6n+4}{2(n-1)}\right]^2}<(n-1)-\frac{n^2-6n+4}{2(n-1)},$$

d. i.

$$4(n-1)<(n-1)^2-(n^2-6n+4),$$

oder $$0<1.$$

Da uns somit die Annahme: die obige Ungleichheit finde statt, auf ein Resultat $0<1$, dessen Richtung keinem Zweifel unterliegt, geführt hat, so folgt hieraus die Richtigkeit jener Annahme, nämlich es ist immer

$$a+2x<d$$

unter der Voraussetzung, dass $a=\frac{d}{n}$ und $n>1$ ist.

Und erst jetzt sind wir berechtigt, ganz allgemein auszusprechen, dass aus Gleichung (5) die Möglichkeit der Auflösung unserer Aufgabe hervorgeht, welche Lage der Punkt P zwischen A und B in AB auch haben möge.

Das Resultat der algebraischen Auflösung stimmt demnach völlig überein mit demjenigen, welches die geometrische Auflösung ergab. (Vergl. I. Anmerkung 4).

Anmerkung 4. Die Gleichung (5) bietet auch noch die Mittel dar, spezielle Fragen, zu welchen die Aufgabe Veranlassung geben kann, zu beantworten, wie folgende Beispiele zeigen:

1. Soll ermittelt werden, welche Lage der Punkt P haben muss, damit der Halbmesser $x=PQ$ des zu beschreibenden Halbkreises ein bestimmtes Verhältniss zu der Tangente GH, also auch zu dem Segment $PB=GH=a$ erhalte, oder dass $x=ma$ werde,

wo m jede beliebige positive Zahl >0 bedeutet, so giebt Gleichung (5):

$$ma = -\frac{a^2+4ab-b^2}{4b} + \sqrt{ab + \left(\frac{a^2+4ab-b^2}{4b}\right)^2}.$$

Nimmt man hierzu noch die Gleichung für den Durchmesser AB:

$$a+b=d,$$

dann erhält man aus diesen beiden Gleichungen, wenn man sie nach b auflöset:

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad b = \frac{d}{2(m+1)} \cdot \left[m + \sqrt{m(m+2)}\right],$$

wodurch b, also auch Punkt P völlig bestimmt ist. Denn Gleichung (7) liefert immer einen Zahlenwerth für b, welcher eine geometrische Bedeutung hat, da, wegen der Voraussetzung $m>0$ und positiv, b weder imaginär noch negativ, und wegen $2(m+1) > m+\sqrt{m(m+2)}$ weder gleich, noch grösser als d werden kann.

Hiernach ist man im Stande, unsere Aufgabe auch dann zu lösen, wenn der Punkt P nicht unmittelbar gegeben, sondern statt dessen das Verhältniss des gesuchten Halbkreises zu der Tangente bestimmt ist.

Verlangt man z. B. $x=a$, dann ist in Gleichung (7) zu setzen $m=1$, und man erhält:

$$b = \frac{d}{4}(1+\sqrt{3}),$$

was Behufs der geometrischen Konstruktion besser in

$$b = \frac{d}{4} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{4}\right)^2}$$

umgewandelt wird.

Beschreibt man (Taf. II. Fig. 6.) über dem Halbmesser $AC = \frac{d}{2}$ des gegebenen Halbkreises einen Halbkreis, trägt in diesen von C aus $CV = \frac{d}{4}$ als Sehne ein, zieht AV, dann ist:

$$AV = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{4}\right)^2}.$$

Verlängert man daher AV um $VW = CV = \frac{d}{4}$, dann ist:

$$AW = \frac{d}{4} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{4}\right)^2} = \frac{d}{4}(1+\sqrt{3}) = b,$$

und man findet Punkt P, wenn man von A aus $AW = AP$ auf AB abträgt. Die weitere Konstruktion zur Bestimmung des Punktes Q erfolgt nun wie oben unter I. gezeigt worden ist, oder einfacher, indem man $QP = PB$ macht, und es muss, nachdem man aus Q mit QP den Halbkreis beschrieben und an diesen von A aus die Tangente AH gezogen hat, das Segment $GH = PQ = PB$ sein.

2. Wäre die Frage zu beantworten, wie die Lage des Punktes P (Taf. II. Fig. 1.) beschaffen sein muss, damit der Halbmesser $QP = x$ des gesuchten Halbkreises gleich PT, der mittleren Proportionale zwischen $PB = a$ und $PA = b$, oder damit $x = \sqrt{ab}$ werde? — so zeigt Gleichung (5) sogleich, dass dann sein müsste:

$$a^2 + 4ab - b^2 = 0.$$

Nimmt man hierzu:

$$a + b = d,$$

und löset nach b auf, dann findet man:

$$b = \frac{d}{4}(1 + \sqrt{5}),$$

welches, wenn man b geometrisch konstruiren will, in:

$$b = \frac{d}{4} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2}$$

umgewandelt werden muss. Die Lage des Punktes P in dem Durchmesser AB ist durch diese Gleichung völlig bestimmt.

VIII.

Ueber einen merkwürdigen Punkt des Dreiecks.

Von

Herrn Oberlehrer *F. J. Harnischmacher*

in Brilon.

Lehrsatz. Die Geraden, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Punkten verbinden, in welchen die gegenüberliegenden Seiten von den zugehörigen äusseren Berührungskreisen tangirt werden, schneiden sich in einem Punkte T, welcher mit dem Schwerpunkte S und dem Centrum O des inneren Berührungskreises in einer geraden Linie liegt, und zwar so, dass $TS = 2SO$ ist.

Beweis. Wenn in dem Dreiecke ABC (Taf. II. Fig. 7.) O und S die in dem Satze angegebene Bedeutung haben, so ziehe man OS und verlängere OS um $ST = 2OS$. Nun wird unser Satz bewiesen sein, wenn man gezeigt hat, dass die durch die Ecken des Dreiecks und den Punkt T gehenden Transversalen die Gegenseiten in den Punkten treffen, in welchen diese Seiten von den gegenüberliegenden äusseren Berührungskreisen tangirt werden.

Man ziehe also eine solche Transversale durch A und T, welche die Seite BC in P trifft. Man findet bekanntlich die Mittelpunkte der Berührungskreise eines Dreiecks, wenn man die Winkel und die Aussenwinkel desselben halbirt. Da nun O der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises ist, so halbiren die Geraden OA, OB, OC die Winkel A, B, C. Halbirt man nun auch die Nebenwinkel von B und C, so schneiden sich die Halbirungslinien auf der AO in einem Punkte O_1, und dieser ist der Mittelpunkt des der Ecke A oder der Seite BC gegenüberliegenden Berührungskreises, wie allgemein bekannt ist. Verbindet man nun O_1 mit P, so ist zu zeigen, dass O_1P auf BC senkrecht steht.

Da OBO_1 und OCO_1 rechte Winkel sind, wie sich aus der Construction der Punkte O und O_1 leicht ergibt, so liegen die Punkte OBO_1C auf einem Kreise, und OO_1 ist ein Durchmesser desselben. Da aber BC eine Sehne dieses Kreises ist, so liegt der Mittelpunkt auch auf der Senkrechten, welche in der Mitte M derselben errichtet ist. Daher ist D der Mittelpunkt dieses Kreises.

Der Winkel ODC ist als Centriwinkel gleich $2OBC = ABa$. Daher ist $DCa \backsim BAa$, also

$$\frac{DC}{Da} = \frac{AB}{Ba} = \frac{AO}{Oa},$$

weil BO den Winkel ABa halbirt; da aber $DC = O_1D$ ist, so haben wir:

$$\frac{O_1D}{Da} = \frac{AO}{Oa}.$$

Ferner liegt der Schwerpunkt S bekanntlich auf der seitenhalbirenden Transversale AM, und zwar so, dass $AS = 2SM$. Da aber auch $ST = 2OS$ sein soll, so ist:

$$\frac{AS}{SM} = \frac{ST}{OS};$$

daher sind die Dreiecke AST und MSO ähnlich, Winkel $SAT = SMO$, also AP parallel OM. Daher $\frac{PM}{Ma} = \frac{AO}{Oa}$. Da aber, wie oben gezeigt wurde, auch

$$\frac{O_1D}{Da} = \frac{AO}{Oa}, \text{ so ist } \frac{PM}{Ma} = \frac{O_1D}{Da},$$

daher O_1P parallel DM. Weil nun der Construction gemäss DM senkrecht auf BC steht, so ist dasselbe mit O_1P der Fall, also O_1P der Radius des Berührungskreises und P der Berührungspunkt.

Dasselbe lässt sich natürlich von den Transversalen BT und CT zeigen, es ist also der aufgestellte Lehrsatz bewiesen.

Zusatz 1. Zieht man von O aus den Berührungsradius ON, so ist

$$\frac{aM}{aN} = \frac{aD}{aO},$$

also auch

$$\frac{aM}{aM+aN} = \frac{aD}{aD+aO}, \text{ oder } \frac{aM}{MN} = \frac{aD}{OD}; \text{ aber auch } \frac{aM}{MP} = \frac{aD}{O_1D}.$$

Weil aber $OD = O_1 D$, so ist $MN = MP$, wie auch sonst bekannt ist. Verlängert man nun den Radius ON, bis er die AP in E schneidet, so folgt aus dem Vorigen, dass $OE = ON$, also E auf der Peripherie des inneren Berührungskreises liegt. Es folgt daraus ferner, dass $PE = 2OM$ ist. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ATS und MOS ergibt sich aber auch, dass $AT = 2OM$ ist. Daher ist $AT = PE$, also auch $AE = TP$, d. h. die oberen Abschnitte der Transversalen, welche die Ecken des Dreiecks mit den Punkten verbinden, in welchen die gegenüberliegenden Seiten von den zugehörigen äusseren Berührungskreisen tangirt werden, werden von dem inneren Berührungskreise in Punkten geschnitten, deren Entfernungen von den entsprechenden Ecken gleich den unteren Abschnitten der Transversalen sind.

Zusatz 2. Wir bezeichnen im Folgenden den Radius des um das Dreieck beschriebenen Kreises mit dem Buchstaben R, die Radien der vier Berührungskreise in der bekannten Weise mit r, r_a, r_b, r_c. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke APO_1 und AEO ergibt sich die Proportion $\frac{AP}{AE} = \frac{PO_1}{EO}$. Weil nun nach Zusatz 1. $AE = PT$ und $EO = ON = r$, aber $PO_1 = r_a$ ist, so haben wir $\frac{AP}{PT} = \frac{r_a}{r}$, d. h.: Jede der genannten Transversalen verhält sich zu ihrem unteren Abschnitte wie der Radius des entsprechenden äusseren Berührungskreises zu dem Radius des inneren Berührungskreises.

Zusatz 3. Bezeichnet man die beiden anderen Transversalen mit BP_1 und CP_2, so ist:

$$\frac{BP_1}{P_1T} = \frac{r_b}{r} \text{ und } \frac{CP_2}{P_2T} = \frac{r_c}{r}, \text{ also } \frac{AP.BP_1.CP_2}{PT.P_1T.P_2T} = \frac{r_a.r_b.r_c}{r^3} = \frac{r.r_a.r_b.r_c}{r^4}.$$

Da aber bekanntlich, wenn man den Umfang des Dreiecks mit $2p$ und seinen Inhalt mit Δ bezeichnet, $r.r_a.r_b.r_c = \Delta^2$ und $rp = \Delta$ ist, so erhält man, wenn man diese Werthe in obige Formel substituirt:

$$\frac{AP.BP_1.CP_2}{PT.P_1T.P_2T} = \frac{p^2}{r^2}.$$

Zusatz 4. Verbindet man (Taf. II. Fig. 8.) den Punkt T mit dem Durchschnittspunkte der Höhenperpendikel, dem sogenannten Höhenpunkte H, ferner mit dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises K, und mit dem des eingeschriebenen Kreises O, so geht, nach dem bekannten Satze von Euler, die Verbindungslinie von H und K durch den Schwerpunkt S und es ist $HS = 2SK$.

Ebenso geht nach unserem Lehrsatze TO durch S und es ist $TS = 2SO$. Daher sind die Dreiecke THS und OKS einander ähnlich, und es ist TH parallel KO und $TH = 2KO$. Also die Linie, welche den Punkt T mit dem Höhenpunkte verbindet, ist der Verbindungslinie der Mittelpunkte des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises parallel und doppelt so gross als diese.

Zusatz 5. Um nun endlich die Entfernung des Punktes T von den anderen merkwürdigen Punkten des Dreiecks zu bestimmen, nehmen wir die Ausdrücke für die Entfernungen der merkwürdigen Punkte des Dreiecks zu Hülfe, wie sie in dem XXXVI. Bande dieses Archivs S. 338. ff. von dem Herrn Herausgeber desselben aufgestellt sind, nämlich:

$$HK^2 = (1 - 8\cos A\cos B\cos C)R^2,$$
$$HO^2 = 2r^2 - 4R^2\cos A\cos B\cos C,$$
$$KO^2 = R^2 - 2Rr = R(R-2r).$$

Verlängert man nun TK und HO, bis sie sich in J schneiden, so ist, weil KO parallel TH und gleich $\frac{1}{2}TH$ ist, K die Mitte von TJ und O die Mitte von HJ. Da nun $TH = 2KO$, also $TH^2 = 4KO^2$, so ist:

$$\text{I.}\quad TH^2 = 4R(R-2r).$$

Ferner ist in dem Dreiecke THJ, weil K die Mitte der Seite TJ ist, nach einem bekannten Satze:

$$TH^2 + HJ^2 = 2HK^2 + \tfrac{1}{2}TJ^2 \text{ oder } TJ^2 = 2TH^2 + 2HJ^2 - 4HK^2.$$

Weil aber

$$TJ = 2TK,\quad TH = 2KO \text{ und } HJ = 2HO$$

ist, so erhält man durch Einsetzung dieser Werthe in die letzte Gleichung:

$$4TK^2 = 8KO^2 + 8HO^2 - 4HK^2,$$

also:

$$\begin{aligned}TK^2 &= 2KO^2 + 2HO^2 - HK^2\\ &= 2R^2 - 4Rr + 4r^2 - 8R^2\cos A\cos B\cos C - R^2 + 8R^2\cos A\cos B\cos C\\ &= R^2 - 4Rr + 4r^2 = (R-2r)^2,\end{aligned}$$

also, weil, wegen $KO^2 = R(R-2r)$, $R-2r$ nicht negativ sein kann,

$$\text{II.}\quad TK = R - 2r.$$

Ferner ist in demselben Dreiecke THJ:

$$2TO^2 = TJ^2 + TH^2 - \tfrac{1}{2}HJ^2 = 4TK^2 + 4KO^2 - 2HO^2,$$

also:

$$\begin{aligned} TO^2 &= 2TK^2 + 2KO^2 - HO^2 \\ &= 2R^2 - 8Rr + 8r^2 + 2R^2 - 4Rr - 2r^2 + 4R^2 \cos A \cos B \cos C \\ &= 4R^2 - 12Rr + 6r^2 + 4R^2 \cos A \cos B \cos C \\ &= 6R^2 - 12Rr + 6r^2 - 2R^2 + 4R^2 \cos A \cos B \cos C, \end{aligned}$$

oder

$$\text{III.}\quad TO^2 = 6(R-r)^2 - 2(1 - 2\cos A \cos B \cos C)R^2.$$

Weil endlich nach unserem Lehrsatze $TO = 3SO$ ist, so ist auch:

$$9SO^2 = 6(R-r)^2 - 2(1 - 2\cos A \cos B \cos C)R^2.$$

Es ist dieses derselbe Ausdruck, welchen der Herr Herausgeber dieses Archivs in der oben citirten Stelle Seite 349. angegeben hat.

IX.

Zur analytischen Geometrie im Raume.

Von
Herrn Professor *Joh. Rogner*
in Graz.

Es kam mir von jeher als wenig consequent vor, dass in allen (mir bekannten) Büchern über analytische Geometrie im Raume der Weg verlassen ist, welcher in der analytischen Geometrie in der Ebene eingehalten wird, nämlich der Weg vom Punkte zur Geraden. In ersterer fand ich durchgehend vom Punkte zur Ebene und von dieser zurück auf die Gerade gesprungen oder mindestens bei der Ableitung der Gleichungen der Geraden auf die Ebene bezogen.

Der Gedanke, dass bei der Ableitung der Gleichung der Ebene häufig eine charakteristische Eigenschaft derselben benutzt wird *), führte mich dahin, an die Benützung eines charakteristischen Merkmales der Geraden zu denken, und dadurch zur nachfolgenden Ableitung der Gleichungen der Geraden im Raume, blos gestützt auf das Vorausgehende über den Punkt im Raume.

Es sei eine Gerade L auf ein orthogonales Axensystem mit den Axen OX, OY, OZ bezogen. Eine Gerade ist der Lage nach durch zwei gegebene Punkte fixirt, es seien dies für L die Punkte M mit den resp. Coordinaten a, b, c und N mit α, β, γ. Ist nun P ein beliebiger Punkt von L, und habe er die Coordinaten x, y, z, so folgt nach der früher analytisch bestimmten Entfernung zweier Punkte:

$$MP=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2},\quad PN=\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2},$$
$$MN=\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2};$$

und da, wenn M, P, N in einer Geraden liegen, und nur für diesen Fall, $MN=MP\pm PN$ ist, so ist:

---

*) In einfachster Weise im Lehrbuche der höheren Mathematik von Professor Dr. J. Herr, Wien 1864, 2. Bd. S. 18., wozu erlaubt sein mag, anzuführen, dass jene Ableitung der Gleichung der Ebene von mir schon lange vorher im Manuscripte gebraucht wurde (ohne dass jedoch Herr Professor Dr. Herr davon wissen konnte).

$$(1)\quad \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2} \pm \sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}$$
$$= \sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}.$$

Hieraus ergibt sich durch Quadrirung und eine leichte Reduction:

$$[a\alpha-(a+\alpha)x+x^2]+[b\beta-(b+\beta)y+y^2]+[c\gamma-(c+\gamma)z+z^2]$$
$$=\mp\sqrt{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2][(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2]},$$

und hieraus:

$$(a-x)(\alpha-x)+(b-y)(\beta-y)+(c-z)(\gamma-z)$$
$$=\mp\sqrt{\begin{matrix}[(a-x)(\alpha-x)]^2+[(a-x)(\beta-y)]^2+[(a-x)(\gamma-z)]^2\\ +[(b-y)(\alpha-x)]^2+[(b-y)(\beta-y)]^2+[(b-y)(\gamma-z)]^2\\ +[(c-z)(\alpha-x)]^2+[(c-z)(\beta-y)]^2+[(c-z)(\gamma-z)]^2.\end{matrix}}$$

Durch nochmaliges Quadriren und die Reduction auf Null entsteht nun:

$$(2)\quad [(a-x)(\beta-y)-(b-y)(\alpha-x)]^2$$
$$+[(a-x)(\gamma-z)-(c-z)(\alpha-x)]^2+[(b-y)(\gamma-z)-(c-z)(\beta-y)]^2=0.$$

Ist aber die Summe positiver Grössen gleich Null, so ist jede derselben gleich Null, sonach folgt weiter:

$$(3)\quad \begin{cases}(a-x)(\beta-y)=(b-y)(\alpha-x),\\ (a-x)(\gamma-z)=(c-z)(\alpha-x),\\ (b-y)(\gamma-z)=(c-z)(\beta-y);\end{cases}$$

wobei die dritte Gleichung auch durch Division der ersten durch die zweite folgt, mithin als Gleichungen der Geraden erhalten sind:

$$(4)\quad \begin{cases}(a-x)(\beta-y)=(b-y)(\alpha-x),\\ (a-x)(\gamma-z)=(c-z)(\alpha-x);\end{cases}$$

oder entwickelt und geordnet:

$$(5)\quad \begin{cases}(b-\beta)x+(\alpha-a)y=\alpha b-a\beta,\\ (c-\gamma)x+(\alpha-a)z=\alpha c-a\gamma;\end{cases}$$

oder endlich der Form nach:

$$(6)\quad \left.\begin{cases}y=Ax+B,\\ z=A'x+B',\end{cases}\right\}\ (L).$$

X.

Schreiben des Herrn Rectors Dr. Nagel in Ulm an den Herausgeber über eine geometrische Aufgabe (Thl. XLI. S. 237.).

In den Aufgaben*), welche Sie im neuesten Hefte Ihres Archivs (41. Thl. 2. Hft. S. 237.) behandelten, hat mich der nette Gedanke des Perpendikels als Hilfslinie für die Analysis sehr erfreut. Vielleicht finden Sie auch folgende Analysis, welche keiner Hilfslinie bedarf und zu einer ebenfalls ganz einfachen Konstruktion führt, nicht ganz unbeachtenswerth; ich fand sie in Folge der von Ihnen hier gestellten Aufgabe, indem ich meiner Gewohnheit gemäss die Lösung selbst versuchte, ehe ich die Ihrige las.

Analysis. In ΔABC (Taf. I. Fig. 6.), in welchem $AB=AC$ sein soll, sei CD und CE gegeben, so ist dadurch das rechtwinklige Dreieck CDE, also auch CDA als Supplement von CDE gegeben; da nun auch CD und das Verhältniss von $AD:AC=1:2$ gegeben ist, so ist auch ΔACD, und dadurch, weil $DB=AD$ ist, der Punkt B gegeben.

Konstruktion. Aus der gegebenen $CD=m$ als Hypotenuse und $CE=h$ als Kathete konstruire das rechtwinklige Dreieck CDE, verlängere ED beliebig nach F, von F beschreibe mit einem Halbmesser $=2FD$ einen Bogen, der CD in G trifft, und ziehe durch C eine Parallele mit FG, welche DF oder dessen Verlängerung in A trifft; endlich schneide $DB=DA$ auf DE oder dessen Verlängerung ab, und ziehe BC, so ist ΔABC das gesuchte.

Beweis einfach.

Ulm den 30. December 1863.

---

*) Ein gleichschenkliges Dreieck soll construirt und berechnet werden aus der auf einer der beiden gleichen Seiten senkrecht stehenden Höhe h und aus der Geraden m, welche den Halbirungspunkt derselben Seite mit der Gegenecke verbindet. G.

XI.

Geometrischer Ort der Mittelpunkte aller durch denselben Punkt gehenden Sehnen eines Kegelschnittes.

Von

Herrn Doctor *am Ende*

in Langensalza.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte sei wie gewöhnlich:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Es sei ferner ein Punkt gegeben, dessen Coordinaten f und g sein mögen. Die Gleichung jeder durch diesen Punkt gezogenen Sehne des Kegelschnittes hat die Form

$$y-g=H(x-f).$$

Bezeichnet man nun mit u und v die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Sehne mit dem Kegelschnitt, so hat man die Gleichungen:

$$Au^2+2Buv+Cv^2+2Du+2Ev+F=0,$$
$$v-g=H(u-f);$$

mit deren Hilfe sich diese Durchschnittspunkte vollständig bestimmen lassen.

Es ist also

$$v=g+H(u-f),$$

woraus weiter folgt:

$$Au^2+2Bu\{g+H(u-f)\}+C\{g+H(u-f)\}^2+2Du$$
$$+2E\{g+H(u-f)\}+F=0$$

oder:

$$A\{f+(u-f)\}^2+2B\{f+(u-f)\}\{g+H(u-f)\}+C\{g+H(u-f)\}^2$$
$$+2D\{f+(u-f)\}+2E\{g+H(u-f)\}+F=0;$$

folglich:

$$\{A+2BH+CH^2\}(u-f)^2+2\{Af+Bg+BfH+CgH+D+EH\}(u-f)$$
$$=-(Af^2+2Bfg+Cg^2+2Df+2Eg+F)$$

oder:

$$(u-f)^2+2\left\{\frac{Af+Bg+D+(Cg+Bf+E)H}{A+2BH+CH^2}\right\}(u-f)$$
$$=-\frac{Af^2+2Bfg+Cg^2+2Df+2Eg+F}{A+2BH+CH^2}.$$

Setzt man nun der Kürze wegen:

$$M=\sqrt{\left\{\frac{Af+Bg+D+(Bf+Cg+E)H}{A+2BH+CH^2}\right\}^2-\frac{Af^2+2Bfg+Cg^2+2Df+2Eg+F}{A+2BH+CH^2}},$$

so erhält man:

$$u=f-\frac{Af+Bg+D+(Bf+Cg+E)H}{A+2BH+CH^2}\pm M$$

und

$$v=g-H\frac{Af+Bg+D+(Bf+Cg+E)H}{A+2BH+CH^2}\pm HM.$$

Folglich hat man, wenn X und Y die Mittelpunkte der Sehne bezeichnen:

$$X=f-\frac{Af+Bg+D+(Bf+Cg+E)H}{A+2BH+CH^2},$$
$$Y=g-H\frac{Af+Bg+D+(Bf+Cg+E)H}{A+2BH+CH^2};$$

oder, wenn man noch der Kürze wegen $a=Af+Bg+D$ und $b=Bf+Cg+E$ setzt:

$$f-X=\frac{a+bH}{A+2BH+CH^2} \text{ und } g-Y=H\frac{a+bH}{A+2BH+CH^2},$$

woraus folgt:

$$H=\frac{g-Y}{f-X}.$$

Dieser Werth von H, oben eingesetzt, giebt die Gleichung des geometrischen Ortes der Mittelpunkte aller durch den Punkt (f, g) gehenden Sehnen des Kegelschnittes, nämlich die Gleichung:

$$f-X=\frac{a+b\frac{g-Y}{f-X}}{A+2B\frac{g-Y}{f-X}+C\left(\frac{g-Y}{f-X}\right)^2},$$

oder:

$$f-X=\frac{a(f-X)+b(g-Y)}{A(f-X)^2+2B(f-X)(g-Y)+C(g-Y)^2}(f-X),$$

oder:

$$a(f-X)+b(g-Y)=A(f-X)^2+2B(f-X)(g-Y)+C(g-Y)^2.$$

Verlegt man nun den Anfangspunkt der Coordinaten so, dass $X=f+X_1$ und $Y=g+Y_1$, also $X_1=X-f$ und $Y_1=Y-g$ wird, so erhält man die einfachere Gleichung des Ortes:

$$AX_1^2+2BX_1Y_1+CY_1^2=-aX_1-bY_1$$

oder

$$AX_1^2+2BX_1Y_1+CY_1^2+aX_1+bY_1=0.$$

Man sieht hier, dass die Coefficienten von X_1^2, X_1Y_1 und Y_1^2 beziehungsweise dieselben sind, als die von x^2, xy und y^2. Somit ergiebt sich der Satz: Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller durch denselben Punkt gehenden Sehnen eines Kegelschnittes ist ebenfalls ein Kegelschnitt und zwar ein Kegelschnitt von derselben Art.

Ist die Gleichung der erzeugenden Curve die Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

so erhält man für den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller durch den Punkt (f, g) gehenden Sehnen die Gleichung der Ellipse:

$$\left(\frac{X-\frac{1}{2}f}{a}\right)^2+\left(\frac{Y-\frac{1}{2}g}{b}\right)^2=\left(\frac{f}{2a}\right)^2+\left(\frac{g}{2b}\right)^2,$$

oder, wenn man $X-\frac{1}{2}f=X'$ und $Y-\frac{1}{2}g=Y'$ nimmt:

$$\left\{\frac{X'}{a\sqrt{\left(\frac{f}{2a}\right)^2+\left(\frac{g}{2b}\right)^2}}\right\}^2+\left\{\frac{Y'}{b\sqrt{\left(\frac{f}{2a}\right)^2+\left(\frac{g}{2b}\right)^2}}\right\}^2=1\ ^{*)}.$$

---

*) S. Thl. XLI., Hft. 1., S. 120. des Archivs.

Für die Hyperbel

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

erhält man unter denselben Voraussetzungen:

$$\left\{\frac{X'}{a\sqrt{\left(\frac{f}{2a}\right)^2-\left(\frac{g}{2b}\right)^2}}\right\}^2-\left\{\frac{Y'}{b\sqrt{\left(\frac{f}{2a}\right)^2-\left(\frac{g}{2b}\right)^2}}\right\}^2=1.$$

Für die Parabel

$$y^2=2px$$

erhält man endlich unter gleichen Voraussetzungen:

$$Y'^2=pX'+q,\quad (q=\frac{g^2-2pf}{4});$$

also eine Parabel, deren Parameter die Hälfte des Parameters der erzeugenden Parabel ist.

Vorstehendes ist also eine bemerkenswerthe Erweiterung des von mir im Archiv Thl. XLI. S. 118—S. 120 bewiesenen Satzes von der Ellipse, wozu ich durch eine Notiz des Herrn Dr. G. F. W. Bähr in Groningen (Niederlande) veranlasst wurde. M. s. übrigens weiter unten in diesem Hefte die Miscellen, wo ein Paar später eingegangene, diesen Gegenstand betreffende Aufsätze, die leider hier nicht mehr aufgenommen werden konnten, mitgetheilt sind. Grunert.

XII.

Integration der Gleichung

$$\frac{d^3y}{dx^3}=3mx^2\frac{d^2y}{dx^2}+6m(\mu+2)x\frac{dy}{dx}+3m(\mu+2)(\mu+1)y \quad (1)$$

für den Fall, wo m eine beliebige constante und μ eine ganze negative Zahl bezeichnet.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Ich setze, da μ eine negative Zahl bezeichnet, $\mu=-\lambda$, und habe dann:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=3mx^2\frac{d^2y}{dx^2}+6m(2-\lambda)x\frac{dy}{dx}+3m(2-\lambda)(1-\lambda)y. \quad (2)$$

Diese Gleichung gibt, $(\lambda-2)$mal differenzirt:

$$\frac{d^{\lambda+1}y}{dx^{\lambda+1}}=3mx^2\frac{d^\lambda y}{dx^\lambda}, \quad (3)$$

und hieraus folgt durch einmaliges Integriren:

$$\frac{d^\lambda y}{dx^\lambda}=e^{mx^3}. \quad (4)$$

Wird nun beiderseits λmal integrirt, so erhält man:

$$y=x^{\lambda-1}\int e^{mx^3}dx-\binom{\lambda-1}{1}x^{\lambda-2}\int xe^{mx^3}dx$$
$$+\binom{\lambda-1}{2}x^{\lambda-3}\int x^2e^{mx^3}dx-\binom{\lambda-1}{3}x^{\lambda-4}\int x^3e^{mx^3}dx+\ldots, \quad (5)$$

und diese Gleichung ist anwendbar für alle ganzen und positiven Werthe von λ, die grösser als 1 sind.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 3mx^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 6m(\mu+2)x\frac{dy}{dx} + 3m(\mu+2)(\mu+1)y.$$

Für $\lambda = 0$ gestattet die Gleichung (2) folgende Schreibweise:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{dy}{dx} - 3mx^2y\right] = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = 3mx^2y + C_1 + C_2x$$

und

$$y = L_0 e^{mx^3} + e^{mx^3}\int e^{-mx^3}(L_1 + L_2x)\,dx.$$

Für $\lambda = 1$ geht die Gleichung (2) über in:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2} - 3mx^2\frac{dy}{dx}\right] = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3mx^2\frac{dy}{dx} + C_1,$$

und hieraus ergibt sich als vollständiges Integral:

$$y = \int\left[e^{mx^3}\int e^{-mx^3}dx\right]dx.$$

Für $\lambda = 2$ folgt aus (5):

$$y = x\int e^{mx^3}dx - \int xe^{mx^3}dx,$$

was sich auch so schreiben lässt:

$$y = C_1 + C_2x + C_3\left[x\int e^{mx^3}dx - \int xe^{mx^3}dx\right].$$

Für $\lambda = 3$ ergibt sich aus (5):

$$y = x^2\int e^{mx^3}dx - 2x\int xe^{mx^3}dx + \frac{1}{3m}e^{mx^3},$$

und es lässt sich nun das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung für den speciellen Fall $\lambda = 3$ folgendermassen schreiben:

$$y = C_1x + C_2x^2 + C_3\left[e^{mx^3} - 6mx\int xe^{mx^3}dx + 3mx^2\int e^{mx^3}dx\right].$$

Für $\lambda = 4$ erhält man aus (5):

$$y = x^3\int e^{mx^3}dx - 3x^2\int xe^{mx^3}dx + 3x\int x^2e^{mx^3}dx - \int x^3e^{mx^3}dx,$$

oder anders geschrieben:

$$y = \left(x^3 + \frac{1}{3m}\right)\int e^{mx^3}dx - 3x^2\int xe^{mx^3}dx + \frac{2x}{3m}e^{mx^3};$$

daher ist das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung für den speciellen Fall $\lambda=4$:

$$y = C_1(1+3mx^3)+C_2x^2$$
$$+ C_3[2xe^{mx^3} - 9mx^2\int xe^{mx^3}dx + (1+3mx^3)\int e^{mx^3}dx].$$

Für $\lambda=5$ findet man, auf gleiche Weise vorgehend:

$$y = C_1(3mx^4+4x)+C_2(12mx^3+2)$$
$$+ C_3[3x^2e^{mx^3} - (12mx^3+2)\int xe^{mx^3}dx + (3mx^4+4x)\int e^{mx^3}dx],$$

u. s. w., u. s. w., hierbei stets unter C_1, C_2, C_3 willkührliche Constanten verstanden.

XIII.

Darstellung der Function $y=e^{\lambda x^r}$, in welcher λ eine constante und r eine ganze positive Zahl bezeichnet, in der Form $y=S[A_m e^{mx}]$.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Liouville hat im 21. Cah. des Journals de l'école polytechnique gezeigt, wie jede Function von x sich in der Form $S[A_m e^{mx}]$ darstellen lasse. Die Methode, die Liouville daselbst angibt, ist nicht in allen Fällen zweckmässig. Ich habe daher versucht, Functionen der Form

$$y = e^{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots} \tag{1}$$

nach anderer Weise in die Form $y=S[A_m e^{mx}]$ zu bringen.

Ich betrachte zuerst

$$y = e^{\lambda x^r}, \tag{2}$$

aus welcher folgt:

$$y' = \lambda r x^{r-1} e^{\lambda x^r}$$

oder

$$y' = \lambda r x^{r-1} y. \tag{3}$$

Diese Differential-Gleichung lässt sich nach der von Kummer im 19. Bande von Crelle's Journal gegebenen Methode integriren, und zwar ergibt sich nach derselben das y in Form eines $(r-1)$fachen bestimmten Integrales, in welches r Constanten C_1, C_2, $C_3, \ldots. C_r$ eintreten, zwischen denen $r-1$ Bedingungen stattfinden. Fügt man diesen Bedingungsgleichungen noch jene hinzu, dass für $\lambda=0$ $y=1$ werde, so hat man das in (2) stehende y in die verlangte Form gebracht.

Auf diese Weise vorgegangen erhält man demnach:

$$e^{ax^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} (e^{ux\sqrt{2a}} + e^{-ux\sqrt{2a}})\, du, \tag{4}$$

ferner:

$$e^{bx^3} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v (C_1 e^{uvx\lambda_1 \sqrt[3]{3b}} + C_2 e^{uvx\lambda_2 \sqrt[3]{3b}} + C_3 e^{uvx\lambda_3 \sqrt[3]{3b}})\, du dv, \tag{5}$$

woselbst zwischen C_1, C_2, C_3 folgende drei Gleichungen stattfinden:

$$C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3 = 0,$$
$$C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + C_3\lambda_3^2 = 1,$$
$$(C_1 + C_2 + C_3) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v\, du\, dv = 1;$$

und wo ferner λ_1, λ_2, λ_3 die drei Wurzeln der Gleichung $\lambda^3 = 1$ bedeuten.

Durch Multiplication der zwei Gleichungen (4) und (5) erhält man:

$$e^{ax^2+bx^3} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3} - \frac{w^2}{2}} v (C_1 e^{uvx\lambda_1 \sqrt[3]{3b}} + C_2 e^{uvx\lambda_2 \sqrt[3]{3b}} + C_3 e^{uvx\lambda_3 \sqrt[3]{3b}}) (e^{wx\sqrt{2a}} + e^{-wx\sqrt{2a}})\, du\, dv\, dw,$$

was also ebenfalls die verlangte Form hat.

XIV.

Ueber den grössten Werth von $\sqrt[x]{x}$ und einige damit zusammenhängende Sätze.

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

---

§. 1.

Setzt man in dem Ausdrucke $\sqrt[x]{x}$ allmälig der Reihe nach die ganzen Zahlen 1, 2, 3...., so entsteht bekanntlich für $x=3$ der grösste Werth. Die früheren und späteren Werthe, die ihm vorangehen oder folgen, fallen. Es fragt sich: Geht das Fallen der Werthe für $x>3$ bis in's Unendliche oder nähert es sich einem Grenzwerthe? und in welchem Verhältnisse stehen die Nachbarglieder unter einander?

Dass sich der Werth von $\sqrt[x]{x}$ bei beständigem Wachsen von x einer bestimmten Grenze, der Einheit, nähert, folgert sich einfach aus dem Ausdrucke $x^{\frac{1}{x}}$. Da sich $\frac{1}{x}$ in diesem Falle der 0 nähert, so lässt sich schliessen, dass

$$1) \ldots\ldots\ldots\ldots \operatorname{Lim} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

sein werde. Diess bestätigt sich, wenn man den Ausdruck $\sqrt[x]{x}$ unter die Form $e^{\frac{lg x}{x}}$ bringt und nach der bekannten Weise durch Differenziation des Zählers und Nenners den Werth für $x=\infty$

bestimmt. Man findet hiefür den in No. 1) gegebenen Werth. Auf gleiche Weise erhält man folgenden Satz:

$$2) \ldots\ldots\ldots \operatorname{Lim} x^{\frac{1}{x(x+1)}} = 1$$

für ein beständig wachsendes x.

Soll das Verhältniss bestimmt werden, worin zwei auf einander folgende Zahlen, die das Wurzelzeichen der grössern führen, $\sqrt[x+1]{x+1}$, $\sqrt[x+1]{x}$ bestimmt werden, so hat man:

$$3) \ldots\ldots\ldots \frac{(x+1)^{\frac{1}{x+1}}}{x^{\frac{1}{x+1}}} = (1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{x+1}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{x+1})\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1.2.3}(1-\frac{1}{x+1})(2-\frac{1}{x+1})\frac{1}{x^3}\ldots\right].$$

Diese Darstellung entsteht, wenn man $\frac{1}{x+1}$ ausscheidet und die Coefficienten gehörig ordnet. Der Werth der Reihe nähert sich, wie man sieht, mehr und mehr der Einheit bei wachsendem x, und man entnimmt hieraus folgende Sätze:

$$4) \ldots\ldots\ldots (x+1)^{\frac{1}{x+1}} > x^{\frac{1}{x+1}}$$

oder

$$5) \ldots\ldots \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x+1}} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x+1}} > 1,$$

$$6) \ldots \operatorname{Lim}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x+1}} = \operatorname{Lim}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x+1}} = 1.$$

Die gleichen Wurzelwerthe zweier auf einander folgenden Zahlen sind im Wachsen begriffen. Sie nähern sich mehr und mehr der Gleichheit, je grösser die Wurzelwerthe werden. Sehr einfach lässt sich No. 4) und No. 5) auch so zeigen. Da $x+1 > x$ ist, so ist auch:

$$(x+1)^{\frac{1}{x+1}} > x^{\frac{1}{x+1}}.$$

Der Satz No. 6) lässt sich auch aus der zweiten Form in No. 3) daraus erschliessen, dass $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x+1}$ bei beständig wachsendem

x in 0 übergehen. Die Darstellung No. 3) lässt sich für ein unendlich wachsendes x, da $1-\frac{1}{x+1}=1$, $(1-\frac{1}{x+1})(2-\frac{1}{x+1})=2.1$ in diesem Falle wird, unter folgende Form setzen:

$$7) \ldots\ldots \quad \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x+1}} = 1+\frac{1}{x+1}\mathrm{Lg}(1+\frac{1}{x}),$$

woraus gleichfalls No. 6) folgt.

Die Behauptung, dass $\sqrt[x]{x}$ ein Maximum für $x=3$ bei ganzen Zahlen werde, rechtfertigt sich durch Vergleichung zweier auf einander folgenden Wurzelwerthe. Sie lassen sich unter folgende Form bringen:

$$8) \ldots \quad \frac{(x+1)^{\frac{1}{x+1}}}{x^{\frac{1}{x}}} = \frac{(x+1)^{\frac{x}{x(x+1)}}}{x^{\frac{x+1}{x(x+1)}}} = \left[\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\frac{1}{x(x+1)}}$$

$$= \left[\frac{1}{x}(2+\frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{x})+\frac{1}{1.2.3}(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})\ldots.)\right]^{\frac{1}{x(x+1)}}.$$

Der Werth des vorstehenden Ausdrucks hängt offenbar von dem Werthe der in die Klammer eingeschlossenen Reihe ab. Er liegt bekanntlich bei wachsendem x zwischen 2 und 3. Setzt man daher für x die Werthe 1, 2, 3, 4,...., so rechtfertigt sich die oben ausgesprochene Behauptung, denn der Quotient aus 1 und 2 in diese Reihe ist >1; der aus 3, 4, 5,.... ist <1, und zwar im letzten Falle so, dass jeder folgende kleiner als der vorhergehende wird. Man hat daher:

$$9) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\sqrt[x+1]{x+1}}{\sqrt[x]{x}} > 1$$

für $x \leqq 2$;

$$10) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\sqrt[x+1]{x+1}}{\sqrt[x]{x}} < 1$$

für $x \geqq 3$. Es ist so fort:

$$11) \ldots\ldots \quad \sqrt[1]{1} < \sqrt[2]{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \ldots.,$$

was sich bestätigt, wenn man die angedeuteten Werthe einführt.

Mit den bis jetzt aufgestellten Sätzen lässt sich auch der Grenzwerth für No. 8) bestimmen. Man hat aus der ersten und dritten Form in No. 8):

$$\operatorname{Lim} \frac{\sqrt[x+1]{x+1}}{\sqrt[x]{x}} = \operatorname{Lim}\left[(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x+1}} \frac{1}{x^{\frac{1}{x(x+1)}}}\right].$$

Die Bestimmung dieses Werthes hängt von den in No. 6) und No. 2) gegebenen Grenzwerthen ab. Durch Einführung derselben erhält man:

$$12) \ldots\ldots\ldots \operatorname{Lim} \frac{(x+1)^{\frac{1}{x+1}}}{x^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes kann man auch dadurch nachweisen, dass man den Werth von $\left[\frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}\right]^{\frac{1}{x(x+1)}}$ nach der gewöhnlichen Methode durch Differentiation für $x=\infty$ bestimmt, wodurch man zu dem gleichen Resultate wie in No. 12) geführt wird.

Nimmt man bei Untersuchung des grössten Werthes von $\sqrt[x]{x}$ auch auf die zwischen den ganzen Zahlen liegenden Bruchwerthe Rücksicht, und hebt also die in No. 11) liegende Beschränkung auf ganze Zahlen auf, so ergibt sich ein anderes Resultat als in No. 11), und man hat den Ausdruck $\sqrt[x]{x}$ für jeden beliebigen Werth von x auf ein Maximum zu untersuchen.

Setzt man zu dem Ende $q = x^{\frac{1}{x}} = x^z$ und wendet die von mir im 22sten Bande S. 401. dieses Archivs angegebene Methode zur Bestimmung des ersten und zweiten Differenzialquotienten an, so ist $\lg q = z \lg x$, und man erhält:

$$\partial q = q(\lg x \partial z + z \partial \lg x),$$

woraus sich durch Differenzirung und Einführung der angegebenen Werthe ergibt:

$$13) \ldots\ldots \frac{\partial x^{\frac{1}{x}}}{\partial x} = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\lg x}{x^2}\right) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1-\lg x).$$

Durch wiederholtes Differenziren entsteht:

$$\frac{\partial^2 x^{\frac{1}{x}}}{(\partial x)^2} = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\lg x}{x^2}\right) \partial x^{\frac{1}{x}} + x^{\frac{1}{x}} \partial\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\lg x}{x^2}\right).$$

Hieraus gewinnt man durch Ausführung der angezeigten Geschäfte und Einführung von $\partial x^{\frac{1}{x}}$ aus No. 13):

$$14) \ldots \frac{\partial^2 x^{\frac{1}{x}}}{(\partial x)^2} = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^4}(1-\lg x)^2 + \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^3}[-1-2(1-\lg x)].$$

Aus dem ersten Differenzialquotienten ist $1-\lg x=0$. Führt man diesen Werth in No. 14) ein, so wird der zweite Differenzialquotient negativ. Daher hat der Ausdruck $\sqrt[x]{x}$ einen grössten Werth für $1=\lg x$, also für die Zahl, deren natürlicher Logarithme die Einheit ist, also für:

$$15) \ldots\ldots \quad x = e = 2{,}7182818284\ldots.$$

Das in No. 1) gefundene Gesetz ändert sich in folgender Weise:

$$16) \ldots \quad \sqrt[1]{1} < \sqrt[2]{2} < \sqrt[e]{e} > \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \ldots,$$

wie folgende Zahlwerthe zeigen:

$$17) \ldots \quad 1 < 1{,}414213 < 1{,}444667 > 1{,}442249 > 1{,}414213\ldots$$

Die steigenden Wurzelwerthe des Ausdrucks $\sqrt[x]{x}$ bilden daher eine Curve, die einen Culminationspunkt für $\sqrt[e]{e}$ und eine Asymptote hat.

In dem XX. Bande pag. 7. der Nouv. Annales de Mathém. p. Terquem findet sich von Beynac der Fall No. 11) für ganze x erörtert. Der in No. 16) gegebene, so wie die übrigen sind dort nicht besprochen.

Aus No. 16) kann man leicht auf No. 11) übergehen. Der Werth von $\sqrt[e]{e}$ fällt dann aus, und an seine Stelle tritt dann der ihm zunächst liegende $\sqrt[3]{3}$.

§. 2.

Auf gleiche Weise kann man den Ausdruck $x^{-\frac{1}{x}}$ auf ein Minimum und Maximum untersuchen. Setzt man $q = x^{-\frac{1}{x}} = x^z$,

so erhält man nach dem Vorgange von §. 1. für den ersten Differentialquotienten:

$$1) \ldots \frac{\partial x^{-\frac{1}{x}}}{\partial x} = -x^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\lg x}{x^2}\right) = -\frac{x^{-\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - \lg x).$$

Durch wiederholtes Differenziren entsteht:

$$\frac{\partial^2 x^{-\frac{1}{x}}}{(\partial x)^2} = -\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\lg x}{x^2}\right)\partial x^{-\frac{1}{x}} - x^{-\frac{1}{x}}\partial\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\lg x}{x^2}\right),$$

und hieraus durch Ausführung der angezeigten Geschäfte und Einführung von $\partial x^{-\frac{1}{x}}$ aus No. 1):

$$2) \ldots \frac{\partial^2 x^{-\frac{1}{x}}}{(\partial x)^2} = \frac{x^{-\frac{1}{x}}}{x^4}(1 - \lg x)^2 + \frac{x^{-\frac{1}{x}}}{x^3}[1 + 2(1 - \lg x)].$$

Führt man aus No. 1) den Werth $1 - \lg x = 0$ in No. 2) ein, so wird der Werth des zweiten Differenzialquotienten positiv und es entsteht für $x^{-\frac{1}{x}}$ ein Minimum, wenn $1 - \lg x = 0$, oder wenn

$$3) \ldots\ldots\ldots \quad x = e = 2{,}7182818\ldots.$$

wird. Hiernach hat man:

$$4) \ldots\ldots 1^{-\frac{1}{1}} > 2^{-\frac{1}{2}} > e^{-\frac{1}{e}} < 3^{-\frac{1}{3}} < 4^{-\frac{1}{4}} < \ldots.$$

Für ganze x tritt $3^{-\frac{1}{3}}$ an die Stelle von $e^{-\frac{1}{e}}$ und man hat:

$$5) \ldots\ldots 1^{-\frac{1}{1}} > 2^{-\frac{1}{2}} > 3^{-\frac{1}{3}} < 4^{-\frac{1}{4}} < 5^{-\frac{1}{5}} < \ldots.$$

Dass diess Gesetz für ganze Zahlen gelte, lässt sich auf gleiche Weise wie in §. 1. beweisen. Vergleicht man zwei Nachbarglieder $(x+1)^{-\frac{1}{x+1}}$ und $x^{-\frac{1}{x}}$ mit einander, so kann man sie unter folgende Form setzen:

$$6) \quad \frac{(x+1)^{-\frac{1}{x+1}}}{x^{-\frac{1}{x}}} = \left[\frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}\right]^{-\frac{1}{x(x+1)}} = \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{x(x+1)}}}$$

$$= \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\left(2 + \frac{1}{1.2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right)\ldots\right.\right]^{\frac{1}{x(x+1)}}}.$$

Hier treten die nämlichen Bemerkungen in Kraft, welche zu No. 8) §. 2. gemacht wurden, jedoch mit dem Unterschiede, dass nun ein Kleinstes an die Stelle des Grössten tritt, und man erhält:

7) . . . . $$\frac{(x+1)^{-\frac{1}{x+1}}}{x^{-\frac{1}{x}}} < 1$$

für $x \leqq 2$, und

8) . . . . $$\frac{(x+1)^{-\frac{1}{x+1}}}{x^{-\frac{1}{x}}} > 1$$

für $x \geqq 3$. Hiemit ist No. 5) bewiesen.

§. 3.

Die vorstehenden Erörterungen geben Veranlassung zur Bestimmung der Grenzwerthe verschiedener hierher gehöriger Ausdrücke. Sie werden im Folgenden übersichtlich neben einander gestellt:

1) $\lim(1+\frac{1}{x})^x = e$, 2) $\lim(1+\frac{1}{x})^{-x} = e^{-1}$

für ein beständig wachsendes x oder $x=\infty$;

3) $\lim(1+\frac{1}{x})^x = 1$, 4) $\lim(1+\frac{1}{x})^{-x} = 1$

für ein beständig fallendes x oder $x=0$;

5) $\lim x^{\frac{1}{x}} = 1$, 6) $\lim x^{-\frac{1}{x}} = 1$

für ein beständig wachsendes x;

7) $\lim x^{\frac{1}{x}} = e^{\infty}$, 8) $\lim x^{-\frac{1}{x}} = 0$

für ein beständig fallendes x;

9) $\lim x^{\frac{1}{x+1}} = 1$, 10) $\lim x^{-\frac{1}{x+1}} = 1$

für ein beständig wachsendes x;

11) $\operatorname{Lim} x^{\frac{1}{x+1}} = e^{\infty}$, 12) $\operatorname{Lim} x^{-\frac{1}{x+1}} = 0$

für ein beständig fallendes x;

13) $\operatorname{Lim} (x+1)^{\frac{1}{x}} = 1$, 14) $\operatorname{Lim} (x+1)^{-\frac{1}{x}} = 1$

für ein beständig wachsendes x;

15) $\operatorname{Lim} (x+1)^{\frac{1}{x}} = e$, 16) $\operatorname{Lim} (x+1)^{-\frac{1}{x}} = e^{-1}$

für ein beständig fallendes x;

17) $\operatorname{Lim} (x+1)^{\frac{1}{x+1}} = 1$, 18) $\operatorname{Lim} (x+1)^{-\frac{1}{x+1}} = 1$

für ein beständig wachsendes x;

19) $\operatorname{Lim} (x+1)^{\frac{1}{x+1}} = e$, 20) $\operatorname{Lim} (x+1)^{-\frac{1}{x+1}} = e^{-1}$

für ein beständig fallendes x;

21) $\operatorname{Lim} x^{\frac{1}{x(x+1)}} = 1$, 22) $\operatorname{Lim} x^{-\frac{1}{x(x+1)}} = 1$

für ein beständig wachsendes x;

23) $\operatorname{Lim} x^{\frac{1}{x(x+1)}} = e^{\infty}$, 24) $\operatorname{Lim} x^{-\frac{1}{x(x+1)}} = 0$

für ein beständig fallendes x;

25) $\operatorname{Lim} \frac{(x+1)^{\frac{1}{x+1}}}{x^{\frac{1}{x}}} = 1$, 26) $\operatorname{Lim} \frac{(x+1)^{-\frac{1}{x+1}}}{x^{-\frac{1}{x}}} = 1$

für ein beständig wachsendes x;

27) $\operatorname{Lim} \frac{(x+1)^{\frac{1}{x+1}}}{x^{\frac{1}{x}}} = 0$, 28) $\operatorname{Lim} \frac{(x+1)^{-\frac{1}{x+1}}}{x^{-\frac{1}{x}}} = e^{\infty}$

für ein beständig fallendes x;

29) $\operatorname{Lim} \frac{(x+1)^{\frac{1}{x+1}}}{x^{\frac{1}{x+1}}} = 1$, 30) $\operatorname{Lim} \frac{(x+1)^{-\frac{1}{x+1}}}{x^{-\frac{1}{x+1}}} = 1$

für ein beständig wachsendes x;

$$31)\quad \mathrm{Lim}\frac{(x+1)^{\frac{1}{x+1}}}{x^{\frac{1}{x+1}}}=0, \qquad 32)\quad \mathrm{Lim}\frac{(x+1)^{-\frac{1}{x+1}}}{x^{-\frac{1}{x+1}}}=e^{\infty}$$

für ein beständig fallendes x.

Aus der Vergleichung dieser Resultate erschliesst sich:

$$\mathrm{Lim}\, x^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{\mathrm{Lim}\, x^{\frac{1}{x}}}$$

u. s. w. Ferner ist $e^{-1}=0{,}367\,879\,441\,171\,442\,321\,595\ldots.$

XV.

Miscellen.

Schreiben des Herrn Dr. G. F. W. Baehr in Groningen an den Herausgeber.

J'ai vu dans une des livraisons de l'„Archiv" (T. XLI. p. 118.), qui m'est venue en mains très-tard, que vous avez donné une extension à la propriété de l'ellipse, dont j'avais parlé dans les „Mondes" etc. Je profite de cette occasion pour vous communiquer encore une généralisation, dont, peut-être, vous pourrez faire usage pour les „Miscelles."

Si l'on divise toutes les cordes d'une conique, qui concourent en un même point, dans un rapport donné (de sorte que sur chaque corde il y a deux points de division), le lieu géométrique de ces points de division sera un système de deux coniques semblables et semblablement placées à la première, quand le point de concours est pris sur la conique elle même; ce système se réduit à une seule conique, quelque soit le point de concours, si les cordes sont divisées en deux parties égales.

Cette propriété est très facile à démontrer pour le cercle, ce qui, par les propriétés projectives des figures, la démontre aussi pour une section quelconque du cône. Cependant la démonstration analytique donne en même temps tout ce qui est nécessaire pour déterminer entièrement le lieu.

Prenant convenablement la direction des axes, et l'origine au point de concours des cordes, l'équation de la conique sera généralement

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0;$$

faisant $x = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi$, $y = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, elle devient

$$(A\,\mathrm{Cos}^2\varphi + B\,\mathrm{Sin}^2\varphi)r^2 + (C\,\mathrm{Cos}\,\varphi + D\,\mathrm{Sin}\,\varphi)r + E = 0,$$

et donnera pour r les deux valeurs: $r_1 = P \pm \sqrt{Q}$, $r_2 = P \mp \sqrt{Q}$, où

$$P = -\frac{C\,\mathrm{Cos}\,\varphi + D\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{A\,\mathrm{Cos}^2\varphi + B\,\mathrm{Sin}^2\varphi},$$

$$Q = \frac{(C\,\mathrm{Cos}\,\varphi + D\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^2 - 4E(A\,\mathrm{Cos}^2\varphi + B\,\mathrm{Sin}^2\varphi)}{4(A\,\mathrm{Cos}^2\varphi + B\,\mathrm{Sin}^2\varphi)^2};$$

de sorte que $r_1 - r_2$ soit la longueur de la corde qui correspond à l'angle φ. Le rayon vecteur ϱ du point qui divise cette corde dans le rapport de p à q sera donc

$$\varrho = r_2 + \frac{p}{p+q}(r_1 - r_2) = \frac{p}{p+q}r_1 + \frac{q}{p+q}r_2,$$

c'est-à-dire, posant

$$\frac{p-q}{p+q} = \mu,$$

on aura, pour l'équation polaire du lieu des points de division,

$$\varrho = P \pm \mu\sqrt{Q} \quad \text{ou} \quad (\varrho - P)^2 = \mu^2 Q,$$

dont on déduit, après la substitution des valeurs de P et Q, et remplaçant $\varrho\,\mathrm{Cos}\,\varphi$ et $\varrho\,\mathrm{Sin}\,\varphi$ par x et y, pour l'équation de ce lieu en coordonnées rectangulaires,

$$[2(Ax^2 + By^2) + Cx + Dy]^2 = \mu^2[(Cx + Dy)^2 - 4E(Ax^2 + By^2)].$$

Généralement cette équation sera du quatrième dégré; mais si l'on a $E = 0$, c'est-à-dire, si le point de concours des cordes est pris sur la conique elle même, elle se réduit à

$$2Ax^2 + 2By^2 + C(1 \mp \mu)x + D(1 \mp \mu)y = 0,$$

ce qui indique, quelque soit μ, un système de deux coniques

semblables et semblablement placées à la première, et passant par le point de concours. Si l'on a $\mu=0$, ou $p=q$, c'est-à-dire si les cordes sont divisées en deux parties égales, l'équation du quatrième dégré se réduit à

$$2Ax^2+2By^2+Cx+Dy=0,$$

quelque soit E etc. Des équations trouvées on déduira aisément le rapport de similitude et le centre de similitude qui correspond au point de concours.

Groningue 21. Avril 1864.

Betreffend den im Archiv. Thl. XLI. Nr. XXVII. entwickelten „Wichtigen allgemeinen Satz von den Flächen."

Rücksichtlich des von mir in der Abhandlung:

> Wichtiger allgemeiner Satz von den Flächen. Von dem Herausgeber. Archiv. Theil XLI. Nr. XXVII. S. 241.

ausführlich entwickelten und begründeten allgemeinen Satzes von den Flächen, der nach meiner Meinung ausser seinem allgemeinen geometrischen Interesse namentlich für höhere Geodäsie von besonderer Bedeutung ist, — was auch mein leider nun verstorbener Freund Gerling in Marburg, welcher in auf Geodäsie Bezug habenden Dingen immer als eine Autorität zu nennen sein wird, in seinem letzten, nicht lange vor seinem Tode an mich geschriebenen Briefe, wenigstens rücksichtlich des speciellen, das Ellipsoid betreffenden, von mir damals für's Erste nur bewiesenen Satzes (Archiv. Thl. XL. S. 312.), freudigst und freiwillig anerkannte, — hat der durch verschiedene schöne Arbeiten den Mathematikern längst in der vortheilhaftesten Weise bekannte Herr Professor Eugenio Beltrami an der Universität in Pisa *) in einem überaus freundlichen Briefe (Pise, 20. Avril 1864) mir die für mich in jeder Beziehung interessante Mittheilung gemacht, dass sich der in Rede stehende Satz, ganz in derselben Form und auf denselben Ausdruck gebracht, wie er von mir in Thl. XLI. S. 292. und S. 293. gegeben worden ist, mit besonderer Leichtigkeit auch aus der allgemeinen Theorie des Maasses der Krümmung von Gauss ableiten lässt. Indem ich mich sehr freue, dass der Satz

---

*) Herr Beltrami ist jetzt ordentlicher Professor der theoretischen Geodäsie an der genannten Universität.

eine solche neue Bestätigung erhalten hat, und Herrn Beltrami für seine Mittheilung meinen wärmsten Dank ausspreche, erlaube ich mir, die den Satz speciell betreffende Stelle seines Briefs, mit Weglassung alles Uebrigen, was jetzt nicht hierher gehört, nachstehend abdrucken zu lassen, wobei ich bemerke, dass Herr Beltrami sich im Folgenden durchgängig der von mir in der angeführten Abhandlung gebrauchten Zeichen bedient hat:

„Pour ce qui est du théorème fondamental, page 52*), il est sans doute très-remarquable, surtout si on le rapproche de celui que Gauss a donné relativement à la mesure de la courbure, et qui n'en devient que plus important et plus significatif. Je remarque que sa verité peut être rendue presque évidente par la considération de l'indicatrice, qui, dans l'hypothèse $T<0$, est une ellipse. Soit en effet ϱ un des rayons de cette ellipse. Le rayon de courbure R de la section normale correspondante peut être désigné par ϱ^2, et par suite on a, suivant vos notations, $\underset{0}{\overset{2\pi}{\mathrm{M}}}(R)$ $=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varrho^2 dw$. Or $\varrho^2 dw$ est le double du secteur elliptique compris entre les deux rayons infiniment proches $\varrho(w)$ et $\varrho(w+dw)$, donc $\int_0^\pi \varrho^2 dw$ est l'aire totale de l'ellipse, $\pi\sqrt{R'R''}$, d'où $\underset{0}{\overset{2\pi}{M}}(R)=\sqrt{R'R''}$. Mais très-probablement cette remarque ne vous est pas echappé **), bien que vous ayez préféré, et avec raison, de démontrer le théorème à l'aide des seules formules fondamentales de la théorie des surfaces, sans vous appuyer sur des notions moins simples ou moins directes. Celles-ci du reste pourraient se tirer bien facilement de vos formules, dans lesquelles elles sont implicitement contenues, ainsi que beaucoup d'autres, dont vous avez peut être donné le développement dans le Mémoire intitulé „Allgemeine Theorie der Krümmung der Flächen" que vous citez au commencement de celui-ci, et que je regrette de ne pas connaître."

Erlauben darf ich mir wohl, dem Obigen noch hinzuzufügen, dass, wie auch Herr Beltrami vollständig anerkennt, meine in der Abhandlung Thl. XLI. Nr. XXVII. gegebene Entwickelung eine durchaus selbstständige ist, die auch noch zu mehreren anderen

---

*) Diese Pagina bezieht sich auf die Separatabdrücke der Abhandlung; im Archiv. Thl. XLI. S. 292. und S. 293.

**) Die von Herrn Beltrami gemachte Bemerkung war mir in der That entgangen.

bemerkenswerthen analytischen Ausdrücken, z. B. für die Halbmesser der grössten und kleinsten Krümmung u. s. w., geführt hat, welche, so zu sagen, als ganz independent zu betrachten sind, wobei ich auch wiederholt auf meine, das allgemeine dreiaxige Ellipsoid speciell betreffende Abhandlung in Thl. XL. Nr. XXI., auf die in derselben durchgängig in Anwendung gebrachten reducirten Längen und reducirten Breiten (m. s. über diese für das dreiaxige Ellipsoid von mir neu eingeführten Begriffe mit Mehrerem Archiv. Thl. XXXVI. Nr. VIII. S. 79.), u. s. w., verweise.

Mitte Mai 1864. Grunert.

Ueber einen Satz von dem Ellipsoid.

Von Herrn F. Unferdinger, Professor der Mathematik an der Oberrealschule am Bauernmarkte in Wien.

In Thl. XLI. p. 118. hat Herr Professor Grunert den Satz bewiesen: Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller durch denselben Punkt gehenden Sehnen einer Ellipse (der Punkt mag innerhalb oder ausserhalb liegen) ist wieder eine Ellipse, deren Mittelpunkt auf der Mitte der Strecke liegt zwischen dem gegebenen Punkt und dem Mittelpunkt der gegebenen Ellipse, deren Axen zu denen der letzteren parallel sind und welche immer durch die beiden genannten Punkte geht. Verwandelt sich die Ellipse in einen Kreis, so ist der genannte geometrische Ort auch ein Kreis, welcher durch den festen Punkt und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht, deren Entfernung also seinem Durchmesser gleich ist. Liegt der feste Punkt in der Peripherie, so berührt der Ortskreis den gegebenen von Innen in dem festen Punkt und in diesem Falle ist der Beweis seiner Ortseigenschaft auch nach der Euklid'schen Methode leicht.

Dieser Satz, welcher gewiss noch für die Linien der zweiten Ordnung überhaupt einer bemerkenswerthen Verallgemeinerung fähig ist, hat mich angeregt, darüber nachzudenken, ob nicht ein ähnlicher Satz für das dreiaxige Ellipsoid gefunden werden kann. Nachfolgend das Resultat. — Unter der gewöhnlichen Voraussetzung für die Stellung des rechtwinkeligen Coordinaten-Systems ist die Gleichung des Ellipsoides:

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1;$$

die Gleichungen der Geraden, welche durch den festen Punkt (x', y', z') geht, seien:

(2) $$y-y'=A(x-x'),\quad z-z'=B(x-x').$$

Werden diese drei Gleichungen nach x, y, z aufgelöset, so erhält man die Coordinaten der Durchschnitte der Geraden mit der Fläche. Eliminirt man der Reihe nach y, z, dann x, z, dann x, y, so folgt:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{A(x-x')+y'}{b}\right)^2+\left(\frac{B(x-x')+z'}{c}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{y-y'+Ax'}{aA}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{B(y-y')+Az'}{cA}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{z-z'+Bx'}{aB}\right)^2+\left(\frac{A(z-z')+By'}{bB}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1;$$

oder, wenn man entwickelt und nach absteigenden Potenzen von x, y, z ordnet:

(3)

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}+\frac{B^2}{c^2}\right)+2x\left\{\frac{A}{b^2}(y'-Ax')+\frac{B}{c^2}(z'-Bx')\right\}+C=0,$$

$$y^2\left(\frac{1}{a^2A^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{B^2}{c^2A^2}\right)+2y\left\{\frac{1}{a^2A}(x'-\frac{1}{A}y')+\frac{B}{c^2A}(z'-\frac{B}{A}y')\right\}+C'=0,$$

$$z^2\left(\frac{1}{a^2B^2}+\frac{A^2}{b^2B^2}+\frac{1}{c^2}\right)+2z\left\{\frac{1}{a^2B}(x'-\frac{1}{B}z')+\frac{A}{b^2B}(y'-\frac{A}{B}z')\right\}+C''=0;$$

wobei C, C', C'' die von x, y, z unabhängigen Glieder bezeichnen. Die Auflösung dieser drei quadratischen Gleichungen gibt die Coordinaten $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ der zwei Punkte, in welchen die durch den Punkt (x', y', z') gehende Sehne die krumme Oberfläche schneidet. Sind nun u, v, w die Coordinaten des Mittelpunktes der Sehne, so ist bekanntlich $2u=x_1+x_2$, $2v=y_1+y_2$, $2w=z_1+z_2$. Denkt man sich die vorstehenden Gleichungen (3) der Reihe nach durch die Coefficienten von x^2, y^2, z^2 dividirt, so müssen die alsdann entstehenden Coefficienten von x, y, z, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, nach einem bekannten Theoreme der Reihe nach gleich sein x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2. Auf diese Art erhält man folgende Gleichungen:

(4)

$$u=x'-\frac{\frac{1}{a^2}x'+\frac{A}{b^2}y'+\frac{B}{c^2}z'}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}+\frac{B^2}{c^2}},\quad v=y'-\frac{\frac{1}{a^2}x'+\frac{A}{b^2}y'+\frac{B}{c^2}z'}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}+\frac{B^2}{c^2}}A,$$

$$w=z'-\frac{\frac{1}{a^2}x'+\frac{A}{b^2}y'+\frac{B}{c^2}z'}{\frac{1}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}+\frac{B^2}{c^2}}B;$$

aus welchen man mit Leichtigkeit folgert:

$$A = \frac{v-y'}{u-x'}, \quad B = \frac{w-z'}{u-x'}.$$

Diese Werthe, in irgend eine der Gleichungen (4) eingesetzt, geben als Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes:

$$\frac{(u-x')^2}{a^2} + \frac{(v-y')^2}{b^2} + \frac{(w-z')^2}{c^2} + \frac{(u-x')x'}{a^2} + \frac{(v-y')y'}{b^2} + \frac{(w-z')z'}{c^2} = 0$$

oder auch:

(5)

$$\left(\frac{u-\frac{1}{2}x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{v-\frac{1}{2}y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{w-\frac{1}{2}z'}{c}\right)^2 = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{c}\right)^2\right\},$$

welche offenbar ein Ellipsoid bezeichnet, dessen drei Axen der Reihe nach zu jenen a, b, c parallel sind; und wenn wir sie durch a', b', c' bezeichnen, so ist:

(6)

$$a' = \frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{c}\right)^2}, \quad b' = \frac{b}{2}\sqrt{\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{c}\right)^2},$$

$$c' = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{c}\right)^2};$$

während $\frac{1}{2}x'$, $\frac{1}{2}y'$, $\frac{1}{2}z'$ die Coordinaten ihres Mittelpunktes sind. Wie man sieht wird die Gleichung (5) erfüllt, sowohl für $u = v = w = 0$, als auch für $u = x'$, $v = y'$, $w = z'$; es gilt daher folgender

Lehrsatz.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller durch denselben Punkt gehenden Sehnen eines Ellipsoides (dieser Punkt mag innerhalb oder ausserhalb liegen) ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt auf der Mitte der Strecke liegt zwischen dem festen Punkt und dem Mittelpunkt des gegebenen Ellipsoides, dessen Axen parallel sind zu den Axen des primitiven Ellipsoides und welches immer durch den Mittelpunkt desselben und den festen Punkt geht.

Verwandelt sich das Ellipsoid in eine Kugel, so ist auch der gesuchte Ort eine Kugel, deren Gleichung:

$$(7) \qquad (u-\tfrac{1}{2}x')^2 + (v-\tfrac{1}{2}y')^2 + (w-\tfrac{1}{2}z')^2 = \tfrac{1}{4}(x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

dieselbe geht also immer durch den gegebenen Punkt $(x'y'z')$ und durch den Mittelpunkt der primitiven Kugel; die Entfernung dieser zwei Punkte $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ ist ihr Durchmesser. Liegt der feste Punkt auf der Oberfläche der gegebenen Kugel, so berührt die Ortskugel dieselbe von Innen in diesem Punkt.

Es hat keinerlei Schwierigkeit, ähnliche Sätze für das ein- und zweitheilige Hyperboloid, sowie für das ellipt. Paraboloid aufzustellen.

Logarithmen

der

Sekanten.

(Zur beliebigen Einlage in die Köhlerschen Tafeln, 3. Aufl., hinter S. 120.)

	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
′	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3
0	0,0	2,2	8.8	19,8	35.3	55,2	79,5	108,3	141,6	179,3
1	0.0	2,3	9.0	20,1	35,6	55.6	80,0	108,8	142.2	180,0
2	0,0	2,4	9,1	20.3	35,9	55,9	80,4	109,3	142,8	180,7
3	0,0	2,4	9,3	20,5	36,2	56,3	80,9	109,9	143,4	181,3
4	0,0	2,5	9,4	20.7	36,5	56,7	81,3	110,4	144,0	182,0
5	0,0	2,6	9,6	21,0	36.8	57,0	81,8	110,9	144,5	182,7
6	0,0	2,7	9,7	21.2	37,1	57,4	82.2	111,4	145,1	183,4
7	0,0	2,7	9,9	21,4	37,4	57,8	82,7	112,0	145,7	184,0
8	0,0	2.8	10.0	21.6	37.7	58,2	83,1	112,5	146,4	184.7
9	0,0	2,9	10,2	21,9	38,0	58,6	83,6	113,0	147,0	185,4
10	0,1	3,0	10,3	22,1	38,3	58,9	84,0	113,5	147,6	186,1
11	0,1	3,1	10.5	22,3	38,6	59.3	84.5	114,1	148,2	186,7
12	0,1	3.2	10.7	22,6	38,9	59,7	84,9	114,6	148,8	187.4
13	0,1	3.3	10.8	22.8	39,2	60,1	85,4	115,1	149,4	188,1
14	0.1	3,3	11,0	23.1	39,5	60,5	85.8	115,7	150,0	188,8
15	0,1	3,4	11,2	23.3	39,8	60,9	86 3	116,2	150,6	189,5
16	0.2	3,5	11,3	23.5	40,1	61,2	86,7	116.7	151,2	190,2
17	0,2	3.6	11.5	23.8	40.5	61.6	87,2	117.3	151.8	190,9
18	0,2	3,7	11,7	24,0	40,8	62,0	87,7	117,8	152,4	191,5
19	0,2	3,8	11,8	24.3	41,1	62,4	88,2	118,4	153,0	192,2
20	0.2	3,9	12.0	24.5	41.4	62.8	88,6	118.9	153,7	192,9
21	0,3	4,0	12,2	24.7	41.7	63.2	89,1	119,4	154,3	193,6
22	0,3	4,1	12,3	25,0	42,1	63,6	89,6	120,0	154,9	194,3
23	0.3	4,2	12,5	25,2	42.4	64,0	90,0	120.5	155,5	195.0
24	0,3	4,3	12,7	25,5	42,7	64,4	90,5	121,1	156,1	195,7
25	0,4	4.4	12.9	25,7	43.0	64,8	91,0	121,6	156.8	196,4
26	0,4	4.5	13.1	26,0	43,3	65,2	91.4	122,2	157.4	197,1
27	0,4	4,6	13,2	26,3	43,7	65,6	91,9	122,7	158,0	197,8
28	0.5	4,7	13.4	26,5	44,0	66,0	92,4	123,3	158,6	198,5
29	0,5	4,8	13,6	26,8	44,3	66,4	92,9	123,8	159,3	199,2
30	0,5	5,0	13,8	27,0	44,7	66,8	93,4	124,4	159,9	199.9

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3	sec/3
30	0,5	5,0	13,8	27,0	44,7	66,8	93,4	124,4	159,9	199,9
31	0,6	5,1	14.0	27,3	45,0	67,2	93,8	124,9	160,5	200,6
32	0,6	5,2	14,2	27,5	45,4	67,6	94,3	125,5	161,2	201,3
33	0,7	5,3	14,3	27,8	45,8	68,0	94,8	126,0	161,8	202,0
34	0,7	5,4	14,5	28,0	46,1	68,4	95,3	126,6	162,4	202,7
35	0,7	5,5	14,7	28,3	46,4	68,8	95,8	127,2	163,1	203,5
36	0,8	5,6	14,9	28,6	46,8	69,3	96,3	127,7	163,7	204,2
37	0,8	5,8	15,1	28,9	47,1	69,7	96,7	128,3	164,3	204.9
38	0,9	5,9	15,3	29,1	47,4	70,1	97,2	128,9	165,0	205,6
39	0,9	6,0	15,5	29,4	47,8	70,5	97,7	129,4	165,6	206,3
40	1,0	6,1	15,7	29,6	48,1	70,9	98,2	130,0	166,2	207,0
41	1,0	6.2	15,9	29,9	48,5	71,3	98.7	130,6	166,9	207,7
42	1,1	6,4	16,1	30,2	48,8	71,7	99,2	131,1	167,5	208,5
43	1,1	6,5	16,3	30,5	49,2	72,2	99,7	131,7	168,2	209,2
44	1,2	6.6	16,5	30.7	49,5	72,6	100,2	132,3	168,8	209,9
45	1,2	6,8	16,7	31,0	49,8	73,0	100,7	132,8	169,5	210,6
46	1,3	6.9	16,9	31,3	50,2	73,4	101,2	133,4	170,2	211,3
47	1,3	7,0	17,1	31,6	50,5	73,9	101,7	134,0	170,8	212,1
48	1,4	7,1	17,3	31,8	50.9	74,3	102,2	134,6	171,4	212,8
49	1,5	7,3	17,5	32,1	51,2	74,7	102,7	135,1	172,1	213,5
50	1,5	7,4	17,7	32,4	51,6	75,2	103,2	135,7	172,7	214,3
51	1,6	7,5	17,9	32,7	51,9	75,6	103,7	136,3	173,4	215,0
52	1,7	7,7	18,1	33,0	52.3	76,0	104,2	136,9	174,0	215,7
53	1.7	7,8	18,3	33,3	52,6	76,5	104,7	137.5	174,7	216.4
54	1,8	8,0	18,5	33,5	53.0	76,9	105,2	138,0	175,4	217,2
55	1,8	8.1	18,7	33,8	53,4	77,3	105,8	138,6	176.0	217,9
56	1.9	8.2	19,0	34,1	53,7	77.8	106.3	139.2	176.7	218,7
57	2,0	8.4	19,2	34,4	54,1	78.2	106,8	139,8	177,4	219,4
58	2,1	8,5	19.4	34,7	54,5	78,6	107,3	140,4	178,0	220,1
59	2,1	8,7	19 6	35,0	54,8	79,1	107,8	141,0	178.7	220,9
60	2,2	8,8	19.8	35.3	55,2	79,5	108,3	141.6	179.3	221.6

Tafel II.

$$\text{Log}\sin x + \frac{\sec}{3} - \text{Corr.} = \text{Log arc}\, x$$

Winkel	Corr.	Winkel	Corr.
	0,00000,0		0,00000,5
4° 51′ 31″		8° 50′ 9″	
	0,1		0,6
6 23 28		9 12 40	
	0,2		0,7
7 15 35?		9 32 43	
	0,3		0,8
7 53 41		9 50 50	
	0,4		0,9
8 24 18		10 7 25	
	0,5		1,0
8 50 9		10 22 43	

10000″ = 2° 46′ 40″
20000″ = 5° 33′ 20″
30000″ = 8° 20′

Die Umwandlung der Secunden bis 10,000″ befindet sich bei den Logarithmen der Zahlen.

XVI.

Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vorgelegten cubischen Gleichung.

(Zweite Abtheilung, als Fortsetzung der Abhandlung Nr. VI. in Thl. XLI. S. 68.)

Von

Herrn *Ferdinand Kerz,*

Major in dem Grossherzogl. Hessischen Gendarmerie-Corps in Darmstadt.

41.

Wir können nach der ersten Abtheilung dieser Abhandlung alle Gleichungen von der Form

$$0 = a + by + cy^2 + y^3,$$

für welche also die Coefficienten der Glieder zum Theil auch negativ oder Null sein können, in zwei Hauptklassen abtheilen; nämlich in solche, für welche das Verhältniss der Coefficienten der ersten und zweiten Potenz der Unbekannten, b und c, die Möglichkeit nur einer reellen Wurzel gestattet, was für

$$c^2 < 3b$$

stets der Fall ist, und in solche, für welche dieses Verhältniss die Möglichkeit dreier reellen Wurzeln zulässt, d. h. für welche die Bedingung

$$c^2 > 3b$$

stattfindet.

Da für die Bedingung $c^2 < 3b$, b nicht negativ sein kann, so gehören zu dieser Kategorie folgende vier verschiedene Formen:

$$
\begin{array}{cccccc}
0 = & +a & +by & +cy^2 & +y^3 \\
 & - & + & + & + \\
 & + & + & - & + \\
 & - & + & - & +
\end{array}
$$

42.

Befreit man jede dieser Gleichungen von dem Gliede cy^2, indem man

$$\mp \frac{c}{3} + x$$

für y schreibt, so ergiebt sich:

$$1) \qquad 0 = [\{\pm\} a \underbrace{\mp \frac{bc}{3} + \begin{matrix} 2. \\ 4. \end{matrix} \left\{ \frac{c^3}{27} \right]}_{A} + \underbrace{[b \begin{matrix} -\frac{1}{3}. \\ +1. \end{matrix} \right\} . c^2]}_{B} . x + x^3,$$

aus welcher Darstellung hervorgeht, dass B stets potitiv ist. Erinnern wir uns nun der cardanischen Formel

2)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{3}\right)^3}},$$

so überzeugen wir uns leicht, dass für einen positiven Werth von B die Quadratwurzelgrösse dieser Formel stets reell, und dass daher die cardanische Formel zur Auflösung derjenigen cubischen Gleichungen, für welche das Quadrat des Coefficienten der zweiten Potenz der Unbekannter kleiner ist wie der dreifache Coefficient der ersten Potenz der Unbekannten, praktisch brauchbar sei.

Indem wir uns vorbehalten, auf diese Klasse von Gleichungen zurückzukommen, wollen wir wieder die Bedingung $c^2 > 3b$ unterstellen.

43.

Anstatt der Gleichung

$$1) \qquad 0 = +a + by + cy^2 + y^3$$

können wir schreiben:

$$2) \qquad 0 = +27a + 9b(3y) + 3c(3y)^2 + (3y)^3.$$

Findet hierfür die Bedingung [17. A. $\begin{matrix} 2) \\ 5) \end{matrix}$] statt, ist nämlich:

3) $$27a = 3bc - 2(c^2 - 3b)(c \pm \sqrt{c^2 - 3b}),$$

so ist:

4) $$(3y) = -c \pm 2\sqrt{c^2 - 3b}, \qquad [17.\ B.\ 7)]$$

und folglich

5) $$+c \mp 2\sqrt{c^2 - 3b} + (3y)$$

ein genauer Faktor der Gleichung 2).

Findet aber für Gleichung 2) die Bedingungsungleichung [17. A. $\genfrac{}{}{0pt}{}{1)}{6)}$] statt, ist nämlich:

6) $$27a \lessgtr 3bc - 2(c^2 - 3b)(c \pm \sqrt{c^2 - 3b}),$$

und setzen wir:

7) $$a = q \mp r,$$

indem wir q so wählen, dass

8) $$27q = 3bc - 2(c^2 - 3b)(c \pm \sqrt{c^2 - 3b})$$

ist, (in welchem Falle also auch r eine bekannte Grösse ausdrückt), so sei:

9) $$(3y) = -c \pm 2\sqrt{c^2 - 3b} + p,$$

in welchem Ausdruck p eine noch zu bestimmende Grösse bezeichnet.

In diesem Falle muss

10) $$+c \mp 2\sqrt{c^2 - 3b} - p + (3y)$$

ein genauer Faktor der Gleichung 2) sein.

44.

Wenn wir nun die Gleichung [43. 2)] in Bezug auf den hypothetischen Faktor [43. 10)] zerlegen, so ergiebt sich, indem wir nach fallenden Potenzen ordnen:

1)

$$\begin{aligned}
0 &= (3y)^3 + 3c(3y)^2 + 9b(3y) + 27a \\
&= (3y)^3 + [c \mp 2\sqrt{c^2 - 3b} - p](3y)^2 + [2c \pm 2\sqrt{c^2 - 3b} + p](3y)^2 \\
&\quad + [12b - 2c^2 \mp 2c\sqrt{c^2 - 3b} - (c \pm 4\sqrt{c^2 - 3b}).p - p^2](3y) \\
&\quad + [2c^2 - 3b \pm 2c\sqrt{c^2 - 3b} + (c \pm 4\sqrt{c^2 - 3b}).p + p^2](3y) \\
&\quad + [3bc - 2(c^2 - 3b)(c \pm \sqrt{c^2 - 3b}) - 9(c^2 - 3b).p \mp 6\sqrt{c^2 - 3b}.p^2 - p^3.
\end{aligned}$$

Da nun nach [43. 6) — 8)]

2) $$27(q \mp r)$$
$$= [3bc - 2(c^2 - 3b)(c \pm \sqrt{c^2 - 3b}) - 9(c^2 - 3b) . p \mp 6\sqrt{c^2 - 3b} . p^2 - p^3$$

sein muss, so folgt, im Hinblicke auf [43. 8)], alsbald:

3) $$27(\mp r) = -9(c^2 - 3b) . p \mp 6\sqrt{c^2 - 3b} . p^2 - p^3$$

oder

4) $$\mp \frac{27r}{(c^2 - 3b)^{\frac{3}{2}}} = -9 . \left[\frac{p}{(c^2 - 3b)^{\frac{1}{2}}}\right] \mp 6 \left[\frac{p}{(c^2 - 3b)^{\frac{1}{2}}}\right]^2 - \left[\frac{p}{(c^2 - 3b)^{\frac{1}{2}}}\right]^3 .$$

Setzen wir:

5) $$\frac{27r}{(c^2 - 3b)^{\frac{3}{2}}} = R,$$

6) $$p = P . (c^2 - 3b)^{\frac{1}{2}},$$

so folgt:

45.

1) $$\mp R = -9P \mp 6P^2 - P^3.$$

In gleicher Weise folgt, wenn

2) $$27a \gtrless 3bc - 2(c^2 - 3b)(c \pm \sqrt{c^2 - 3b}) \qquad [17. \text{A}. \tfrac{3.}{4.}]$$

ist, und wenn man:

3) $$a = q \pm r$$

setzt.

4) $$\pm R = -9P \mp 6P^2 - P^3.$$

Wenn p negativ ist, so erhalten auch die ungeraden Potenzen von P das entgegengesetzte Vorzeichen und es ergeben sich somit acht Fälle der verschiedenen Zeichenwechsel für die Gleichungen 1) und 4).

5) Es lässt sich indessen leicht nachweisen, dass sich diese acht Fälle auf folgende zwei Hauptfälle zurückführen lassen:

I. $+R=+9P-6P^2+P^3,$

II. $+R=+9P+6P^2+P^3,$

sowie, dass der Gleichung I. drei reelle, der Gleichung II. aber eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln entsprechen.

46.

Wären wir im Stande, diese beiden Gleichungen, für welche das Quadrat des Coefficienten der zweiten Potenz der Unbekannten gleich ist dem vierfachen Coefficienten der ersten Potenz der Unbekannten, nämlich $6^2=4.9$, allgemein aufzulösen, so liesse sich p und somit auch y allgemein bestimmen.

Da diese Gleichungen indessen nur zwei veränderliche Grössen, R und P, enthalten, welche von einander abhängen, so können sie uns zur Bildung von Tabellen dienen, welche für auf einander folgende Werthe von R die zugehörigen Werthe von P angeben, und welche daher für Werthe von R, welche in ihnen nicht genau enthalten sind, annähernde Werthe von P, und somit auch von p und y, in Zahlenfällen liefern.

Wir haben nach ihnen solche Tabellen nachstehend entworfen, welche selbstredend einer grossen Erweiterung fähig sind.

Ehe wir jedoch von denselben Gebrauch machen, wollen wir die bisher gefundenen Resultate auch auf die verschiedenen möglichen Vorzeichen der allgemein gegebenen cubischen Gleichung anwenden und zusammenstellen. Hierbei wollen wir der Kürze wegen den Werth von q [43. 8.], wenn für ihn das obere Vorzeichen der Wurzelgrösse gültig ist, mit q_+ und, wenn für ihn das untere Vorzeichen gültig ist, mit q_- bezeichnen.

Zusammenstellung der verschiedenen Fälle, welche sich zur annähernden Bestimmung der reellen Wurzeln einer vorgelegten cubischen Gleichung $0=a+by+cy^2+y^3$, $c^2>3b$ vorausgesetzt, ergeben.

47.

$0=+a+by+cy^2+y^3$. $c^2<4b$.

$+27q=3bc-2(c^2-3b)(c\pm\sqrt{c^2-3b})$.

1)	$a<q^+$	$q^+-a=r$	Tab. II.	$(3y)=-c+2\sqrt{c^2-3b}+p$
2)	$a>q^+$	$a-q^+=r$	„ I.	$-$ $+$ $-$
3)	$a<q_-$	$q_--a=r$	„ I.	$-$ $-$ $+$
4)	$a>q_-$	$a-q_-=r$	„ II.	$-$ $-$ $-$

48.

$0=\mp a+by+cy^2+y^3$. $c^2>4b$, für $+a$.

$\mp 27q=3bc-2(c^2-3b)(c\pm\sqrt{c^2-3b})$. $c^2 \gtrless 4b$, für $-a$.

1)	$-a<\pm q^+$	$a\pm q^+=r$	Tab. II.	$(3y)=-c+2\sqrt{c^2-3b}+p$
2)	$-a>-q^+$	$q^+-a=r$	„ I.	$-$ $+$ $-$
3)	$+a<+q_-$	$q_--a=r$	„ I.	$-$ $-$ $+$
4)	$+a>+q_-$	$a-q_-=r$	„ II.	$-$ $-$ $-$

49.

$0=\mp a-by+cy^2+y^3$.

$\mp 27q=-3bc-2(c^2+3b)(c\pm\sqrt{c^2+3b})$.

1)	$-a<-q^+$	$a-q^+=r$	Tab. II.	$(3y)=-c+2\sqrt{c^2+3b}+p$
2)	$-a>-q^+$	$q^+-a=r$	„ I.	$-$ $+$ $-$
3)	$+a<+q_-$	$q_--a=r$	„ I.	$-$ $-$ $+$
4)	$+a>+q_-$	$a-q_-=r$	„ II.	$-$ $-$ $-$

50.

$0=-a+by-cy^2+y^3.$ $\qquad c^2<4b.$

$-27q=-3bc+2(c^2-3b)(c\pm\sqrt{c^2-3b}).$

1)	$-a>-q^+$	$q^+-a=r$	Tab. II.	$(3y)=+c-2\sqrt{c^2-3b}-p$
2)	$-a<-q^+$	$a-q^+=r$	„ I.	$+\ -\ \ +$
3)	$-a>-q_-$	$q_--a=r$	„ I.	$+\ +\ \ -$
4)	$-a<-q_-$	$a-q_-=r$	„ II.	$+\ +\ \ +$

51.

$0=\pm a+by-cy^2+y^3.$ $\qquad c^2>4b$, für $-a$.

$\pm 27q=-3bc+2(c^2-3b)(c\pm\sqrt{c^2-3b}).$ $\quad c^2\gtrless 4b$, für $+a$.

1)	$+a>\mp q^+$	$a\pm q^+=r$	Tab. II.	$(3y)=+c-2\sqrt{c^2-3b}-p$
2)	$+a<+q^+$	$q^+-a=r$	„ I.	$+\ -\ \ +$
3)	$-a>-q_-$	$q_--a=r$	„ I.	$+\ +\ \ -$
4)	$-a<-q_-$	$a-q_-=r$	„ II.	$+\ +\ \ +$

52.

$0=\pm a-by-cy^2+y^3.$

$+27q=+3bc+2(c^2+3b)(c\pm\sqrt{c^2+3b}).$

1)	$+a>+q^+$	$a-q^+=r$	Tab. II.	$(3y)=+c-2\sqrt{c^2+3b}-p$
2)	$+a<+q^+$	$q^+-a=r$	„ I.	$+\ -\ \ +$
3)	$-a>-q_-$	$q_--a=r$	„ I.	$+\ +\ \ -$
4)	$-a<-q_-$	$a-q_-=r$	„ II.	$+\ +\ \ +$

53.

Tabelle I.

P	R	$D=0{,}00$	P	R	$D=0{,}00$
0,000	0,000000000	89940	0,030	0,264627	86368
0,001	0,008994001	89820	0,031	0,273263791	86250
0,002	0,017976008	89700	0,032	0,281888768	86132
0,003	0,026946027	89580	0,033	0,290501937	86014
0,004	0,035904064	89461	0,034	0,299103304	85896
0,005	0,044850125	89341	0,035	0,307692875	85778
0,006	0,053784216	89221	0,036	0,316270656	85660
0,007	0,062706343	89102	0,037	0,324836653	85542
0,008	0,071616512	88982	0,038	0,333390872	85424
0,009	0,080514729	88863	0,039	0,341933319	85307
0,010	0,089401	88743	0,040	0,350464	85189
0,011	0,098275331	88624	0,041	0,358982921	85072
0,012	0,107137728	88505	0,042	0,367490088	84954
0,013	0,115988197	88385	0,043	0,375985507	84837
0,014	0,124826744	88266	0,044	0,384469184	84719
0,015	0,133653375	88147	0,045	0,392941125	84602
0,016	0,142468096	88028	0,046	0,401401336	84485
0,017	0,151270913	87909	0,047	0,409849823	84368
0,018	0,160061832	87790	0,048	0,418286592	84251
0,019	0,168840859	87671	0,049	0,426711649	84133
0,020	0,177608	87553	0,050	0,435125	84016
0,021	0,186363261	87434	0,051	0,443526651	83900
0,022	0,195106648	87315	0,052	0,451916608	83783
0,023	0,203838167	87197	0,053	0,460294877	83666
0,024	0,212557824	87078	0,054	0,468661464	83549
0,025	0,221265625	86959	0,055	0,477016375	83432
0,026	0,229961576	86841	0,056	0,485359616	83316
0,027	0,238645683	86723	0,057	0,493691193	83199
0,028	0,247317952	86604	0,058	0,502011112	83083
0,029	0,255978389	86486	0,059	0,510319379	82966
0,030	0,264627		0,060	0,518616	

Tabelle I.

P	R	$D=0,00$	P	R	$D=0,00$
0,060	0,518616	82850	0,090	0,762129	79386
0,061	0,526900981	82733	0,091	0,770067571	79271
0,062	0,535174328	82617	0,092	0,777994688	79157
0,063	0,543436047	82501	0,093	0,785910357	79042
0,064	0,551686144	82385	0,094	0,793814584	78928
0,065	0,559924625	82269	0,095	0,801707375	78814
0,066	0,568151496	82153	0,096	0,809588736	78700
0,067	0,576366763	82037	0,097	0,817458673	78585
0,068	0,584570432	81921	0,098	0,825317192	78471
0,069	0,592762509	81805	0,099	0,833164299	78357
0,070	0,600943	81689	0,100	0,841	78243
0,071	0,609111911	81573	0,101	0,848824301	78129
0,072	0,617269248	81458	0,102	0,856637208	78015
0,073	0,625415017	81342	0,103	0,864438727	77901
0,074	0,633549224	81226	0,104	0,872228864	77788
0,075	0,641671875	81111	0,105	0,880007625	77674
0,076	0,649782976	80996	0,106	0,887775016	77560
0,077	0,657882533	80880	0,107	0,895531043	77447
0,078	0,665970552	80765	0,108	0,903275712	77333
0,079	0,674047039	80650	0,109	0,911009029	77220
0,080	0,682112	80534	0,110	0,918731	77106
0,081	0,690165441	80419	0,111	0,926441631	76993
0,082	0,698207368	80304	0,112	0,934140928	76880
0,083	0,706237787	80189	0,113	0,941828897	76766
0,084	0,714256704	80074	0,114	0,949505544	76653
0,085	0,722264125	79959	0,115	0,957170875	76540
0,086	0,730260056	79844	0,116	0,964824896	76427
0,087	0,738244503	79730	0,117	0,972467613	76314
0,088	0,746217472	79615	0,118	0,980099032	76201
0,089	0,754178969	79500	0,119	0,987719159	76088
0,090	0,762129		0,120	0,995328	

Tabelle I.

P	R	$D=0,00$	P	R	$D=0,00$
0,120	0,995328	75750	0,30	2,187	0,0562
0,125	1,033203125	75188	0,31	2,243191	0,0552
0,130	1,070797	74627	0,32	2,298368	0,0542
0,135	1,108110375	74067	0,33	2,352537	0,0532
0,140	1,145144	73509	0,34	2,405704	0,0522
0,145	1,181898625	72953	0,35	2,457875	0,0512
0,150	1,218375	72398	0,36	2,509056	0,0502
0,155	1,254573875	71844	0,37	2,559253	0,0492
0,160	1,290496	71292	0,38	2,608472	0,0482
0,165	1,326142125	70742	0,39	2,656719	0,0473
0,170	1,361513	70193	0,40	2,704	463
0,175	1,396609375	69645	0,41	2,750321	454
0,180	1,431432	69099	0,42	2,795688	444
0,185	1,465981625	68555	0,43	2,840107	435
0,190	1,500259	68012	0,44	2,883584	425
0,195	1,534264875	67470	0,45	2,926125	416
0,200	1,568	66930	0,46	2,967736	407
0,205	1,601465125	66392	0,47	3,008423	398
0,210	1,634661	65855	0,48	3,048192	389
0,215	1,667588375	65319	0,49	3,087049	379
0,220	1,700248	64785	0,50	3,125	370
0,225	1,732640625	64253	0,51	3,162051	362
0,230	1,764767	63718	0,52	3,198208	353
0,235	1,796625875	63196	0,53	3,233477	344
0,24	1,828224	0,0624	0,54	3,267864	335
0,25	1,890625	0,0613	0,55	3,301375	326
0,26	1,951976	0,0603	0,56	3,334016	318
0,27	2,012283	0,0593	0,57	3,365793	309
0,28	2,071552	0,0582	0,58	3,396712	301
0,29	2,129789	0,0572	0,59	3,426779	292
0,30	2,187		0,60	3,456	

Tabelle I.

P	R	$D=0{,}00$	P	R	$D=0{,}00$
0,60	3,456	284	0,90	3,969	0,00597
0,61	3,484381	275	0,91	3,974971	0,00532
0,62	3,511928	267	0,92	3,980288	0,00467
0,63	3,538647	259	0,93	3,984957	0,00403
0,64	3,564544	251	0,94	3,988984	0,00339
0,65	3,589625	243	0,95	3,992375	0.00276
0,66	3,613896	235	0,96	3,995136	0,00214
0,67	3,637363	227	0,97	3,997273	0,00152
0,68	3,660032	219	0,98	3,998792	0,00091
0,69	3,681909	211	0,990	3,999699	005727
0,70	3,703	203	0,991	3,999756271	005122
0,71	3,723311	195	0,992	3,999807488	004517
0,72	3,742848	188	0,993	3,999852657	003913
0,73	3,761617	180	0,994	3,999891784	003310
0,74	3,779624	172	0,995	3,999924875	002706
0,75	3,796875	165	0,996	3,999951936	002104
0,76	3,813376	158	0,997	3,999972973	001502
0,77	3,829133	150	0,998	3,999987992	000901
0,78	3,844152	143	0,999	3,999996999	
0,79	3,858439	136	1,000	4.	
0,80	3,872	0,01284	1,00	4.	
0,81	3,884841	0,01213	1,01	3,999701	0893
0,82	3,896968	0,01142	1,02	3,998808	1481
0,83	3,908387	0,01072	1,03	3,997327	2063
0,84	3,919104	0,01002	1,04	3,995264	2639
0,85	3,929125	0,00933	1,05	3,992625	3209
0,86	3,938456	0,00865	1,06	3,989416	3773
0,87	3,947103	0,00797	1,07	3,985643	4331
0,88	3,955072	0,00730	1,08	3,981312	4883
0,89	3,962369	0,00663	1,09	3,976429	5429
0,90	3,969		1,10	3,971	

Tabelle I.

P	*R*	*D*=0,0	*P*	*R*	*D*=0,0
1,10	3,971	0597	1,40	3,584	1938
1,11	3,965031	0650	1,41	3,564621	1973
1,12	3,958528	0703	1,42	3,544888	2008
1,13	3,951497	0755	1,43	3,524807	2042
1,14	3,943944	0807	1,44	3,504384	2076
1,15	3,935875	0858	1,45	3,483625	2109
1,16	3,927296	0908	1,46	3,462536	2141
1,17	3,918213	0958	1,47	3,441123	2173
1,18	3,908632	1007	1,48	3,419392	2204
1,19	3,898559	1056	1,49	3,397349	2235
1,20	3,888	1104	1,50	3,375	2265
1,21	3,876961	1151	1,51	3,352351	2294
1,22	3,865448	1200	1,52	3,329408	2323
1,23	3,853467	1244	1,53	3,306177	2351
1,24	3,841024	1290	1,54	3,282664	2377
1,25	3,828125	1335	1,55	3,258875	2406
1,26	3,814776	1379	1,56	3,234816	2432
1,27	3,800983	1423	1,57	3,210493	2458
1,28	3,786752	1466	1,58	3,185912	2483
1,29	3,772089	1510	1,59	3,161079	2508
1,30	3,757	1551	1,60	3,136	2532
1,31	3,741491	1592	1,61	3,110681	2555
1,32	3,725568	1633	1,62	3,085128	2578
1,33	3,709237	1673	1,63	3,059347	2600
1,34	3,692504	1713	1,64	3,033344	2622
1,35	3,675375	1752	1,65	3,007125	2643
1,36	3,657856	1790	1,66	2,980696	2663
1,37	3,639953	1828	1,67	2,954063	2683
1,38	3,621672	1865	1,68	2,927232	2702
1,39	3,603019	1902	1,69	2,900209	2721
1,40	3,584		1,70	2,873	

Tabelle I.

P	R	$D = 0,0$	P	R	$D = 0,0$
1,70	2,873		2,00	2.	
1,71	2,845611	2739	2,01	1,970001	3000
1,72	2,818048	2756	2,02	1,940008	2999
1,73	2,790317	2773	2,03	1,910027	2997
1,74	2,762424	2789	2,04	1,880064	2996
1,75	2,734375	2805	2,05	1,850125	2994
1,76	2,706176	2820	2,06	1,820216	2991
1,77	2,677833	2834	2,07	1,790343	2987
1,78	2,649352	2848	2,08	1,760512	2983
1,79	2,620739	2861	2,09	1,730729	2978
1,80	2,592	2874	2,10	1,701	2973
1,81	2,563141	2886	2,11	1,671331	2967
1,82	2,534168	2897	2,12	1,641728	2960
1,83	2,505087	2908	2,13	1,612197	2953
1,84	2,475904	2918	2,14	1,582744	2945
1,85	2,446625	2928	2,15	1,553375	2937
1,86	2,417256	2937	2,16	1,524096	2928
1,87	2,387803	2945	2,17	1,494913	2918
1,88	2,358272	2953	2,18	1,465832	2908
1,89	2,328669	2960	2,19	1,436859	2897
1,90	2,299	2967	2,20	1,408	2886
1,91	2,269271	2973	2,21	1,379261	2874
1,92	2,239488	2978	2,22	1,350648	2861
1,93	2,209657	2983	2,23	1,322167	2848
1,94	2,179784	2987	2,24	1,293824	2834
1,95	2,149875	2991	2,25	1,265625	2820
1,96	2,119936	2994	2,26	1,237576	2805
1,97	2,089973	2996	2,27	1,209683	2789
1,98	2,059992	2998	2,28	1,181952	2773
1,99	2,029999	2999	2,29	1,154389	2756
2,00	2.	3000	2,30	1,127	2739

Tabelle I.

P	R	$D=0,0$	P	R	$D=0,000$
2,30	1,127	2721	2,60	0,416	1902
2,31	1,099791	2702	2,61	0,396981	1865
2,32	1,072768	2683	2,62	0,378328	1828
2,33	1,045937	2663	2,63	0,360047	1790
2,34	1,019304	2643	2,64	0,342144	1752
2,35	0,992875	2622	2,65	0,324625	1713
2,36	0,966656	2600	2,66	0,307496	1673
2,37	0,940653	2578	2,67	0,290763	1633
2,38	0,914872	2555	2,68	0,274432	1592
2,39	0,889319	2532	2,69	0,258509	1551
2,40	0,864	2508	2,70	0,243	0,01509
2,41	0,838921	2483	2,71	0,227911	0,01466
2,42	0,814088	2458	2,72	0,213248	0,01423
2,43	0,789507	2432	2,73	0,199017	0,01379
2,44	0,765184	2406	2,74	0,185224	0,01335
2,45	0,741125	2389	2,75	0,171875	0,01290
2,46	0,717336	2351	2,76	0,158976	0,01244
2,47	0,693823	2323	2,77	0,146533	0,01198
2,48	0,670592	2294	2,78	0,134552	0,01151
2,49	0,647649	2265	2,79	0,123039	0,01104
2,50	0,625	2235	2,80	0,112	0,01056
2,51	0,602651	2204	2,81	0,101441	0,01007
2,52	0,580608	2173	2,82	0,091368	0,00958
2,53	0,558877	2141	2,83	0,081787	0,00908
2,54	0,537464	2109	2,84	0,072704	0,00858
2,55	0,516375	2076	2,85	0,064125	0,00807
2,56	0,495616	2042	2,86	0,056056	0,00755
2,57	0,475193	2008	2,87	0,048503	0,00703
2,58	0,455112	1973	2,88	0,041472	0,00650
2,59	0,435379	1938	2,89	0,034969	0,00597
2,60	0,416		2,900	0,029000	

Tabelle I.

P	R	D=0,000	P	R	D=0,000
2,900	0,029000	55647	3,050	0,007625	32327
2,905	0,026217625	52932	3,055	0,009241375	35492
2,910	0,023571	50202	3,060	0,011016	38672
2,915	0,021060875	47457	3,065	0,012949625	41867
2,920	0,018688	44697	3,070	0,015043	45077
2,925	0,016453125	41922	3,075	0,017296875	48302
2,930	0,014357	39132	3,080	0,019712	51542
2,935	0,012400375	36327	3,085	0,022289125	54797
2,940	0,010584	33507	3,090	0,025029	58067
2,945	0,008908625	30672	3,095	0,027932375	61352
2,950	0,007375	27822	3,10	0,031	0,00663
2,955	0,005983875	24957	3,11	0,037631	0,00730
2,960	0,004736	22077	3,12	0,044928	0,00797
2,965	0,003632125	19182	3,13	0,052897	0,00865
2,970	0,002673	16272	3,14	0,061544	0,00933
2,975	0,001859375	13347	3,15	0,070875	0,01002
2,980	0,001192	10407	3,16	0,080896	0,01072
2,985	0,000671625	07452	3,17	0,091613	0,01142
2,990	0,000299	04482	3,18	0,103032	0,01213
2,995	0,000074875		3,19	0,115159	0,01284
3,000	0.		3,20	0,128	0,01356
3,005	0,000075125	04517	3,21	0,141561	0,01429
3,010	0,000301	07547	3,22	0,155848	0,01502
3,015	0,000678375	10592	3,23	0,170867	0,01576
3,020	0,001208	13652	3,24	0,186624	0,01650
3,025	0,001890625	16727	3,25	0,203125	0,01725
3,030	0,002727	19817	3,26	0,220376	0,01800
3,035	0,003717875	22922	3,27	0,238383	0,01877
3,040	0,004864	26042	3,28	0,257152	0,01954
3,045	0,006166125	29177	3,29	0,276689	0,02031
3,050	0,007625		3,30	0,297	

Tabelle I.

P	R	$D = 0,0$	P	R	$D = 0,0$
3,30	0,297	2109	3,60	1,296	4728
3,31	0,318091	2188	3,61	1,343281	4825
3,32	0,339968	2267	3,62	1,391528	4922
3,33	0,362637	2347	3,63	1,440747	5020
3,34	0,386104	2427	3,64	1,490944	5118
3,35	0,410375	2508	3,65	1,542125	5217
3,36	0,435456	2590	3,66	1,594296	5317
3,37	0,461353	2672	3,67	1,647463	5417
3,38	0,488072	2755	3,68	1,701632	5518
3,39	0,515619	2838	3,69	1,756809	5619
3,40	0,544	2922	3,70	1,813	5721
3,41	0,573221	3007	3,71	1,870211	5824
3,42	0,603288	3092	3,72	1,928448	5927
3,43	0,634207	3178	3,73	1,987717	6031
3,44	0,665984	3265	3,74	2,048024	6135
3,45	0,698625	3351	3,75	2,109375	6240
3,46	0,732136	3439	3,76	2,171776	6346
3,47	0,766523	3527	3,77	2,235233	6452
3,48	0,801792	3616	3,78	2,299752	6559
3,49	0,837949	3705	3,79	2,365339	6666
3,50	0,875	3795	3,80	2,432	6774
3,51	0,912951	3886	3,81	2,499741	6883
3,52	0,951808	3977	3,82	2,568568	6992
3,53	0,991577	4069	3,83	2,638487	7102
3,54	1,032264	4161	3,84	2,709504	7212
3,55	1,073875	4254	3,85	2,781625	7323
3,56	1,116416	4348	3,86	2,854856	7435
3,57	1,159893	4442	3,87	2,929203	7547
3,58	1,204312	4537	3,88	3,004672	7660
3,59	1,249679	4632	3,89	3,081269	7773
3,60	1,296		3,90	3,159	

Tabelle I.

P	R	$D=0,0$	P	R	$D=0,0$
3,90	3,159		3,95	3,564875	
		7887			8466
3,91	3,237871		3,96	3,649536	
		8002			8584
3,92	3,317888		3,97	3,735373	
		8117			8702
3,93	3,399057		3,98	3,822392	
		8233			8821
3,94	3,481384		3,99	3,910599	
		8349			8940
3,95	3,564875		4,00	4,000000	

Anhang zu Tabelle I.

Q	P	C	P	C	P	C	P	C	P	C	Q
	0,000	—	0,95	—	1,03	+	1,50	+	2,20	—	
1. 9.		0,00006		0,01		0,01		0,001		0,000	1. 9.
2. 8.		00010		01		02		001		000	2. 8.
3. 7.		00014		02		03		002		001	3. 7.
4. 5. 6.		00016		03		04		002		001	4. 5. 6.
	0,050	—	0,96	—	1,04	+	1,60	+	2,30	—	
1. 9.		0,00006		0,01		0,01		0,001		0,001	1. 9.
2. 8.		00010		02		01		001		001	2. 8.
3. 7.		00015		03		02		001		001	3. 7.
4. 5. 6.		00017		04		03		002		001	4. 5. 6.
	0,070	—	0,97	—	1,05	+	1,70	+	2,60	—	
1. 9.		0,00006		0,02		0,01		0,001		0,001	1. 9.
2. 8.		00011		03		01		001		001	2. 8.
3. 7.		00015		04		01		001		002	3. 7.
4. 5. 6.		00018		05		02		001		003	4. 5. 6.
	0,120	—	0,98	—	1,10	+	1,80	+	2,70	—	
1. 9.		0,003		0,03		0,01		0,0002		0,002	1. 9.
2. 8.		004		05		01		0003		003	2. 8.
3. 7.		004		06		01		0004		004	3. 7.
4. 5. 6.		003		08		01		0004		005	4. 5. 6.
	0,24	—	0,990	—	1,20	+	1,90	+	2,80	—	
1. 9.		0,00		0,00		0,002		0,0001		0,00	1. 9.
2. 8.		00		00		004		0002		00	2. 8.
3. 7.		00		00		005		0003		01	3. 7.
4. 5. 6.		00	0,999	00		006		0003		01	4. 5. 6.
	0,80	—	1,01	+	1,30	+	2,00	—	2,900	—	
1. 9.		0,00		0,03		0,002		0,0001		0,002	1. 9.
2. 8.		00		05		003		0001		003	2. 8.
3. 7.		01		07		004		0002		003	3. 7.
4. 5. 6.		01		09		004		0002		002	4. 5. 6.
	0,90	—	1,02	+	1,40	+	2,10	—	2,930	—	
1. 9.		0,01		0,02		0,001		0,0001		0,002	1. 9.
2. 8.		01		04		001		0002		004	2. 8.
3. 7.		01		06		002		0003		004	3. 7.
4. 5. 6.		02		07		003		0004		002	4. 5. 6.
	0,95		1,03		1,50		2,20		2,940		

Anhang zu Tabelle I.

Q	P	C	P	C	P	C	P	C	P	C	Q
	2,940	—	2,980	—	3,020	+	3,090	+	3,40	+	
1. 9.		0,003		0,01		0,01		0,002		0,001	1. 9.
2. 8.		005		01		02		004		002	2. 8.
3. 7.		005		01		02		004		003	3. 7.
4. 5. 6.		003		01		01		002		004	4. 5. 6.
	2,950	—	2,990	—	3,030	+	3,10	+	3,50	+	
1. 9.		0,004		0,02		0,01		0,01		0,001	1. 9.
2. 8.		006		04		01		01		001	2. 8.
3. 7.		006		04		01		01		002	3. 7.
4. 5. 6.		004	2,995	02		01		01		003	4. 5. 6.
	2,960	—	3,005	+	3,050	+	3,20	+	3,80	+	
1. 9.		0,005		0,03		0,004		0,003		0,001	1. 9.
2. 8.		007		05		006		004		001	2. 8.
3. 7.		007		05		006		006		002	3. 7.
4. 5. 6.		005		03		004		007		002	4. 5. 6.
	2,970	—	3,010	+	3,070	+	3,30	+	4.		
1. 9.		0,006		0,02		0,003		0,002			1. 9.
2. 8.		008		04		005		003			2. 8.
3. 7.		008		04		005		004			3. 7.
4. 5. 6.		006		02		003		005			4. 5. 6.
	2,980		3,020		3,090		3,40				

54.

Tabelle II.

P	*R*	*D*=0,00	*P*	*R*	*D*=0,00
0,000	0,000000000	90060	0,030	0,275427	93688
0,001	0,009006001	90180	0,031	0,284795791	93810
0,002	0,018024008	90300	0,032	0,294176768	93932
0,003	0,027054027	90420	0,033	0,303569937	94054
0,004	0,036096064	90541	0,034	0,312975304	94176
0,005	0,045150125	90661	0,035	0,322392875	94298
0,006	0,054216216	90781	0,036	0,331822656	94420
0,007	0,063294343	90902	0,037	0,341264653	94542
0,008	0,072384512	91022	0,038	0,350718872	94664
0,009	0,081486729	91143	0,039	0,360185319	94787
0,010	0,090601	91263	0,040	0,369664	94909
0,011	0,099727331	91384	0,041	0,379154921	95032
0,012	0,108865728	91505	0,042	0,388658088	95154
0,013	0,118016197	91625	0,043	0,398173507	95277
0,014	0,127178744	91746	0,044	0,407701184	95400
0,015	0,136353375	91867	0,045	0,417241125	95522
0,016	0,145540096	91988	0,046	0,426793336	95645
0,017	0,154738913	92109	0,047	0,436357823	95768
0,018	0,163949832	92230	0,048	0,445934592	95891
0,019	0,173172859	92351	0,049	0,455523649	96014
0,020	0,182408	92473	0,050	0,465125	96137
0,021	0,191655261	92594	0,051	0,474738651	96260
0,022	0,200914648	92715	0,052	0,484364608	96383
0,023	0,210186167	92837	0,053	0,494002877	96506
0,024	0,219469824	92958	0,054	0,503653464	96629
0,025	0,228765625	93079	0,055	0,513316375	96752
0,026	0,238073576	93201	0,056	0,522991616	96876
0,027	0,247393683	93323	0,057	0,532679193	97000
0,028	0,256725952	93444	0,058	0,542379112	97123
0,029	0,266070389	93566	0,059	0,552091379	97246
0,030	0,275427		0,060	0,561816	

Tabelle II.

P	R	$D=0{,}00$	P	R	$D=0{,}0$
0,060	0,561816	97370	0,090	0,859329	101106
0,061	0,571552981	97493	0,091	0,869439571	101231
0,062	0,581302328	97617	0,092	0,879562688	101357
0,063	0,591064047	97741	0,093	0,889698357	101482
0,064	0,600838144	97865	0,094	0,899846584	101608
0,065	0,610624625	97989	0,095	0,910007375	101734
0,066	0,620423496	98113	0,096	0,920180736	101860
0,067	0,630234763	98237	0,097	0,930366673	101985
0,068	0,640058432	98361	0,098	0,940565192	102111
0,069	0,649894509	98485	0,099	0,950776299	102237
0,070	0,659743	98609	0,100	0,961	102363
0,071	0,669603911	98733	0,101	0,971236301	102489
0,072	0,679477248	98858	0,102	0,981485208	102615
0,073	0,689363017	98982	0,103	0,991746727	102741
0,074	0,699261224	99106	0,104	1,002020864	102868
0,075	0,709171875	99231	0,105	1,012307625	102994
0,076	0,719094976	99356	0,106	1,022607016	103120
0,077	0,729030533	99480	0,107	1,032919043	103247
0,078	0,738978552	99605	0,108	1,043243712	103373
0,079	0,748939039	99730	0,109	1,053581029	103500
0,080	0,758912	099854	0,110	1,063931	103626
0,081	0,768897441	099979	0,111	1,074293631	103753
0,082	0,778895368	100104	0,112	1,084668928	103880
0,083	0,788905787	100229	0,113	1,095056897	104006
0,084	0,798928704	100354	0,114	1,105457544	104133
0,085	0,808964125	100479	0,115	1,115870875	104260
0,086	0,819012056	100604	0,116	1,126296896	104387
0,087	0,829072503	100730	0,117	1,136735613	104514
0,088	0,839145472	100855	0,118	1,147187032	104641
0,089	0,849230969	100980	0,119	1,157651159	104768
0,090	0,859329		0,120	1,168128	

Tabelle II.

P	R	$D=0,0$	P	R	$D=0,$
0,120	1,168128	1052	0,30	3,267	0,1294
0,125	1,220703	1058	0,31	3,396391	0,1308
0,130	1,273597	1064	0,32	3,527168	0,1322
0,135	1,326810	1071	0,33	3,659337	0,1336
0,140	1,380344	1080	0,34	3,792904	0,1350
0,145	1,434198	1083	0,35	3,927875	0,1364
0,150	1,488375	1090	0,36	4,064256	0,1378
0,155	1,542873	1096	0,37	4,202053	0,1392
0,160	1,597696	1103	0,38	4,341272	0,1406
0,165	1,652842	1109	0,39	4,481919	0,1421
0,170	1,708313	1116	0,40	4,624	1435
0,175	1,764109	1122	0,41	4,767521	1450
0,180	1,820232	1129	0,42	4,912488	1464
0,185	1,876681	1136	0,43	5,058907	1479
0,190	1,933459	1142	0,44	5,206784	1493
0,195	1,990564	1149	0,45	5,356125	1508
0,200	2,048000	1155	0,46	5,506936	1523
0,205	2,105765	1162	0,47	5,659223	1538
0,210	2,163861	1169	0,48	5,812992	1553
0,215	2,222288	1175	0,49	5,968249	1567
0,220	2,281048	1182	0,50	6,125	1582
0,225	2,340140	1189	0,51	6,283251	1598
0,230	2,399567	1195	0,52	6,443008	1613
0,235	2,459327	1202	0,53	6,604277	1628
0,24	2,519424	0,1212	0,54	6,767064	1643
0,25	2,640625	0,1225	0,55	6,931375	1658
0,26	2,763176	0,1239	0,56	7,097216	1674
0,27	2,887083	0,1253	0,57	7,264593	1689
0,28	3,012352	0,1266	0,58	7,433512	1705
0,29	3,138989	0,1280	0,59	7,603979	1720
0,30	3,267		0,60	7,776	

Tabelle II.

P	R	$D = 0,$	P	R	$D = 0,$
0,60	7,776	1736	0,90	13,689	2232
0,61	7,949581	1751	0,91	13,912171	2249
0,62	8,124728	1767	0,92	14,137088	2267
0,63	8,301447	1783	0,93	14,363757	2284
0,64	8,479744	1799	0,94	14,592184	2302
0,65	8,659625	1815	0,95	14,822375	2320
0.66	8,841096	1831	0,96	15,054336	2338
0,67	9,024163	1847	0,97	15,288073	2355
0,68	9,208832	1863	0,98	15,523592	2373
0,69	9,395109	1879	0,99	15,760899	2391
0,70	9,583	1895	1,00	16.	2409
0,71	9,772511	1911	1,01	16,240901	2427
0,72	9,963648	1928	1,02	16,483608	2445
0,73	10,156417	1944	1,03	16,728127	2463
0,74	10,350824	1961	1,04	16,974464	2482
0,75	10,546875	1977	1,05	17,222625	2500
0,76	10,744576	1994	1,06	17,472616	2518
0,77	10,943933	2010	1,07	17,724443	2537
0,78	11,144952	2027	1,08	17,978112	2555
0,79	11,347639	2044	1,09	18,233629	2574
0,80	11,552	2060	1,10	18,491	2592
0,81	11,758041	2077	1,11	18,750231	2611
0,82	11,965768	2094	1,12	19,011328	2630
0,83	12,175187	2111	1,13	19,274297	2649
0,84	12,386304	2128	1,14	19,539144	2667
0,85	12,599125	2145	1,15	19,805875	2686
0,86	12,813656	2162	1,16	20,074496	2705
0,87	13,029903	2180	1,17	20,345013	2724
0,88	13,247872	2197	1,18	20,617432	2743
0,89	13,467569	2214	1,19	20,891759	2762
0,90	13,689		1,20	21,168	

Tabelle II.

P	R	$D=0,$	P	R	$D=0,$
1,20	21,168	2782	1,50	30,375	3386
1,21	21,446161	2801	1,51	30,713551	3407
1,22	21,726248	2820	1,52	31,054208	3427
1,23	22,008267	2840	1,53	31,396977	3449
1,24	22,292224	2859	1,54	31,741864	3470
1,25	22,578125	2879	1,55	32,088875	3491
1,26	22,865976	2898	1,56	32,438016	3513
1,27	23,155783	2918	1,57	32,789293	3534
1,28	23,447552	2937	1,58	33,142712	3546
1,29	23,741289	2957	1,59	33,498279	3577
1,30	24,037	2977	1,60	33,856	3599
1,31	24,334691	2997	1,61	34,215881	3620
1,32	24,634368	3017	1,62	34,577928	3642
1,33	24,936037	3037	1,63	34,942147	3664
1,34	25,239704	3057	1,64	35,308544	3686
1,35	25,545375	3077	1,65	35,677125	3708
1,36	25,853056	3097	1,66	36,047896	3730
1,37	26,162753	3117	1,67	36,420863	3752
1,38	26,474472	3137	1,68	36,796032	3774
1,39	26,788219	3158	1,69	37,173409	3796
1,40	27,104	3178	1,70	37,553	3818
1,41	27,421821	3199	1,71	37,934811	3840
1,42	27,741688	3219	1,72	38,318848	3863
1,43	28,063607	3240	1,73	38,705117	3885
1,44	28,387584	3260	1,74	39,093624	3907
1,45	28,713625	3281	1,75	39,484375	3930
1,46	29,041736	3302	1,76	39,877376	3953
1,47	29,371923	3323	1,77	40,272633	3975
1,48	29,704192	3344	1,78	40,670152	3998
1,49	30,038549	3365	1,79	41,069939	4021
1,50	30,375		1,80	41,472	

Tabelle II.

P	R	$D=0,$	P	R	$D=0,$
1,80	41,472	4043	2,10	54,621	4755
1,81	41,876341	4066	2,11	55,096531	4780
1,82	42,282968	4089	2,12	55,574528	4805
1,83	42,691887	4112	2,13	56,054997	4829
1,84	43,103104	4135	2,14	56,537944	4854
1,85	43,516625	4158	2,15	57,023375	4879
1,86	43,932456	4181	2,16	57,511296	4904
1,87	44,350603	4205	2,17	58,001713	4929
1,88	44,771072	4228	2,18	58,494632	4954
1,89	45,193869	4251	2,19	58,990059	4979
1,90	45,619	4275	2,20	59,488	5005
1,91	46,046471	4298	2,21	59,988461	5030
1,92	46,476288	4322	2,22	60,491448	5055
1,93	46,908457	4345	2,23	60,996967	5081
1,94	47,342984	4369	2,24	61,505024	5106
1,95	47,779875	4393	2,25	62,015625	5132
1,96	48,219136	4416	2,26	62,528776	5157
1,97	48,660773	4440	2,27	63,044483	5183
1,98	49,104792	4464	2,28	63,562752	5208
1,99	49,551199	4488	2,29	64,083589	5234
2,00	50.	4512	2,30	64,607	5260
2,01	50,451201	4536	2,31	65,132991	5286
2,02	50,904808	4560	2,32	65,661568	5312
2,03	51,360827	4584	2,33	66,192737	5338
2,04	51,819264	4609	2,34	66,726504	5364
2,05	52,280125	4633	2,35	67,262875	5390
2,06	52,743416	4657	2,36	67,801856	5416
2,07	53,209143	4682	2,37	68,343453	5442
2,08	53,677312	4706	2,38	68,887672	5468
2,09	54,147929	4731	2,39	69,434519	5495
2,10	54,621		2,40	69,984	

Tabelle II.

P	R	D=0,	P	R	D=0,
2,40	69,984	5521	2,70	87,723	6341
2,41	70,536121	5548	2,71	88,357111	6369
2,42	71,090888	5574	2,72	88,994048	6398
2,43	71,648307	5601	2,73	89,633817	6426
2,44	72,208384	5627	2,74	90,276424	6455
2,45	72,771125	5654	2,75	90,921875	6483
2,46	73,336536	5681	2,76	91,570176	6512
2,47	73,904623	5708	2,77	92,221333	6540
2,48	74,475392	5735	2,78	92,875352	6569
2,49	75,048849	5761	2,79	93,532239	6600
2,50	75,625	5788	2,80	94,192	6626
2,51	76,203851	5816	2,81	94,854641	6655
2,52	76,785408	5843	2,82	95,520168	6684
2,53	77,369677	5870	2,83	96,188587	6713
2,54	77,956664	5897	2,84	96,859904	6742
2,55	78,546375	5924	2,85	97,534125	6771
2,56	79,138816	5952	2,86	98,211256	6800
2,57	79,733993	5979	2,87	98,891303	6830
2,58	80,331912	6007	2,88	99,574272	6859
2,59	80,932579	6034	2,89	100,260169	6888
2,60	81,536	6062	2,90	100,949	6918
2,61	82,142181	6089	2,91	101,640771	6947
2,62	82,751128	6117	2,92	102,335488	6977
2,63	83,362847	6145	2,93	103,033157	7006
2,64	83,977344	6173	2,94	103,733784	7036
2,65	84,594625	6201	2,95	104,437375	7066
2,66	85,214696	6229	2,96	105,143936	7095
2,67	85,837563	6257	2,97	105,853473	7125
2,68	86,463232	6285	2,98	106,565992	7155
2,69	87,091709	6313	2,99	107,281499	7185
2,70	87,723		3,00	108.	

Tabelle II.

P	R	$D=0,$	P	R	$D=0,$
3,00	108.	7215	3,30	130,977	8143
3,01	108,721501	7245	3,31	131,791291	8175
3,02	109,446008	7275	3,32	132,608768	8207
3,03	110,173527	7305	3,33	133,429437	8239
3,04	110,904064	7336	3,34	134,253304	8271
3,05	111,637625	7366	3,35	135,080375	8303
3,06	112,374216	7396	3,36	135,910656	8335
3,07	113,113843	7427	3,37	136,744153	8367
3,08	113,856512	7457	3,38	137,580872	8399
3,09	114,602229	7488	3,39	138,420819	8432
3,10	115,351	7518	3,40	139,264	8464
3,11	116,102831	7549	3,41	140,110421	8497
3,12	116,857728	7580	3,42	140,960088	8529
3,13	117,615697	7610	3,43	141,813007	8562
3,14	118,376744	7641	3,44	142,669184	8594
3,15	119,140875	7672	3,45	143,528625	8627
3,16	119,908096	7703	3,46	144,391336	8660
3,17	120,678413	7734	3,47	145,257323	8693
3,18	121,451832	7765	3,48	146,126592	8736
3,19	122,228359	7796	3,49	147,000149	8749
3,20	123,008	7828	3,50	147,875	8792
3,21	123,790761	7859	3,51	148,754151	8825
3,22	124,576648	7890	3,52	149,636608	8858
3,23	125,365667	7922	3,53	150,522377	8891
3,24	126,157824	7953	3,54	151,411464	8924
3,25	126,953125	7985	3,55	152,303875	8957
3,26	127,751576	8016	3,56	153,199616	8991
3,27	128,553183	8048	3,57	154,098693	9024
3,28	129,357952	8079	3,58	155,001112	9058
3,29	130,165889	8111	3,59	155,906879	9091
3,30	130,977		3,60	156,816	

Tabelle II.

P	R	$D=0,$	P	R	$D=1,$
3,60	156,816	9125	3,90	185,679	1,0161
3,61	157,728481	9158	3,91	186,695071	1,0196
3,62	158,644328	9192	3,92	187,714688	1,0232
3,63	159,563547	9226	3,93	188,737857	1,0267
3,64	160,486144	9260	3,94	189,764584	1,0303
3,65	161,412125	9294	3,95	190,794875	1,0339
3,66	162,341496	9328	3,96	191,828736	1,0374
3,67	163,274263	9362	3,97	192,866173	1,0410
3,68	164,210432	9396	3,98	193,907192	1,0446
3,69	165,150009	9430	3,99	194,951799	1,0482
3,70	166,093	9464	4,00	196.	0590
3,71	167,039411	9498	4,05	201,295125	0772
3,72	167,989248	9533	4,10	206,681	0955
3,73	168,942517	9567	4,15	212,158375	1139
3,74	169,899224	9602	4,20	217,728	1325
3,75	170,859375	9636	4,25	223,390625	1513
3,76	171,822976	9671	4,30	229,147	1702
3,77	172,790033	9705	4,35	234,997875	1892
3,78	173,760552	9740	4,40	240,944	2084
3,79	174,734539	9775	4,45	246,986125	2278
3,80	175,712	9809	4,50	253,125	2473
3,81	176,692941	9844	4,55	259,361375	2669
3,82	177,677368	9879	4,60	265,696	2867
3,83	178,665287	9914	4,65	272,129625	3067
3,84	179,656704	9949	4,70	278,663	3268
3,85	180,651625	9984	4,75	285,296875	3470
3,86	181,650056	1,0019	4,80	292,032	3674
3,87	182,652003	1,0055	4,85	298,869125	3880
3,88	183,657472	1,0090	4,90	305,809	4087
3,89	184,666469	1,0125	4,95	312,852375	4295
3,90	185,679		5,00	320.	

Tabelle II.

P	*R*	*D* = 2,	*P*	*R*	*D* = 2,
5,00	320.	4505	6,50	586,625	1503
5,05	327,252625	4717	6,55	597,376375	1759
5,10	334,611	4930	6,60	608,256	2017
5,15	342,075875	5144	6,65	619,264625	2277
5,20	349,648	5360	6,70	630,403	2538
5,25	357,328125	5578	6,75	641,671875	2800
5,30	365,117	5797	6,80	653,072	3064
5,35	373,015375	6017	6,85	664,604125	3330
5,40	381,024	6239	6,90	676,269	3597
5,45	389,143625	6463	6,95	688,067375	3865
5,50	397,375	6688	7,00	700.	4135
5,55	405,718875	6914	7,05	712,067625	4407
5,60	414,176	7142	7,10	724,271	4680
5,65	422,747125	7372	7,15	736,610875	4954
5,70	431,433	7603	7,20	749,088	5230
5,75	440,234375	7835	7,25	761,703125	5508
5,80	449,152	8069	7,30	774,457	5787
5,85	458,186625	8305	7,35	787,350375	6067
5,90	467,339	8542	7,40	800,384	6349
5,95	476,609875	8780	7,45	813,558625	6633
6,00	486.	1,9020	7,50	826,875	6918
6,05	495,510125	1,9262	7,55	840,333875	7204
6,10	505,141	1,9505	7,60	853,936	7492
6,15	514,893375	1,9750	7,65	867,682125	7782
6,20	524,768	1,9995	7,70	881,573	8073
6,25	534,765625	2,0243	7,75	895,609375	8365
6,30	544,887	0532	7,80	909,792	8659
6,35	555,132875	0742	7,85	924,121625	8955
6,40	565,504	0994	7,90	938,599	9252
6,45	576,001125	1248	7,95	953,224875	9550
6,50	586,625		8,00	968.	

Tabelle II.

P	R	D	P	R	D
8,00	968.	2,9850	9,50	1484,375	9548
8,05	982,925125	3,0154	9,55	1504,148875	9894
8,10	998,001	0455	9,60	1524,096	4,0242
8,15	1013,228375	0799	9,65	1544,217125	0592
8,20	1028,608	1065	9,70	1564,513	0943
8,25	1044,140625	1373	9,75	1584,984375	1295
8,30	1059,827	1682	9,80	1605,632	1649
8,35	1075,667875	1992	9,85	1626,456625	2005
8,40	1091,664	2304	9,90	1647,459	2362
8,45	1107,816125	2618	9,95	1668,639875	2720
8,50	1124,125	2933	10,0	1690.	43,261
8,55	1140,591375	3249	10,1	1733,261	43,987
8,60	1157,216	3567	10,2	1777,248	44,719
8,65	1173,999625	3887	10,3	1821,967	45,457
8,70	1190,943	4208	10,4	1867,424	46,201
8,75	1208,046875	4530	10,5	1913,625	46,951
8,80	1225,312	4854	10,6	1960,576	47,707
8,85	1242,739125	5180	10,7	2008,283	48,469
8,90	1260,329	5507	10,8	2056,752	49,237
8,95	1278,082375	5835	10,9	2105,989	50,011
9,00	1296.	6165	11,0	2156.	50,791
9,05	1314,082625	6497	11,1	2206,791	51,577
9,10	1332,331	6830	11,2	2258,368	52,369
9,15	1350,745875	7164	11,3	2310,737	53,167
9,20	1369,328	7500	11,4	2363,904	53,971
9,25	1388,078125	7838	11,5	2417,875	54,781
9,30	1406,997	8177	11,6	2472,656	55,597
9,35	1426,085375	8517	11,7	2528,253	56,419
9,40	1445,344	8859	11,8	2584,672	57,247
9,45	1464,773625	9203	11,9	2641,919	58,081
9,50	1484,375		12,0	2700.	

Tabelle II.

P	*R*	*D*	*P*	*R*	*D*
12,0	2700.	58,921	15,0	4860.	86,911
12,1	2758,921	59,767	15,1	4946,911	87,937
12,2	2818,688	60,619	15,2	5034,848	88,969
12,3	2879,307	61,477	15,3	5123,817	90,007
12,4	2940,784	62,341	15,4	5213,824	91,051
12,5	3003,125	63,211	15,5	5304,875	92,101
12,6	3066,336	64,087	15,6	5396,976	93,157
12,7	3130,423	64,969	15,7	5490,133	94,219
12,8	3195,392	65,857	15,8	5584,352	95,287
12,9	3261,249	66,751	15,9	5679,639	96,361
13,0	3328.	67,651	16,0	5776.	97,441
13,1	3395,651	68,557	16,1	5873,441	98,527
13,2	3464,208	69,469	16,2	5971,968	99,619
13,3	3533,677	70,387	16,3	6071,587	100,717
13,4	3604,064	71,311	16,4	6172,304	101,821
13,5	3675,375	72,241	16,5	6274,125	102,931
13,6	3747,616	73,177	16,6	6377,056	104,047
13,7	3820,793	74,119	16,7	6481,103	105,169
13,8	3894,912	75,067	16,8	6586,272	106,297
13,9	3969,979	76,021	16,9	6692,569	107,431
14,0	4046.	76,981	17,0	6800.	108,571
14,1	4122,981	77,947	17,1	6908,571	109,717
14,2	4200,928	78,919	17,2	7018,288	110,869
14,3	4279,847	79,897	17,3	7129,157	112,027
14,4	4359,744	80,881	17,4	7241,184	113,191
14,5	4440,625	81,871	17,5	7354,375	114,361
14,6	4522,496	82,867	17,6	7468,736	115,537
14,7	4605,363	83,869	17,7	7584,273	116,719
14,8	4689,232	84,877	17,8	7700,992	118,107
14,9	4774,109	85,891	17,9	7818,899	119,101
15,0	4860.		18,0	7938.	

Tabelle II.

P	*R*	*D*	*P*	*R*	*D*
18,0	7938.	120,30	21,0	12096.	159,09
18,1	8058,301	121,51	21,1	12255,091	160,48
18,2	8179,808	122,72	21,2	12415,568	161,87
18,3	8302,527	123,94	21,3	12577,437	163,27
18,4	8426,464	125,16	21,4	12740,704	164,67
18,5	8551,625	126,39	21,5	12905,375	166,08
18,6	8678,016	127,63	21,6	13071,456	167,50
18,7	8805,643	128,87	21,7	13238,953	168,92
18,8	8934,512	130,12	21,8	13407,872	170,35
18,9	9064,629	131,37	21,9	13578,219	171,78
19,0	9196.	132,63	22,0	13750.	173,22
19,1	9328,631	133,90	22,1	13923,221	174,67
19,2	9462,528	135,17	22,2	14097,888	176,12
19,3	9597,697	136,45	22,3	14274,007	177,58
19,4	9734,144	137,73	22,4	14451,584	179,04
19,5	9871,875	139,02	22,5	14630,625	180,51
19,6	10010,896	140,32	22,6	14811,136	181,99
19,7	10151,213	141,62	22,7	14993,123	183,47
19,8	10292,832	142,93	22,8	15176,592	184,96
19,9	10435,759	144,24	22,9	15361,549	186,45
20,0	10580.	145,56	23,0	15548.	187,95
20,1	10725,561	146,89	23,1	15735,951	189,46
20,2	10872,448	148,22	23,2	15925,408	190,97
20,3	11020,667	149,56	23,3	16116,377	192,49
20,4	11170,224	150,90	23,4	16308,864	194,01
20,5	11321,125	152,25	23,5	16502,875	195,54
20,6	11473,376	153,61	23,6	16698,416	197,08
20,7	11626,983	154,97	23,7	16895,493	198,62
20,8	11781,952	156,34	23,8	17094,112	200,19
20,9	11938,289	157,71	23,9	17294,279	202,72
21,0	12096.		24,0	17496.	

Tabelle II.

P	*R*	*D*	*P*	*R*	*D*
24,0	17496.	203,28	27,0	24300.	252,87
24,1	17699,281	204,87	27,1	24552,871	254,62
24,2	17904,128	206,42	27,2	24807,488	256,39
24,3	18110,547	208,00	27,3	25063,875	258,11
24,4	18318,544	209,58	27,4	25321,984	259,89
24,5	18528,125	211,17	27,5	25581,875	261,76
24,6	18739,296	212,77	27,6	25843,536	263,44
24,7	18952,063	214,37	27,7	26106,973	265,22
24,8	19166,432	215,98	27,8	26372,192	267,01
24,9	19382,409	217,59	27,9	26639,199	268,80
25,0	19600.	219,21	28,0	26908.	270,60
25,1	19819,211	220,84	28,1	27178,601	272,41
25,2	20040,048	222,47	28,2	27451,008	274,22
25,3	20262,517	224,11	28,3	27725,227	276,04
25,4	20486,624	225,75	28,4	28001,264	277,86
25,5	20712,375	227,40	28,5	28279,125	279,69
25,6	20939,776	229,06	28,6	28558,816	281,53
25,7	21168,833	230,72	28,7	28840,343	283,37
25,8	21399,552	232,39	28,8	29123,712	285,22
25,9	21631,939	234,06	28,9	29408,929	287,07
26,0	21866.	235,74	29,0	29696.	288,93
26,1	22101,741	237,43	29,1	29984,931	290,80
26,2	22339,168	239,12	29,2	30275,728	292,67
26,3	22578,287	240,82	29,3	30568,397	294,55
26,4	22819,104	242,52	29,4	30862,944	296,43
26,5	23061,625	244,23	29,5	31159,375	298,32
26,6	23305,856	245,95	29,6	31457,696	300,22
26,7	23551,803	247,67	29,7	31757,913	302,12
26,8	23799,472	249,40	29,8	32060,032	304,03
26,9	24048,869	251,13	29,9	32364,059	306,94
27,0	24300.		30,0	32670.	

Tabelle II.

P	R	D	P	R	D
30	32670		60	238140	
31	35836	3166	61	249856	11716
32	39200	3430	62	261950	12094
33	42768	3568	63	274428	12478
34	46546	3778	64	287296	12868
35	50540	3994	65	300560	13264
36	54756	4216	66	314226	13666
37	59200	4444	67	328300	14074
38	63878	4678	68	342788	14488
39	68796	4918	69	357696	14908
40	73960	5164	70	373030	15334
41	79376	5416	71	388796	15766
42	85050	5674	72	405000	16204
43	90988	5938	73	421648	16648
44	97196	6208	74	438746	17098
45	103680	6484	75	456300	17554
46	110446	6766	76	474316	18016
47	117500	7054	77	492800	18484
48	124848	7348	78	511758	18958
49	132496	7648	79	531196	19438
50	140450	7954	80	551120	19924
51	148716	8266	81	571536	20416
52	157300	8584	82	592450	20914
53	166208	8908	83	613868	21418
54	175446	9238	84	635796	21928
55	185080	9634	85	658240	22444
56	194936	9856	86	681206	22966
57	205200	10264	87	704700	23494
58	215818	10618	88	728728	24028
59	226796	10978	89	753296	24568
60	238140	11344	90	778410	25114

Tabelle II.

P	*R*	*D*	*P*	*R*	*D*
90	778410	25666	98	999698	30298
91	804076	26224	99	1029996	30904
92	830300	26788	100	1060900	31516
93	857088	27358	101	1092416	32134
94	884446	27934	102	1124550	32758
95	912380	28516	103	1157308	33388
96	940896	29104	104	1190696	34024
97	970000	29698	105	1224720	
98	999698				

Anhang zu Tabelle II.

Q	*P*	*C*	*P*	*C*	*P*	*C*	*P*	*C*	*P*	*C*	Q
	0,000	+	0,24	+	6,10	+	30	+	63	+	
1. 9.		0,00006		0,001		0,005		0,003		0,001	1. 9.
2. 8.		00010		001		008		005		002	2. 8.
3. 7.		00014		002		008		007		003	3. 7.
4. 6.		00016		002		005		008		003	4. 6.
5.		00017		002				008		003	5.
	0,070	+	0,80	+	8,00	+	32	+	85	+	
1. 9.		0,00006		0,001		0,004		0,002		0,001	1. 9.
2. 8.		00010		001		006		005		001	2. 8.
3. 7.		00013		001		006		006		002	3. 7.
4. 6.		00015		001		004		007		002	4. 6.
5.		00016		001				007		002	5.
	0,120	+	4,00	+	10,0	+	37	+	105		
1. 9.		0,003		0,007		0,001		0,002			1. 9.
2. 8.		005		011		001		004			2. 8.
3. 7.		005		011		002		005			3. 7.
4. 5. 6.		003		007		002		006			4. 5. 6.
	0,130	+	4,10	+	11,0	+	43	+			
1. 9.		0,003		0,007		0,001		0,002			1. 9.
2. 8.		004		010		001		003			2. 8.
3. 7.		004		010		001		004			3. 7.
4. 5. 6.		003		007		002		005			4. 5. 6.
	0,20	+	4,90	+	12,0	+	51	+			
1. 9.		0,003		0,006		0,001		0,001			1. 9.
2. 8.		003		009		001		003			2. 8.
3. 7.		003		009		001		004			3. 7.
4. 5. 6.		003		006		001		004			4. 5. 6.
	0,24		6,10		30		63				

55.

Die in Spalte P der Tabellen eingeschriebenen aufeinander folgenden Zahlen können im Allgemeinen darin von einander unterschieden werden, dass ihre letzten Decimalstellen theils die natürlich aufeinanderfolgenden Zahlen sind, theils in 0 und 5 mit einander abwechseln, also von 5 zu 5 gradiren.

Was die Werthe von R anlangt, so finden wir, dass dieselben in Tabelle I. von 0 an bis zu 4 zunehmen, von 4 an bis zu 0 abnehmen und dann wieder bis zu 4 wachsen, während die Werthe von P beständig zunehmen.

Für Tabelle I. gehören zu jedem Werthe von $R \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 4 \end{smallmatrix}$ drei verschiedene Werthe für P.

In Tabelle II. dagegen wachsen die Werthe von R beständig mit den Werthen von P, und es gehört zu jedem Werthe von R nur ein einziger Werth von P.

56.

Bezeichnen wir irgend einen in die Tabellen eingeschriebenen Werth von R mit R', indem wir seinen folgenden mit R'' und die zugehörigen Werthe von P analog mit P' und P'' bezeichnen, so ist, wenn ein gegebenes R zwischen R' und R'' liegt, das zugehörige $P \begin{smallmatrix} > P' \\ < P'' \end{smallmatrix}$. Wir können aber annähernd einen dieser Werthe für P setzen und daraus p bestimmen, wodurch wir einen annähernden Werth für y erhalten.

Es ist ersichtlich, dass, wenn R näher bei R' als bei R'' liegt, auch P näher bei P' als bei P'' liegen muss und umgekehrt.

57.

Durch Interpolirung sind wir indessen im Stande, die Werthe von P genauer zu bestimmen, als sie die Tabellen angeben.

Zu dem Ende dividiren wir, wenn betreffenden Orts

1) die letzten Decimalstellen von P die natürlich aufeinander folgenden Zahlen sind, die Differenz $R''-R'$ (oder auch bei Tabelle I. vorkommenden Falles $R'-R''$) durch 10, dividiren mit diesem Quotienten in die gebildete Differenz $R-R'$ (oder auch

bei Tabelle I. vorkommenden Falles $R'-R$), und hängen den so erhaltenen Quotienten dem Werthe P' als weitere Decimalstellen an, so erhalten wir den Werth von P genauer.

2) Gradiren aber die letzten Decimalstellen von P' und P'' in den Tabellen von 5 zu 5, so dividiren wir die Differenz $R''-R'$ (oder $R'-R''$) durch 5, dividiren mit diesem Quotienten in die gebildete Differenz $R-R'$ (oder $R'-R$) und addiren den so erhaltenen Quotienten zu dem Werthe P' in der Weise, dass die Ganzen desselben der letzten Decimalstelle von P zugefügt werden.

3) Um bei diesen beiden Klassen der Werthe von P, bezüglich des zu addirenden Quotienten, ein gleiches Verfahren einzuhalten, können wir auch bei der ersteren die Division der Grösse $R''-R'$ durch 10 unterlassen und bloss diese Differenz durch die gebildete Differenz $R-R'$ dividiren. Den so erhaltenen Quotienten hängen wir dann nicht dem Werthe von P' an, sondern addiren ihn in gleicher Weise wie da, wo die letzten Decimalstellen von P in den Tabellen von 5 zu 5 gradiren, indem wir die erhaltenen 0 Ganzen der letzten Decimalstelle von P' zufügen.

4) Anstatt den Werth von P aus P' zu bestimmen, könnten wir denselben auch aus P'' ableiten, nur müssten wir in diesem Falle den Quotienten $\frac{R''-R}{D}$ (oder $\frac{R-R''}{D}$) von P'' abziehen.

58.

Die Spalte D der Tabellen enthält bereits für die eingeschriebenen Werthe von R da, wo die letzten Decimalstellen von P die natürlich aufeinander folgenden Zahlen sind, die Differenzen $R''-R'$ (oder $R'-R''$), und da, wo die letzten Decimalstellen von R von 5 zu 5 gradiren, die Quotienten $\frac{R''-R'}{5}$, zwischen die Werthe von R' und R'' angeschrieben, nur müssen wir den betreffenden Zahlen da, wo ihnen nicht ausdrücklich Ganze vorausgehen, die im Kopfe der Spalte D eingeschriebenen 0 Ganze u. s. w. voransetzen.

Dass das beschriebene Verfahren zur weiteren Bestimmung des Werthes von P nur annähernd richtig ist, bedarf wohl kaum einer Erwähnung, weil die Werthe von P nicht in gleichem Masse mit den Werthen von R wachsen (oder wachsen wie die Werthe von R abnehmen). Es ist daher noch zu erörtern, bis zu welcher Stelle dasselbe für vorliegende Zahlenbeispiele angewendet werden könne, und welche Correktur etwa mit dem Resultate noch

vorzunehmen sei, um den Werth von P bis auf eine gewisse Decimalstelle genau zu erhalten.

59.

Hierüber geben die Anhänge zu den Tabellen Ausweis.

Gesetzt, wir hätten für irgend einen Werth von P zu bestimmen, wie viele Decimalstellen sich von dem zugehörigen Quotienten $\frac{R-R'}{D}$ genau anwenden lassen.

Bezeichnen wir einen in dem Anhange der Tabellen eingeschriebenen Werth von P mit $P_{,}$, indem wir seinen folgenden mit $P_{,,}$ bezeichnen; und suchen wir daselbst eine Stelle auf, für welche $P_{,} < P < P_{,,}$ ist; so ergiebt sich daneben in Spalte C eine Gruppe von vier, oder bei Tabelle II. auch von fünf Zahlen, welche durch die Anzahl ihrer Decimalstellen die Anzahl der verlangten Decimalstellen bezeichnet. Alsdann bestimmen wir den Werth von $\frac{R-R'}{D}$ auf diese angegebene Zahl Decimalstellen und beurtheilen im Falle

1) die letzten Decimalstellen der Werthe von P in den Tabellen die natürlich auf einander folgenden Zahlen sind, den so erhaltenen Quotienten auf seine Zehntel in einer einziffrigen Zahl Q ausgedrückt.

2) Gradiren aber die letzten Decimalstellen der Werthe von P in den Tabellen von 5 zu 5, so beurtheilen wir den Quotienten auf die erhaltenen Ganzen, ebenfalls in einer einziffrigen Zahl Q ausgedrückt.

3) Diese Zahl Q suchen wir in Spalte Q, correspondirend mit der bereits betrachteten Gruppe, auf; so ergiebt sich in letzterer horizontal, also in Spalte C, die Zahl, welche mit Berücksichtigung des über der Gruppe stehenden Zeichens, dem bereits bestimmten Quotienten noch zuzufügen ist.

4) Wollten wir aber P nicht von P', sondern von P'' ableiten, so ist nicht das der Gruppe überschriebene Zeichen, sondern das entgegengesetzte hiervon, in Anwendung zu bringen.

5) Wir sehen aus Spalte Q, dass, wenn $Q=1$ oder 9; 2 oder 8; 3 oder 7; 4, 5 oder 6 ist, jedesmal dieselbe Correktur stattzufinden hat. Von letzterer Regel macht nur der Anfang der Tabelle II. eine Ausnahme.

6) Fällt aber der Werth von Q zwischen zwei übereinanderstehende Ziffern, so liegt auch die Correktur zwischen den correspondirenden, in Spalte C eingeschriebenen Werthen, welche wir dann, je nach dem Werthe von Q, abschätzen.

7) Ist Q nahe 0, oder nahe 10, so findet keine Correktur statt.

60.

Es seien nun z. B. für den Werth $R = 0{,}625$ aus Tabelle I. die zugehörigen drei Werthe von P so genau zu bestimmen, als dies die Einrichtung der Tabelle zulässt.

Man findet Seite 129:

$$(0{,}625 =)\ R \begin{matrix} > 0{,}617269248\ (= R'), \\ < 0{,}625415017\ (= R''), \end{matrix} \quad \text{daher } P > 0{,}072\ (= P'),$$

und es ergiebt sich:

$$\frac{R - R'}{D} = \frac{0{,}625 - 0{,}617269248}{0{,}0081458} = \frac{0{,}007730752}{0{,}0081458}.$$

Die Spalte C des Anhanges zu Tabelle I. giebt an, weil $0{,}070 < P' < 0{,}120$ ist, dass sich der angezeigte Quotient auf fünf Decimalstellen bestimmen lasse. Wir erhalten also:

$$\frac{R - R'}{D} = 0{,}94904$$

und da für diesen Quotienten $Q > 9$ ist, so subtrahiren wir eine kleinere, als die in Spalte C angegebene Zahl 0,00006. Wir schätzen . . $C = -\ 0{,}00003$

also haben wir 0,94901

dem Werthe von . . . . $P' = 0{,}072$

zuzufügen. Man erhält: $P = 0{,}072\,94901.$

61.

Wollen wir aber P mit Hülfe von P'' bestimmen, so erhalten wir:

$$\frac{R'' - R}{D} = \frac{0{,}000415017}{0{,}0081458} = 0{,}05094$$

u. da für diesen Quotienten $Q < 1$ ist, so addiren wir [59. 4)] eine kleinere als die in Spalte C angegebene Zahl 0,00006. Wir schätzen: $C = +\ 0{,}00003$

also haben wir 0,05097

von dem Werthe . . . . $P'' = 0{,}073$

abzuziehen [57. 4)]. Man erhält: $P = 0{,}072\,94903.$

62.

Ein zweiter Werth für P ergiebt sich, nach Seite 134, alsbald $=2{,}5$; weil $R=0{,}625$ genau daselbst angegeben ist.

63.

Nach Seite 136 findet sich:

$$(0{,}625=)\,R\begin{matrix}>0{,}603288(=R'),\\ <0{,}634207(=R''),\end{matrix}\ \text{daher ist}\ P>3{,}42\,(=P')$$

und

$$\frac{R-R'}{D}=\frac{0{,}021712}{0{,}03092}.$$

Aus dem Anhange zu Tabelle I. ergiebt sich:

$$3{,}40<P'<3{,}50$$

sowie, dass sich der angezeigte Quotient auf drei Decimalstellen bestimmen lasse. Man erhält daher:

$$\frac{R-R'}{D}=0{,}702$$

und da für diesen Werth Q nahe $=7$ ist, so findet sich die Correktur . . . . $C=+0{,}003$

also ist . . . . $0{,}705$

dem Werthe von . . . . $P'=3{,}42$

nach [57. 3)] zuzufügen. Daher ist $P=3{,}42705.$

64.

Wollen wir aber P mit Hülfe von P'' bestimmen, so erhalten wir:

$$\frac{R''-R}{D}=\frac{0{,}009207}{0{,}03092}=0{,}297.$$

Da nun für diese Zahl Q nahe $=3$ ist, so ergiebt sich, mit Berücksichtigung von [59. 4)] . . . . $C=-0{,}003$

also ist . . . . $+0{,}294$

dem Werthe von . . . . $P''=3{,}43$

abzuziehen [57. 4)], wodurch sich ergiebt $P=3{,}42706.$

Dieses Resultat ist in Wirklichkeit Etwas zu gross, das in [63] gefundene Etwas zu klein.

65.

Um auch ein Beispiel zu behandeln, für welches die letzten Decimalziffern der Werthe von P in den Tabellen von 5 zu 5 gradiren, sei für den Werth von $R = 1{,}680684$ der zugehörige Werth von P für Seite 130 zu bestimmen.

Man erhält:

$$R \begin{matrix} > 1{,}667588375, \\ < 1{,}700248, \end{matrix} \text{ daher } P > 0{,}215\ (= P').$$

Es ist daher

$$\frac{R - R'}{D} = \frac{1{,}680684 - 1{,}667588375}{0{,}0065319} = \frac{0{,}013095625}{0{,}0065319}.$$

Nun ergiebt sich aus dem Anhange zu Tabelle I., dass $0{,}120 < P' < 0{,}24$ ist, und dass der angezeigte Quotient nach Spalte C auf drei Decimalstellen bestimmt werden könne.

Daher erhält man:

$$\frac{R - R'}{D} = 2{,}004$$

und da für diese Zahl Q nahe $=2$ ist, [59. 2)],
so findet sich . . . . $C = -0{,}004$
also ist . . . . $+2{,}000$
dem Werthe von . . . . $P' = 0{,}215$
zuzufügen, wodurch sich ergiebt: $P = 0{,}217000.$

66.

Um die Richtigkeit des zur näheren Bestimmung von P angegebenen Verfahrens der Interpolirung allgemein einzusehen, kann nachstehende Betrachtung dienen:

Schreiben wir in Gleichung

$$R = +9P \mp 6P^2 + P^3 \qquad [45.\ \text{I. u. II.}]$$

für P nach und nach: n; n, μ; $n, \mu\nu$; $n, \mu\nu\varrho$; $n, \mu\nu\varrho\sigma$; u. s. w., in welchen Ausdrücken n eine beliebige ganze Zahl, die Buchstaben μ, ν, ϱ, σ, ... aber Ziffern, beziehungsweise der Ordnung nach die 1., 2., 3., u. s. w. Decimalstelle bedeuten, so dass diese Grössen auch Null vorstellen können; so wollen wir den bezüg-

lichen Werthen von R, um sie gehörig von einander unterscheiden zu können, die letzte Decimalstelle von P als charakteristisches Zeichen überschreiben.

Es sei nämlich:

$$1)\quad R = \overset{n}{R} \quad \text{für} \quad P = n,$$

$$2)\quad R = \overset{\mu}{R} \quad ,, \quad P = n,\mu \quad = n, \quad + \frac{\mu}{10};$$

$$3)\quad R = \overset{\nu}{R} \quad ,, \quad P = n,\mu\nu \quad = n,\mu \; + \frac{\nu}{100};$$

$$4)\quad R = \overset{\varrho}{R} \quad ,, \quad P = n,\mu\nu\varrho \; = n,\mu\nu + \frac{\varrho}{1000};$$

$$5)\quad R = \overset{\sigma}{R} \quad ,, \quad P = n,\mu\nu\varrho\sigma = n,\mu\nu\varrho + \frac{\sigma}{10000};$$

u. s. w.

Für diese Schreibart ist auch, wie leicht erhellet:

$$6)\quad \overset{\mu=10}{R} = \overset{n+1}{R}; \quad \overset{\nu=10}{R} = \overset{\mu+1}{R}; \quad \overset{\varrho=10}{R} = \overset{\nu+1}{R}; \quad \overset{\sigma=10}{R} = \overset{\varrho+1}{R};$$

u. s. w.

Man erhält:

67.

$$1)\quad \overset{n}{R} = 9[n] \mp 6[n]^2 + [n]^3,$$

$$2)\quad \overset{\mu}{R} = \begin{cases} 9[n,\mu] \mp 6[n,\mu]^2 + [n,\mu]^3, \\ 9[n] + \frac{9\mu}{10} \mp 6[n]^2 \mp \frac{12\mu[n]}{10} \mp \frac{6\mu^2}{100} + [n]^3 + \frac{3\mu[n]^2}{10} + \frac{3\mu^2[n]}{100} + \frac{\mu^3}{1000}, \end{cases}$$

$$3)\quad \overset{\nu}{R} = \begin{cases} 9[n,\mu\nu] \mp 6[n,\mu\nu]^2 + [n,\mu\nu]^3, \\ 9[n,\mu] + \frac{9\nu}{100} \mp 6[n,\mu]^2 \mp \frac{12\nu[n,\mu]}{100} \mp \frac{6\nu^2}{10000} + [n,\mu]^3 + \frac{3\nu[n,\mu]^2}{100} + \frac{3\nu^2[n,\mu]}{10000} + \frac{\nu^3}{1000000}, \end{cases}$$

$$4)\quad \overset{\varrho}{R} = \begin{cases} 9[n,\mu\nu\varrho] \mp 6[n,\mu\nu\varrho]^2 + [n,\mu\nu\varrho]^3, \\ 9[n,\mu\nu] + \frac{9\varrho}{1000} \mp 6[n,\mu\nu]^2 \mp \frac{12\varrho[n,\mu\nu]}{1000} \mp \frac{6\varrho^2}{1000000} + [n,\mu\nu]^3 + \frac{3\varrho[n,\mu\nu]^2}{1000} + \frac{3\varrho^2[n,\mu\nu]}{1000000} + \frac{\varrho^3}{1000000000}, \end{cases}$$

$$5)\quad \overset{\sigma}{R} = \begin{cases} 9[n,\mu\nu\varrho\sigma] \mp 6[n,\mu\nu\varrho\sigma]^2 + [n,\mu\nu\varrho\sigma]^3, \\ 9[n,\mu\nu\varrho] + \frac{9\sigma}{10000} \mp 6[n,\mu\nu\varrho]^2 \mp \frac{12\sigma[n,\mu\nu\varrho]}{10000} \mp \frac{6\sigma^2}{100000000} + [n,\mu\nu\varrho]^3 + \frac{3\sigma[n,\mu\nu\varrho]^2}{10000} + \frac{3\sigma^2[n,\mu\nu\varrho]}{100000000} + \frac{\sigma^3}{1000000000000}. \end{cases}$$

u. s. w.,

welche Gleichungen die allgemeinen Werthe für die in Spalte R der Tabellen enthaltenen Zahlen ausdrücken.

68.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

1) $$\overset{\mu}{R}-\overset{n}{R}=\frac{9\mu}{10}\mp\frac{12\mu[n]}{10}\mp\frac{6\mu^2}{100}+\frac{3\mu[n]^2}{10}+\frac{3\mu^2[n]}{100}+\frac{\mu^3}{1000},$$

2) $$\overset{\nu}{R}-\overset{\mu}{R}=\frac{9\nu}{100}\mp\frac{12\nu[n,\mu]}{100}\mp\frac{6\nu^2}{10000}+\frac{3\nu[n,\mu]^2}{100}+\frac{3\nu^2[n,\mu]}{10000}+\frac{\nu^3}{1000000},$$

3) $$\overset{\varrho}{R}-\overset{\nu}{R}=\frac{9\varrho}{1000}\mp\frac{12\varrho[n,\mu\nu]}{1000}\mp\frac{6\varrho^2}{1000000}+\frac{3\varrho[n,\mu\nu]^2}{1000}+\frac{3\varrho^2[n,\mu\nu]}{1000000}+\frac{\varrho^3}{1000000000},$$

4) $$\overset{\sigma}{R}-\overset{\varrho}{R}=\frac{9\sigma}{10000}\mp\frac{12\sigma[n,\mu\nu\varrho]}{10000}\mp\frac{6\sigma^2}{100000000}+\frac{3\sigma[n,\mu\nu\varrho]^2}{10000}+\frac{3\sigma^2[n,\mu\nu\varrho]}{100000000}+\frac{\sigma^3}{1000000000000}.$$

u. s. w.

Diese Ausdrücke verallgemeinern den Ausdruck $R-R'$ in [57. 1) 3)].

69.

Man kann dieselben auch folgendermassen in Zahlenform darstellen:

1) $$\overset{\mu}{R}-\overset{n}{R}=0,(9\mu)(\mp 6\mu^2)(\mu^3)+0,(\mp 12\mu)(3\mu^2).[n]+0,(3\mu).[n]^2;$$

2) $$\overset{\nu}{R}-\overset{\mu}{R}=0,0(9\nu)0(\mp 6\nu^2)0(\nu^3)+0,0(\mp 12\nu)0(3\nu^2).[n,\mu]+0,0(3\nu).[n,\mu]^2;$$

3) $$\overset{\varrho}{R}-\overset{\nu}{R}=0,00(9\varrho)00(\mp 6\varrho^2)00(\varrho^3)+0,00(\mp 12\varrho)00(3\varrho^2).[n,\mu\nu]+0,00(3\varrho).[n,\mu\nu]^2;$$

4) $$\overset{\sigma}{R}-\overset{\varrho}{R}=0,000(9\sigma)000(\mp 6\sigma^2)000(\sigma^3)+0,000(\mp 12\sigma)000(3\sigma^2).[n,\mu\nu\varrho]+0,000(3\sigma).[n,\mu\nu\varrho]^2;$$

u. s. w.

70.

Setzt man in [68.] jede letzte Decimalstelle $=10$, so erhält man: [66.6)]

1) $\overset{n+1}{R}-\overset{n}{R}=9 \quad \mp 12[n] \quad \mp 6 \quad + 3[n]^2+3[n]+1,$

2) $\overset{\mu+1}{R}-\overset{\mu}{R}=\frac{9}{10} \mp \frac{12[n,\mu]}{10} \mp \frac{6}{100} + \frac{3[n,\mu]^2}{10} + \frac{3[n,\mu]}{100} + \frac{1}{1000},$

3) $\overset{\nu+1}{R}-\overset{\nu}{R}=\frac{9}{100} \mp \frac{12[n,\mu\nu]}{100} \mp \frac{6}{10000} + \frac{3[n,\mu\nu]^2}{100} + \frac{3[n,\mu\nu]}{10000} + \frac{1}{1000000},$

4) $\overset{\varrho+1}{R}-\overset{\varrho}{R}=\frac{9}{1000} \mp \frac{12[n,\mu\nu\varrho]}{1000} \mp \frac{6}{1000000} + \frac{3[n,\mu\nu\varrho]^2}{1000} + \frac{3[n,\mu\nu\varrho]}{1000000} + \frac{1}{1000000000},$

u. s. w.,

welche Ausdrücke die allgemeinen Werthe für die in Spalte D der Tabellen I. und II. enthaltenen Zahlen ausdrücken, insofern die letzten Decimalstellen von P die natürlich aufeinander folgenden Zahlen sind.

71.

Man kann dieselben auch folgendermassen in Zahlenform darstellen:

1) $\overset{n+1}{R}-\overset{n}{R}=\begin{cases} 4-\ 9.[n]+3.[n]^2, & \text{für Tab. I.} \\ 16+15.[n]+3.[n]^2, & \text{,, ,, II.} \end{cases}$

2) $\overset{\mu+1}{R}-\overset{\mu}{R}=\begin{cases} 0,841-1,17.[n,\mu]+0,3.[n,\mu]^2, & \text{,, ,, I.} \\ 0,961+1,23.[n,\mu]+0,3.[n,\mu]^2, & \text{,, ,, II.} \end{cases}$

3) $\overset{\nu+1}{R}-\overset{\nu}{R}=\begin{cases} 0,089401-0,1197.[n,\mu\nu]+0,03.[n,\mu\nu]^2, & \text{,, ,, I.} \\ 0,090601+0,1203.[n,\mu\nu]+0,03.[n,\mu\nu]^2, & \text{,, ,, II.} \end{cases}$

4) $\overset{\varrho+1}{R}-\overset{\varrho}{R}=\begin{cases} 0,008994001-0,011997.[n,\mu\nu\varrho] \\ \qquad +0,003.[n,\mu\nu\varrho]^2, & \text{,, ,, I.} \\ 0,009006001+0,012003.[n,\mu\nu\varrho] \\ \qquad +0,003.[n,\mu\nu\varrho]^2, & \text{,, ,, II.} \end{cases}$

u. s. w.

72.

Schreibt man nun in [69.] für die Buchstaben μ, ν, ϱ, σ nach und nach die Werthe: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; so erhält man:

Für Tabelle I.

$$\overset{\mu=1}{R} - \overset{n}{R} = 0{,}841 - 1{,}17.[n] + 0{,}3.[n]^2;$$
$$\overset{\mu=2}{R} - \overset{n}{R} = 1{,}568 - 2{,}28. \text{ ,, } + 0{,}6. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=3}{R} - \overset{n}{R} = 2{,}187 - 3{,}33. \text{ ,, } + 0{,}9. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=4}{R} - \overset{n}{R} = 2{,}704 - 4{,}32. \text{ ,, } + 1{,}2. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=5}{R} - \overset{n}{R} = 3{,}125 - 5{,}25. \text{ ,, } + 1{,}5. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=6}{R} - \overset{n}{R} = 3{,}456 - 6{,}12. \text{ ,, } + 1{,}8. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=7}{R} - \overset{n}{R} = 3{,}703 - 6{,}93. \text{ ,, } + 2{,}1. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=8}{R} - \overset{n}{R} = 3{,}872 - 7{,}68. \text{ ,, } + 2{,}4. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=9}{R} - \overset{n}{R} = 3{,}969 - 8{,}37. \text{ ,, } + 2{,}7. \text{ ,,}$$
$$\overset{n+1}{R} - \overset{n}{R} = 4 \quad - 9. \quad \text{ ,, } + 3. \quad \text{ ,,}$$

Für Tabelle II.

$$\overset{\mu=1}{R} - \overset{n}{R} = 0{,}961 + 1{,}23.[n] + 0{,}3.[n]^2;$$
$$\overset{\mu=2}{R} - \overset{n}{R} = 2{,}048 + 2{,}52. \text{ ,, } + 0{,}6. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=3}{R} - \overset{n}{R} = 3{,}267 + 3{,}87. \text{ ,, } + 0{,}9. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=4}{R} - \overset{n}{R} = 4{,}624 + 5{,}28. \text{ ,, } + 1{,}2. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=5}{R} - \overset{n}{R} = 6{,}125 + 6{,}75. \text{ ,, } + 1{,}5. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=6}{R} - \overset{n}{R} = 7{,}776 + 8{,}28. \text{ ,, } + 1{,}8. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=7}{R} - \overset{n}{R} = 9{,}583 + 9{,}87. \text{ ,, } + 2{,}1. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=8}{R} - \overset{n}{R} = 11{,}552 + 11{,}52. \text{ ,, } + 2{,}4. \text{ ,,}$$
$$\overset{\mu=9}{R} - \overset{n}{R} = 13{,}689 + 13{,}23. \text{ ,, } + 2{,}7. \text{ ,,}$$
$$\overset{n+1}{R} - \overset{n}{R} = 16 \quad + 15. \quad \text{ ,, } + 3. \quad \text{ ,,}$$

73.

Für Tabelle I.

$$\overset{\nu=1}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}089401-0{,}1197\,.\,[n,\mu]+0{,}03\,.\,[n,\mu]^2;$$
$$\overset{\nu=2}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}177608-0{,}2388\,.\quad \text{„}\quad +0{,}06\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=3}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}264627-0{,}3573\,.\quad \text{„}\quad +0{,}09\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=4}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}350464-0{,}4752\,.\quad \text{„}\quad +0{,}12\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=5}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}435125-0{,}5925\,.\quad \text{„}\quad +0{,}15\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=6}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}518616-0{,}7092\,.\quad \text{„}\quad +0{,}18\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=7}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}600943-0{,}8253\,.\quad \text{„}\quad +0{,}21\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=8}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}682112-0{,}9408\,.\quad \text{„}\quad +0{,}24\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=9}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}762129-1{,}0557\,.\quad \text{„}\quad +0{,}27\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\mu+1}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}841\quad -1{,}17\,.\quad \text{„}\quad +0{,}3\,.\quad \text{„}$$

Für Tabelle II.

$$\overset{\nu=1}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}090601+0{,}1203\,.\,[n,\mu]+0{,}03\,.\,[n,\mu]^2;$$
$$\overset{\nu=2}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}182408+0{,}2412\,.\quad \text{„}\quad +0{,}06\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=3}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}275427+0{,}3627\,.\quad \text{„}\quad +0{,}09\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=4}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}369664+0{,}4848\,.\quad \text{„}\quad +0{,}12\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=5}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}465125+0{,}6075\,.\quad \text{„}\quad +0{,}15\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=6}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}561816+0{,}7308\,.\quad \text{„}\quad +0{,}18\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=7}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}659743+0{,}8547\,.\quad \text{„}\quad +0{,}21\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=8}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}758912+0{,}9792\,.\quad \text{„}\quad +0{,}24\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\nu=9}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}859329+1{,}1043\,.\quad \text{„}\quad +0{,}27\,.\quad \text{„}$$
$$\overset{\mu+1}{R}-\overset{\mu}{R}=0{,}901\quad +1{,}23\,.\quad \text{„}\quad +0{,}3\,.\quad \text{„}$$

74.

Für Tabelle I.

$$\overset{\varrho=1}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}008994001 - 0{,}011997 . [n, \mu\nu] + 0{,}003 . [n, \mu\nu]^2,$$
$$\overset{\varrho=2}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}017976008 - 0{,}023988 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}006 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=3}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}026946027 - 0{,}035973 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}009 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=4}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}035904064 - 0{,}047952 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}012 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=5}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}044850125 - 0{,}059925 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}015 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=6}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}053784216 - 0{,}071892 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}018 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=7}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}062706343 - 0{,}083853 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}021 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=8}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}071616512 - 0{,}095808 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}024 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=9}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}080514729 - 0{,}107757 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}027 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{v+1}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}089401 \quad - 0{,}1197 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}03 . \quad \text{,,}$$

Für Tabelle II.

$$\overset{\varrho=1}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}009006001 + 0{,}012003 . [n, \mu\nu] + 0{,}003 . [n, \mu\nu]^2;$$
$$\overset{\varrho=2}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}018024008 + 0{,}024012 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}006 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=3}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}027054027 + 0{,}036027 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}009 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=4}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}036096064 + 0{,}048048 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}012 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=5}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}045150125 + 0{,}060075 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}015 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=6}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}054216216 + 0{,}072108 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}018 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=7}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}063294343 + 0{,}084147 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}021 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=8}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}072384512 + 0{,}096192 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}024 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{\varrho=9}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}081486729 + 0{,}108243 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}027 . \quad \text{,,}$$
$$\overset{v+1}{R} - \overset{v}{R} = 0{,}090601 \quad + 0{,}1203 . \quad \text{,,} \quad + 0{,}03 . \quad \text{,,}$$

75.

Für Tabelle I.

$$\overset{\sigma=1}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}000899940001 - 0{,}00119997 \,.\, [n, \mu\nu\varrho] + 0{,}0003 \,.\, [n, \mu\nu\varrho]^2;$$

$$\overset{\sigma=2}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}001799760008 - 0{,}00239988 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0006 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=3}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}002699460027 - 0{,}00359973 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0009 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=4}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}003599040064 - 0{,}00479952 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0012 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=5}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}004498500125 - 0{,}00599925 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0015 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=6}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}005397840216 - 0{,}00719892 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0018 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=7}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}006297060343 - 0{,}00839853 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0021 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=8}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}007196160512 - 0{,}00959808 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0024 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=9}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}008095140729 - 0{,}01079757 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0027 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\varrho+1}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}008994001 \quad - 0{,}011997 \quad .\quad ,, \quad + 0{,}0030 \,.\quad ,,$$

Für Tabelle II.

$$\overset{\sigma=1}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}000900060001 + 0{,}00120003 \,.\, [n, \mu\nu\varrho] + 0{,}0003 \,.\, [n, \mu\nu\varrho]^2;$$

$$\overset{\sigma=2}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}001800240008 + 0{,}00240012 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0006 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=3}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}002700540027 + 0{,}00360027 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0009 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=4}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}003600960064 + 0{,}00480048 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0012 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=5}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}004501500125 + 0{,}00600075 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0015 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=6}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}005402160216 + 0{,}00720108 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0018 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=7}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}006302940343 + 0{,}00840147 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0021 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=8}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}007203840512 + 0{,}00960192 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0024 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\sigma=9}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}008104860729 + 0{,}01080243 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0027 \,.\quad ,,$$

$$\overset{\varrho+1}{R} - \overset{\varrho}{R} = 0{,}009006001 \quad + 0{,}012003 \,.\quad ,, \quad + 0{,}0030 \quad ,,$$

76.

Das Gesetz des Fortschreitens dieser Ausdrücke ist bereits in die Augen springend und könnte, wenn die Werthe von P in den Tabellen auf mehr als drei Decimalstellen zu bestimmen wären, leicht fortgesetzt werden. So ergeben sich z. B., wenn τ die 5te Decimalstelle bezeichnet, leicht die Ausdrücke:

Für Tabelle I.

$$\overset{\tau=1}{R} - \overset{\sigma}{R} = 0{,}000089999400001 - 0{,}0001199997 . [n, \mu\nu\varrho\sigma] + 0{,}00003 . [n, \mu\nu\varrho\sigma]^2;$$

$$\overset{\tau=2}{R} - \overset{\sigma}{R} = 0{,}000179997600008 - 0{,}000239998 . [n, \mu\nu\varrho\sigma] + 0{,}00006 . \quad ,,$$

u. s. w.

77.

Dividirt man die Werthe von [71.] durch 10 und mit diesem Quotienten [nach 57. 1)] in die Werthe von [69.], so müsste, wenn das beschriebene Verfahren der Interpolirung genau richtig wäre, allgemein sein:

$$1)\ \frac{\overset{\mu}{R} - \overset{n}{R}}{\frac{\underset{n+1}{R} - \underset{n}{R}}{10}} = \mu; \quad 2)\ \frac{\overset{\nu}{R} - \overset{\mu}{R}}{\frac{\underset{\mu+1}{R} - \underset{\mu}{R}}{10}} = \nu; \quad 3)\ \frac{\overset{\varrho}{R} - \overset{\nu}{R}}{\frac{\underset{\nu+1}{R} - \underset{\nu}{R}}{10}} = \varrho;$$

$$4)\ \frac{\overset{\sigma}{R} - \overset{\varrho}{R}}{\frac{\underset{\varrho+1}{R} - \underset{\varrho}{R}}{10}} = \sigma; \quad \text{u. s. w.}$$

Durch Bildung dieser Quotienten erhält man aber die Werthe von $\mu, \nu, \varrho, \sigma, \ldots.$ nur annähernd. Bildet man nun diese Quotienten, indem man statt der allgemeineren Formeln [69.] die specielleren Formeln [72.—75.] anwendet, so kann man die Entwickelung derselben nach steigenden und nach fallenden Potenzen der veränderlichen Grösse, je nachdem diese veränderliche Grösse $\lessgtr 1$, also $n=0$ oder $n \geqq 1$, ist, vornehmen.

Entwickeln wir z. B. den Quotienten 3) und ordnen nach steigenden Potenzen, so erhalten wir:

78.

Für Tabelle I.

$$\frac{\overset{\varrho}{R}-\overset{\nu}{R}}{\frac{\underset{\nu+1}{R}-\underset{\nu}{R}}{10}}=\left\{\begin{array}{llllll}
1+0{,}00603+0{,}00505.[0,\mu\nu] & +0{,}00474.[0,\mu\nu]^2 & +\ldots & \text{für} & \varrho=1, \\
2+0{,}01074+0{,}00901. \quad ,, & +0{,}00846. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=2, \\
3+0{,}01406+0{,}01178. \quad ,, & +0{,}01106. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=3, \\
4+0{,}01607+0{,}01346. \quad ,, & +0{,}01263. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=4, \\
5+0{,}01674+0{,}01402. \quad ,, & +0{,}01315. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=5, \\
6+0{,}01606+0{,}01346. \quad ,, & +0{,}01263. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=6, \\
7+0{,}01405+0{,}01177. \quad ,, & +0{,}01105. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=7, \\
8+0{,}01071+0{,}00897. \quad ,, & +0{,}00841. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=8, \\
9+0{,}00602+0{,}00504. \quad ,, & +0{,}00473. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=9.
\end{array}\right.$$

Für Tabelle II.

$$\frac{\overset{\varrho}{R}-\overset{\nu}{R}}{\frac{\underset{\nu+1}{R}-\underset{\nu}{R}}{10}}=\left\{\begin{array}{llllll}
1-0{,}00597+0{,}00495.[0,\mu\nu] & -0{,}00459.[0,\mu\nu]^2 & +\ldots & \text{für} & \varrho=1, \\
2-0{,}01062+0{,}00880. \quad ,, & -0{,}00817. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=2, \\
3-0{,}01394+0{,}01155. \quad ,, & -0{,}01072. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=3, \\
4-0{,}01593+0{,}01321. \quad ,, & -0{,}01226. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=4, \\
5-0{,}01660+0{,}01376. \quad ,, & -0{,}01277. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=5, \\
6-0{,}01594+0{,}01321. \quad ,, & -0{,}01238. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=6, \\
7-0{,}01395+0{,}01156. \quad ,, & -0{,}01074. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=7, \\
8-0{,}01063+0{,}00881. \quad ,, & -0{,}00818. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=8, \\
9-0{,}00598+0{,}00496. \quad ,, & -0{,}00460. \quad ,, & +\ldots & ,, & \varrho=9.
\end{array}\right.$$

Es müssten also die links des Gleichheitszeichens stehenden angezeigten Quotienten dem jedesmaligen ersten Gliede der Entwickelung gleich sein, wenn das, zur näheren Bestimmung von P mittelst Interpolirung angegebene, Verfahren genau richtig wäre. Da dies aber nicht der Fall ist, so ist die Summe aller folgenden Glieder als Fehler dieses Verfahrens zu betrachten.

79.

Es geht indessen aus diesen Darstellungen hervor:

1) dass der Fehler für beide Tabellen anfangs mit dem Werthe von ϱ wächst, für $\varrho=5$ am grössten ist, und dann wieder abnimmt;

2) dass die Fehler für $\varrho=1$ und $\varrho=9$; für $\varrho=2$ und $\varrho=8$; für $\varrho=3$ und $\varrho=7$; für $\varrho=4$ und $\varrho=6$ nicht sehr von einander verschieden sind, und dass letzteren auch der Fehler für $\varrho=5$ sehr nahe kommt;

3) dass durch Anwendung der Spalte D betreffenden Orts die Werthe von ϱ in Tabelle I. zu gross, in Tabelle II. aber zu klein gefunden werden, dass die Correktur in ersterer also negativ, in letzterer positiv sein muss;

4) dass der Fehler für Tabelle I. abnimmt, wenn die Werthe von μ, ν abnehmen und umgekehrt.

5) Ist der Werth von $0,\mu\nu$ nahe gleich 1, so ist der Fehler, ohne dass wir eine bedeutende Anzahl von Gliedern entwickeln und summiren, aus diesen allgemeinen Ausdrücken nicht leicht zu bestimmen, weil die Coefficienten der Glieder nur langsam abnehmen. Die Fehler müssen daher für diesen Fall aus den betreffenden Zahlen selbst bestimmt werden.

80.

Hat man etwa die Fehler zu bestimmen, welche sich durch das angegebene Verfahren der Interpolirung zwischen den Werthen $P'=0{,}24$ und $P''=0{,}25$ für Tabelle II. ergeben, so ist hierfür $\mu=2$ und $\nu=4$. Nun setze man, um den grössten Fehler zu finden, $\varrho=5$, oder auch $\varrho=4$ oder 6 [79. 2)]. Gesetzt es sei $\varrho=4$, also $P=0{,}244$, so ergiebt sich, diesen Werth in [45. II.] substituirt, $R=2{,}567742784$; daher ist nach Tabelle II.:

$$\frac{R-R'}{D}=\frac{2{,}567742784-2{,}519424}{0{,}1212}=\frac{0{,}048318784}{0{,}1212}=0{,}398\ldots$$

Wäre das Verfahren der Interpolirung genau,
so müsste sich aber ergeben . . . . . $0,\varrho=0{,}4$

Daher ergiebt sich grösste Correktur . . . $C=0{,}002$ positiv.

Auf gleiche Weise ist zu verfahren, um die Correktur für $\varrho=3$ oder 7; 2 oder 8; 1 oder 9 zu erhalten; u. s. w.

81.

Die unter [79. 1) u. 2)] bemerkten Gesetze ergeben sich auch, wenn man die Entwickelung nach fallenden Potenzen vornimmt, und sie ergeben sich auch bei der Entwickelung aller übrigen Quotienten [77.] nach steigenden oder nach fallenden Potenzen, und es findet hierin die Einrichtung der Spalte Q in den An-

hängen zu den Tabellen für die Fälle, in welchen die letzten Decimalstellen von P die natürlich auf einander folgenden Zahlen sind, ihre Begründung.

Das Verfahren für die Fälle, in welchen die letzten Decimalstellen der Werthe von P in den Tabellen von 5 zu 5 gradiren, beruht auf ganz analoger Betrachtungsweise und man findet, dass die Fehler der Quotienten

$$\frac{\frac{R - R'}{R'' - R'}}{5} \quad [57.\ 2)]$$

für $Q = 1$ oder 4; 2 oder 3 nahe einander gleich, sowie dass diese Fehler für $Q = 2$ oder 3 grösser sind, als für $Q = 1$ oder 4.

Nachstehend wollen wir noch die allgemeinen Formen der hierhergehörigen Werthe von D zusammenstellen, welche man erhält, wenn man in [69.] die letzten Decimalstellen gleich 5 setzt, und dann sämmtliche Gleichungen durch 5 dividirt.

82.

$$\frac{\overset{\mu=5}{R} - \overset{n}{R}}{5} = \begin{cases} 0{,}625 - 1{,}05.[n] + 0{,}3.[n]^2, \\ 1{,}225 + 1{,}35.[n] + 0{,}3.[n]^2, \end{cases}$$

$$\frac{\overset{\nu=5}{R} - \overset{\mu}{R}}{5} = \begin{cases} 0{,}087025 - 0{,}1185.[n,\mu] + 0{,}03.[n,\mu]^2, \\ 0{,}093025 + 0{,}1215. \quad ,, \quad + 0{,}03. \quad ,, \end{cases}$$

$$\frac{\overset{\varrho=5}{R} - \overset{\nu}{R}}{5} = \begin{cases} 0{,}008970025 - 0{,}011985.[n,\mu\nu] + 0{,}003.[n,\mu\nu]^2, \\ 0{,}009030025 + 0{,}012015. \quad ,, \quad + 0{,}003. \quad ,, \end{cases}$$

$$\frac{\overset{\sigma=5}{R} - \overset{\varrho}{R}}{5} = \begin{cases} 0{,}000899700025 - 0{,}00119985\,[n,\mu\nu\varrho] + 0{,}0003.[n,\mu\nu\varrho]^2, \\ 0{,}000900300025 + 0{,}00120015 \quad ,, \quad + 0{,}0003. \quad ,, \end{cases}$$

83.

Wenden wir das bisher Abgehandelte auf einige Zahlenbeispiele an.

Es seien die reellen Wurzeln der Gleichung:

$$0 = \underset{a}{120} + \underset{b}{80}y + \underset{c}{16}y^2 + y^3$$

so genau zu bestimmen, als dies die Einrichtung der Tabellen zulässt.

Der Vorzeichen der Glieder wegen, und weil $c^2 < 4b$, nämlich $256 < 320$ ist, ist nach [47.] aufzulösen. Man erhält:

$$[c^2 - 3b]^{\frac{1}{2}} = 4; \quad [c^2 - 3b]^{\frac{3}{2}} = 64;$$

$$\begin{aligned} 27a &= 3240, \\ 27q^+ &= 3200, \\ 27q_- &= 3456. \end{aligned}$$

Hiernach liegt q^+ der Grösse a näher als q_-, also ist:

$$a > q^+$$

und daher der Fall 2) vorliegend. Man erhält weiter:

$$27(a - q^+) = \begin{cases} 40, \\ 27r, \end{cases} \text{ also } R = 40 : 64 = 0{,}625 \quad [44.5)].$$

Für diesen Werth von R finden sich, nach [60.—64.] die drei Werthe:

$$P = \begin{cases} 0{,}07294901 \\ 2{,}5 \\ 3{,}42705; \end{cases} \text{ also } P.4 = p = \begin{cases} 0{,}29179604 \\ 10. \\ 13{,}70820 \end{cases} \quad [44.6)].$$

Daher ist:

$$(3y) = -16 + 2.4 \begin{cases} -0{,}29179604 \\ -10. \\ -13{,}70820, \end{cases} = \begin{cases} -8{,}29179604 \\ -18. \\ -21{,}70820, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -2{,}76393202 \\ -6. \\ -7{,}236066. \end{cases}$$

84.

Es sei die gegebene Gleichung

$$0 = \underset{a}{-1} + \underset{b}{80}y + \underset{c}{16}y^2 + y^3,$$

so ist, der Vorzeichen wegen, nach [48.] aufzulösen, und man erhält:

$$-27a = -27$$
$$+27q^{+} = +3200$$

also ist $-a < +q^{+}$, daher der Fall 1) vorliegend, nach welchem die vorgelegte Gleichung nur eine reelle Wurzel hat. Man erhält weiter:

$$27(a+q^{+}) = \begin{cases} 3227 \\ 27r \end{cases}$$ Also ist $R = 3227:64 = 50{,}421875.$

Hierfür ergiebt sich, nach Tabelle II.:

$$R' = 50 \quad \text{und} \quad P' = 2{,}00$$

$$\frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}421875}{0{,}4512} = 0{,}935.$$

Da hier $Q > 9$ ist, so nehmen wir keine Correktur vor, daher ist . . . . $P = 2{,}00935,$

und $P.4 = p = 8{,}03740,$

$(3y) = -16 + 8 + 8{,}03740 = 0{,}03740,$

$y = 0{,}01246.$

85.

Ist aber das gegebene Beispiel:

$$0 = \underset{a}{+1} \underset{b}{+80y} \underset{c}{-16y^2} + y^3,$$

so ist, der Vorzeichen wegen, nach [51.] aufzulösen, und man erhält:

$$+27a = +27$$
$$-27q^{+} = -3200$$

also $+a > -q^{+}$, daher Fall 1) vorliegend. Die Rechnung ergiebt sich dann wie in [84.], und man erhält:

$$(3y) = +16 - 8 - 8{,}03740 = -0{,}03740; \text{ also } y = -0{,}01246.$$

86.

Es seien die reellen Wurzeln der Gleichung

$$0 = \underset{a}{+136} \underset{b}{+99y} \underset{c}{+21y^2} + y^3$$

so genau zu bestimmen, als dies die Einrichtung der Tabellen gestattet.

Der Vorzeichen der Glieder wegen, und weil $c^2 > 4b$, nämlich $441 > 396$ ist, ist nach [48.] aufzulösen. Man erhält:

$$[c^2-3b]^{\frac{1}{2}}=12;\ [c^2-3b]^{\frac{3}{2}}=1728,$$

$$+27a \;=+\,3672$$
$$+27q_- =+\,3645$$

daher ist $+a > +q_-$ und Fall 4) vorliegend, nach welchem die vorgelegte Gleichung nur eine reelle Wurzel hat. Man erhält weiter:

$$27(a-q_-)=\begin{cases}27\\27r,\end{cases} \text{ also } R=27:1728=0{,}015625,$$

daher ist nach Tabelle II.:

$$R'=0{,}009006001;\ P'=0{,}001;\ \frac{R-R'}{D}=\frac{0{,}006618999}{0{,}009018}=\quad 0{,}73397$$

$$C=+0{,}00013$$
$$\overline{\qquad 0{,}73410}$$
$$P'=0{,}001$$
$$\overline{P=0{,}00173410.}$$

$$P.12=p=0{,}02080920,$$

also:

$$(3y)=-21-24-0{,}02080920=-45{,}02080920,$$
$$\text{daher } y=-15{,}00693640.$$

87.

Es sei die gegebene Gleichung:

$$0=\underset{a}{-120}+\underset{b}{99}y+\underset{c}{21}y^2+y^3.$$

Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [48.] aufzulösen. Man erhält:

$$-27a \;=-\,3240,$$
$$-27q^+ =-\,3267,$$

daher ist $-a > -q^+$ und Fall 2) vorliegend, nach welchem die Gleichung drei reelle Wurzeln hat. Es ergiebt sich:

$$27(q^+-a)=\begin{cases}27,\\27r,\end{cases} \text{ also } R=27:1728=0{,}015625.$$

Für diesen Werth von R ergeben sich nach Tabelle I. die drei Werthe:

$$R' = \begin{cases} 0{,}008994001, \\ 0{,}016453125, \\ 0{,}015043; \end{cases} \qquad P' = \begin{cases} 0{,}001, \\ 2{,}925, \\ 3{,}070; \end{cases}$$

und es folgt:

$\frac{R-R'}{D}=\frac{0{,}006630999}{0{,}008982}$	$\frac{R'-R}{D}=\frac{0{,}000828125}{0{,}0004192}$	$\frac{R-R'}{D}=\frac{0{,}000582}{0{,}0004508}$
$= 0{,}73825$	$= 1{,}97$	$= 1{,}29$
$C=-0{,}00013$	$C=-0{,}03$	$C=+0{,}04$
$0{,}73812$	$1{,}94$	$1{,}33$
$P'=0{,}001$	$P'=2{,}925$	$P'=3{,}070$
$P=0{,}00173812$	$P=2{,}92694$	$P=3{,}07133.$

Es ist $P.12=p$, daher:

$p=0{,}02085744$	$p=35{,}12328$	$p=36{,}85596$

$$(3y)=-21+24\begin{cases} -\ 0{,}02085744 & =+\ 2{,}97914256 \\ -35{,}12328 & =-32{,}12328 \\ -36{,}85596 & =-33{,}85596 \end{cases}$$

also

$$y=\begin{cases} +\ 0{,}99304752 \\ -10{,}70774 \\ -11{,}28532. \end{cases}$$

Diese letzte Ziffer ist um 2 zu gross gefunden, weil $C=+0{,}04$ etwas zu gross angenommen ist.

88.

Es sei die gegebene Gleichung:

$$0=-\underset{a}{269}-\underset{b}{68}y+\underset{c}{2}y^2+y^3.$$

Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [49.] aufzulösen. Man erhält:

$$[c^2+3b]^{\frac{1}{2}}=14{,}42220510,\quad [c^2+3b]^{\frac{3}{2}}=2999{,}81866,$$

$$-27a \;= -7263,$$
$$-27q^{+} = -7239{,}637321.$$

Hiernach ist $-a < -q^{+}$ und daher der Fall 1) vorliegend, nach welchem die Gleichung nur eine reelle Wurzel hat. Es ergiebt sich:

$$27(a - q^{+}) = \begin{cases} 23{,}362679, \\ 27r; \end{cases}$$

also ist:

$$R = 23{,}362679 : 2999{,}81866 = 0{,}00778803.$$

Nach Tabelle II. findet sich:

$$R' = 0{,}00000000, \quad P' = 0{,}000,$$

also ist:

$$\frac{R - R'}{D} = \frac{0{,}00778803}{0{,}009006} = \;0{,}86476$$
$$C = +0{,}00007$$
$$\overline{\quad 0{,}86483}$$
$$P' = 0{,}000$$
$$P = 0{,}00086483.$$

Daher ergiebt sich:

$$P . 14{,}42220510 \ldots = p = 0{,}01247275.$$

Also ist:

$$(3y) = -2 + 28{,}84441020 + 0{,}01247275 = 26{,}85688295,$$

daher:

$$y = 8{,}95229431.$$

89.

Ist aber die gegebene Gleichung:

$$0 = -\underset{a}{268} - \underset{b}{68}y + \underset{c}{2}y^2 + y^3,$$

so ist, der Vorzeichen wegen, wieder nach [49.] aufzulösen und man erhält:

$$-27a \;= -7236,$$
$$-27q^{+} = -7239{,}637321,$$

also $-a > -q^{+}$ und daher Fall 2) vorliegend, nach welchem die Gleichung drei reelle Wurzeln hat. Es ergiebt sich weiter:

$$27(q^{+}-a)=\begin{cases}3{,}637321,\\ 27r,\end{cases}$$

also:

$$R=3{,}637321:2999{,}81866=0{,}001212513.$$

Für diesen Werth von R ergeben sich nach Tabelle I. die drei Werthe:

$$R'=\begin{cases}0{,}000000000,\\ 0{,}001859375,\\ 0{,}001208;\end{cases}\quad P'=\begin{cases}0{,}000,\\ 2{,}975,\\ 3{,}020;\end{cases}$$

und es ist:

$\frac{R-R'}{D}=\frac{0{,}001212513}{0{,}008994}$	$\frac{R'-R}{D}=\frac{0{,}000646862}{0{,}00013347}$	$\frac{R-R'}{D}=\frac{0{,}000004513}{0{,}00013652}$
$=0{,}13481$	$=4{,}846$	$=0{,}03$
$C=-0{,}00007$	$C=-0{,}006$	$C=+0{,}00$
$0{,}13474$	$4{,}840$	$0{,}03$
$P'=0{,}000$	$P'=2{,}975$	$P'=3{,}020$
$P=0{,}00013474$	$P=2{,}979840$	$P=3{,}02003.$

Nun ist $P.14{,}42220510=p$, daher:

$p=0{,}00194324$	$p=42{,}97586$	$p=43{,}5555$

$$(3y)=-2+28{,}84441020\begin{cases}-\ 0{,}00194324=+26{,}84246706\\ -42{,}97586\quad=-16{,}13145\\ -43{,}5555\quad=-16{,}7111,\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}+8{,}94748902\\ -5{,}37715\\ -5{,}5703.\end{cases}$$

90.

Es sei die gegebene Gleichung

$$0=-\underset{a}{30}-\underset{b}{31}y-\underset{c}{10}y^2+y^3.$$

Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [52.] aufzulösen und man erhält:

$$[c^2+3b]^{\frac{1}{2}}=13{,}89244399,\quad [c^2+3b]^{\frac{3}{2}}=2681{,}2417;$$

$$-27a = -810,$$
$$-27q_- = -572,48338.$$

Hiernach ist $-27a < -27q_-$ und daher Fall 4) vorliegend, nach welchem die Gleichung nur eine reelle Wurzel hat. Man erhält weiter:

$$a - q_- = \begin{cases} 237,51662, \\ 27r, \end{cases}$$

also ist:

$$R = 237,51662 : 2681,2417 = 0,08858456.$$

Nach Tabelle II. findet sich:

$$R' = 0,081486729, \quad P' = 0,009,$$

also ist:

$$\frac{R - R'}{D} = \frac{0,00709783}{0,0091143} = 0,77876$$
$$C = +\,0,00011$$
$$\overline{0,77887}$$
$$P' = 0,009$$
$$P = \overline{0,00977887}.$$

Daher ergiebt sich:

$$P.13,89244399 = p = 0,13585240.$$

Also ist:

$$(3y) = 10 + 27,78488798 + 0,13585240 = 37,92074038,$$

daher:

$$y = 12,64024679.$$

(Die dritte Abtheilung dieser Abhandlung folgt in einem der nächsten Hefte.)

XVII.

Ueber die Reduction der grössten Sonnenhöhe auf den Meridian bei veränderlichem Beobachtungsorte.

Von

Herrn Dr. *Karl Friesach*,

k. k. Hauptmann in d. A. in Wien.

Die grosse Schnelligkeit, womit heutzutage sowohl Segel- als Dampfschiffe die Meere befahren, kann in gewissen Fällen zur Folge haben, dass man die geographische Breite, wenn man dieselbe auf die gewöhnliche Art, aus der beobachteten grössten Sonnenhöhe, diese als die beobachtete Mittagshöhe ansehend, ableitet, um einen Betrag fehlerhaft erhält, welcher bereits die Grenzen der erreichbaren Genauigkeit überschreitet. Will man daher bei der Breitenbestimmung mit grösster Genauigkeit zu Werke gehen, so hat man an der beobachteten grössten Höhe, ausser den bekannten Correctionen wegen Kimmtiefe, Refraction, Parallaxe und Halbmesser, noch eine Verbesserung wegen der Schiffsbewegung anzubringen. Diese Verbesserung wird von den Seefahrern niemals berücksichtigt. Aber auch in Handbüchern der Schifffahrtskunde, denen man keineswegs den Vorwurf der Oberflächlichkeit machen kann, bleibt dieselbe unberührt, während in allen jenen Werken die übrigen Correctionen, deren einige oft weit weniger als die eben angeführte betragen, stets ausführlich behandelt werden. Dies berechtigt zu dem Schlusse, dass der Einfluss der Schiffsbewegung auf die Breitenbestimmung bisher für unbedeutender gehalten wurde, als er in der That ist.

Bekanntlich hat, auch bei festem Beobachtungsorte, das Maximum der Sonnenhöhe in der Regel nicht genau im Meridiane Statt, eine Erscheinung, welche in der veränderlichen Deklination

der Sonne ihren Grund hat. Die auf der Deklinations-Aenderung allein beruhende Correction der grössten Höhe ist allerdings so gering, dass sie bei Ortsbestimmungen zur See, wobei es auf einige Bogensekunden nicht ankömmt, füglich vernachlässigt werden kann. Die zur See während der Beobachtung vor sich gehende Aenderung des Standortes erzeugt aber eine ähnliche Wirkung, nur mit dem Unterschiede, dass die hieraus entspringende Differenz zwischen der grössten und der mittägigen Höhe weit beträchtlicher ist, vorausgesetzt, dass sich das Schiff nahezu in der Richtung eines Meridians mit einer Geschwindigkeit bewegt, welche dem bis jetzt erreichten Maximum nahe kömmt, und dass die Kulmination der Sonne nicht nahe am Zenith erfolgt.

Um die vollständige Reduction auf den Meridian wegen der Schiffsbewegung und Deklinations-Aenderung zu erhalten, geht man am besten von der Gleichung

$$1) \quad \sin h = \cos\varphi \cos\delta \cos s + \sin\varphi \sin\delta$$

aus, wo h die wahre Höhe, δ die Deklination und s den Stundenwinkel der Sonne (auf den Meridian des Beobachtungsortes bezogen), endlich φ die geographische Breite des Beobachtungsortes bezeichnet. Diese Gleichung gilt allgemein, wenn man südliche Breite und Deklination als negative Grössen betrachtet.

Indem man obige Gleichung, sämmtliche darin vorkommende Grössen als Funktionen der Zeit ansehend, nach der Zeit differentiirt, den daraus für den Differentialquotienten von h sich ergebenden Werth der Null gleich setzt und diese letzte Gleichung nach s auflöst, so erhält man den der grössten Sonnenhöhe entsprechenden Stundenwinkel, woraus sodann die Reduction auf den Meridian, nach der bekannten Methode der Circummeridianhöhen, berechnet werden kann.

Bewegt sich das Schiff in der Richtung eines Meridians, so ist der Stundenwinkel s von dieser Bewegung unabhängig, und kann darum die Differentiation nach s verrichtet werden. Fällt hingegen der Kurs nicht mit einem Meridiane zusammen, so muss die Zeit auf einen festen Meridian, z. B. denjenigen von Greenwich, bezogen werden. Man hat in diesem Falle, wenn S den Stundenwinkel für den Meridian von Greenwich (die wahre Greenwicher Zeit) und λ die östliche Greenwicher Länge des Beobachtungsortes bezeichnet, $S + \lambda$ anstatt s in die Gleichung 1) zu substituiren und nach S zu differentiiren. Dies führt zur Gleichung

$$2) \quad (1 + \lambda') \cos\varphi \cos\delta \sin s + (\varphi' \sin\varphi \cos\delta + \delta' \cos\varphi \sin\delta) \cos s$$
$$= \varphi' \cos\varphi \sin\delta + \delta' \sin\varphi \cos\delta,$$

wo

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dS}, \quad \delta' = \frac{d\delta}{dS} \text{ und } \lambda' = \frac{d\lambda}{dS}.$$

Von diesen Grössen sind φ, φ' und λ' aus der Schiffsrechnung näherungsweise, δ und δ' hingegen aus den Ephemeriden und der bekannten Greenwicher Zeit der Beobachtung ziemlich genau bekannt.

Um die Gleichung 2) nach s aufzulösen, sei

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}\right\}, \text{ so ist: } \quad \begin{aligned} x &= \frac{ac \pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}, \\ y &= \frac{bc \mp a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$\sin s = x, \quad (1+\lambda')\cos\varphi\cos\delta = a \text{ und } \varphi'\cos\varphi\sin\delta + \delta'\sin\varphi\cos\delta = c,$$
$$\cos s = y, \quad \varphi'\sin\varphi\cos\delta + \delta'\cos\varphi\sin\delta = b;$$

so erhält man:

$$ac = (1+\lambda')\cos\varphi\cos\delta(\varphi'\cos\varphi\sin\delta + \delta'\sin\varphi\cos\delta)$$
$$= (1+\lambda')\cos\varphi^2\cos\delta^2(\varphi'\operatorname{tg}\delta + \delta'\operatorname{tg}\varphi),$$

$$bc = \cos\varphi^2\cos\delta^2(\varphi'\operatorname{tg}\varphi + \delta'\operatorname{tg}\delta)\,(\varphi'\operatorname{tg}\delta + \delta'\operatorname{tg}\varphi)$$
$$= \cos\varphi^2\cos\delta^2[(\varphi'^2 + \delta'^2)\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta + \varphi'\delta'(\operatorname{tg}\varphi^2 + \operatorname{tg}\delta^2)],$$

$$b^2 - c^2 = (\varphi'^2 - \delta'^2)(\sin\varphi^2\cos\delta^2 - \cos\varphi^2\sin\delta^2)$$
$$= (\varphi'^2 - \delta'^2)\cos\varphi^2\cos\delta^2(\operatorname{tg}\varphi^2 - \operatorname{tg}\delta^2),$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = \cos\varphi^2\cos\delta^2[(1+\lambda')^2 + (\varphi'^2 - \delta'^2)(\operatorname{tg}\varphi^2 - \operatorname{tg}\delta^2)],$$

$$a\sqrt{a^2+b^2-c^2} = \cos\varphi^2\cos\delta^2(1+\lambda')\sqrt{(1+\lambda')^2 + (\varphi'^2-\delta'^2)(\operatorname{tg}\varphi^2 - \operatorname{tg}\delta^2)},$$

$$b\sqrt{a^2+b^2-c^2}$$
$$= \cos\varphi^2\cos\delta^2(\varphi'\operatorname{tg}\varphi + \delta'\operatorname{tg}\delta)\sqrt{(1+\lambda')^2 + (\varphi'^2-\delta'^2)(\operatorname{tg}\varphi^2 - \operatorname{tg}\delta^2)},$$

$$a^2 + b^2 = \cos\varphi^2\cos\delta^2[(1+\lambda')^2 + (\varphi'\operatorname{tg}\varphi + \delta'\operatorname{tg}\delta)^2],$$

$$3)\quad \sin s = \frac{\left\{\begin{gathered}(1+\lambda')(\varphi'\operatorname{tg}\delta + \delta'\operatorname{tg}\varphi) \\ \pm(\varphi'\operatorname{tg}\varphi + \delta'\operatorname{tg}\delta)\sqrt{(1+\lambda')^2 + (\varphi'^2-\delta'^2)(\operatorname{tg}\varphi^2 - \operatorname{tg}\delta^2)}\end{gathered}\right\}}{(1+\lambda')^2 + (\varphi'\operatorname{tg}\varphi + \delta'\operatorname{tg}\delta)^2},$$

$$4)\quad \cos s = \frac{\left\{\begin{gathered}(\varphi'^2 + \delta'^2)\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta + \varphi'\delta'(\operatorname{tg}\varphi^2 + \operatorname{tg}\delta^2) \\ \mp(1+\lambda')\sqrt{(1+\lambda')^2 + (\varphi'^2-\delta'^2)(\operatorname{tg}\varphi^2 - \operatorname{tg}\delta^2)}\end{gathered}\right\}}{(1+\lambda')^2 + (\varphi'\operatorname{tg}\varphi + \delta'\operatorname{tg}\delta)^2}.$$

Wie man sieht, wird, für $\varphi' = \lambda' = \delta' = 0$, $\cos s = \mp 1$. Da aber in gegenwärtigem Falle, für jene Werthe, $s = 0$ wird, folglich $\cos s = +1$ sein muss, so gilt in den Gleichungen 3) und 4) nur das untere Zeichen.

Wenn man obigen Werth für $\sin s$ nach steigenden Potenzen der kleinen Grössen φ', λ', δ' entwickelt und bei den Gliedern erster Ordnung stehen bleibt, so zeigt es sich, dass in erster Annäherung die Längenbewegung des Schiffes auf den Stundenwinkel s der grössten Höhe ohne Einfluss ist, und man hat:

$$5) \left\{ \begin{aligned} &\sin s = -(\varphi' - \delta')(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta) = -\frac{(\varphi' - \delta')\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi\cos\delta}, \\ &s = -\frac{(\varphi' - \delta')(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta)}{\sin 1''} = -\frac{(\varphi' - \delta')\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi\cos\delta\sin 1''} \text{ (in Bogensekunden).} \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Formeln ist ersichtlich, dass der Einfluss der Schiffsbewegung auf den Abstand der Sonne im Höhenmaximum vom Meridiane in hohen Breiten am beträchtlichsten ist, während zwischen den Wendekreisen dieser Abstand immer nur wenig beträgt, und in dem Falle, dass die Kulmination im Zenith erfolgt, gänzlich verschwindet.

Um aus der grössten Höhe h die wahre Mittagshöhe H für den Ort, wo das Höhenmaximum beobachtet wird, abzuleiten, hat man, indem man die dem Augenblicke des Höhenmaximums entsprechende Deklination δ auch für den wahren Mittag gelten lässt,

$$6) \ldots\ldots \sin H = \sin h + 2\cos\varphi\cos\delta\sin\frac{s^2}{2},$$

oder, für den Fall, dass s sehr klein und h nicht nahe $= 90^0$ ist, annäherungsweise:

$$7) \ldots\ldots\ldots H = h + \frac{2\cos\varphi\cos\delta\sin\frac{s^2}{2}}{\cos h \sin 1''}.$$

Es bezeichne nun φ_1 die geographische Breite und λ_1 die östliche Greenwicher Länge desjenigen Ortes, wo sich das Schiff im Augenblicke des wahren Bordmittags befindet, H_1 die dazu gehörige wahre Mittagshöhe (gleichfalls für die Deklination δ berechnet), endlich $\varDelta S$ die zwischen dem Bordmittage und dem Augenblicke des Höhenmaximums verfliessende Zeit, welche negativ zu nehmen ist, wenn sich das Höhenmaximum vor dem Bordmittage ereignet, so ist:

$$\sin H_1 = \cos(\varphi_1 - \delta) = \cos(\varphi - \varphi' . \varDelta S - \delta)$$

oder

$$H_1 = 90^0 \mp (\varphi - \delta - \varphi' . \varDelta S).$$

Ist ferner S_1 die Greenwicher Zeit des Bordmittags, so hat man:

$$0 = S_1 + \lambda_1 = S - \varDelta S + \lambda - \lambda' . \varDelta S = s - (1 + \lambda') \varDelta S,$$

woraus $\varDelta S = \frac{s}{1+\lambda'}$; folglich:

$$H_1 = 90^0 \mp (\varphi - \delta) \pm \frac{\varphi' s}{1+\lambda'}.$$

Aber es ist:

für Südhöhen: $H = 90^0 - (\varphi - \delta)$,

für Nordhöhen: $H = 90^0 + (\varphi - \delta)$;

daher:

8) . . . . $H_1 = H \pm \frac{\varphi' s}{1+\lambda'}$,

oder näherungsweise:

9) . . . . $H_1 = H \pm \varphi' s$,

wo das obere oder untere Zeichen zu gelten hat, je nachdem die Höhe h, welche nie 90^0 übersteigen darf, vom Süd- oder vom Nordpunkte an gerechnet wird.

Wird in den Näherungsformeln 7) und 9) der aus 5) sich ergebende Werth von s eingeführt, so ergibt sich:

10) . . . . $H = h + \frac{(\varphi' - \delta')^2 \cos h}{2 \cos\varphi \cos\delta \sin 1''}$,

11) . . . . . . $H_1 = h - \frac{(\varphi'^2 - \delta'^2) \cos h}{2 \cos\varphi \cos\delta \sin 1''}$.

Es folgt hieraus, dass, bei beträchtlicher Breitenbewegung des Schiffes, in welchem Falle δ' gegen φ' sehr klein ist, immer $H > h > H_1$, und dass h nahezu in der Mitte zwischen H und H_1 liegen wird. Wird daher h als die wahre Mittagshöhe angesehen, und daraus die geographische Breite abgeleitet, so erhält man deren (relativen) Werth, falls h über dem Südhorizonte beobachtet wird, nahezu um den Betrag $\frac{\varphi'^2 \cos h}{2 \cos\varphi \cos\delta \sin 1''}$ zu gross oder zu klein, je nachdem es sich um φ oder φ_1 handelt, während, wenn h eine Nordhöhe, das Umgekehrte stattfindet, wovon man sich aus einer genauen Betrachtung der Gleichungen

$$\varphi = \begin{cases} 90^0 - H + \delta & \text{(für Südhöhen), *)} \\ H + \delta - 90^0 & \text{(„ Nordhöhen);} \end{cases}$$

$$\varphi_1 = \begin{cases} 90^0 - H_1 + \delta & \text{(„ Südhöhen),} \\ H_1 + \delta - 90^0 & \text{(„ Nordhöhen)} \end{cases}$$

leicht überzeugen kann.

Um den Einfluss der Schiffsbewegung in einigen numerischen Beispielen darzuthun, wollen wir erstlich annehmen, es werde in der gegissten Nordbreite von 60°, zur Zeit des Frühlings-Aequinoctiums, indem das Schiff mit einer Geschwindigkeit von 12 Knoten südwärts steuert, die grösste Sonnenhöhe beobachtet. Man hat hier:

$$\varphi = +60^0, \quad \delta = 0, \quad \varphi' = -0.0133, \quad \delta' = +0.0011,$$

und findet mittelst dieser Werthe, je nachdem man die Deklinations-Aenderung vernachlässigt oder in Rechnung zieht:

$$\begin{array}{lcl} s = 1^0 19' 12'' = 4752'' & & s = 1^0 25' 45'' = 5145'' \\ H = h + 32'' & \text{oder} & H = h + 37'' \\ H_1 = h - 32'' & & H_1 = h - 31''. \end{array}$$

Für eine Geschwindigkeit von 18 Knoten, welche auch bereits erreicht worden sein soll, erhält man mit Beibehaltung der übrigen Annahmen:

$$\begin{array}{lcl} s = 1^0 59' 7'' = 7147'' & & s = 2^0 5' 39'' = 7539'' \\ H = h + 1' 11'' & \text{oder} & H = h + 1' 20'' \\ H_1 = h - 1' 11'' & & H_1 = h - 1' 11''. \end{array}$$

Wird aber die geographische Breite $= 70^0$ angenommen, so findet man für die Geschwindigkeit von 12 Knoten:

$$\begin{array}{lcl} s = 2^0 5' 39'' = 7539'' & & s = 2^0 16' 3'' = 8163'' \\ H = h + 51'' & \text{oder} & H = h + 59'' \\ H_1 = h - 50'' & & H_1 = h - 49'' \end{array}$$

und für die Geschwindigkeit von 18 Knoten:

$$\begin{array}{lcl} s = 3^0 9' 0'' = 11340'' & & s = 3^0 19' 24'' = 11964'' \\ H = h + 1' 54'' & \text{oder} & H = h + 2' 7'' \\ H_1 = h - 1' 53'' & & H_1 = h - 1' 52''. \end{array}$$

---

*) Diese Formeln gelten ganz allgemein, auch in dem Falle, wo die Mittagshöhe 90° überschreitet, und man erhält aus denselben die geographische Breite stets mit dem gehörigen Zeichen.

Sollte die aus der wahren Mittagshöhe abgeleitete geographische Breite mit der gegissten wenig übereinstimmen, so wäre die Rechnung mit Zugrundelegung der corrigirten Breite zu wiederholen. Ein Fehler in der angenommenen Breite von einigen Minuten hat übrigens auf die Correction der Mittagshöhe keinen merklichen Einfluss.

Der praktische Gewinn, welcher der Schifffahrt aus dieser Reduction erwächst, ist allerdings kein bedeutender. Wenn man es aber für nöthig erachtet, bei Ortsbestimmungen zur See, kleinere Verbesserungen, wie die Parallaxe oder die Correctionen der Refraction wegen Temperatur und Barometerstand zu berücksichtigen, so ist die Verbesserung wegen der Schiffsbewegung, welche, wie obige Beispiele zeigen, leicht mehr als das Zehnfache des grössten Parallaxenwerthes betragen kann, immerhin der Erwähnung werth.

XVIII.

Ueber eine stereometrische Aufgabe.

Von

Herrn *Jos. Eilles*,

Assistenten am Königl. Ludwigs-Gymnasium in München.

Aufgabe. Es wird in einem Zylinder eine zur Grundfläche senkrechte Ebene *ABCD* (Taf. III. Fig. 1.) gelegt; hierauf der Zylinder durch eine zu *ABCD* senkrechte Ebene *EJK* schief abgeschnitten; es soll der körperliche Inhalt des schief abgeschnittenen Zylinders berechnet werden, wenn der Radius der Grundfläche, die grösste und kleinste Höhe und die Sehne *JK* bekannt sind.

Auflösung. 1) Da Eb. $EJK \perp$ Eb. $ABCD$, so ist auch die Sehne JK, nach welcher EJK die Grundfläche $AJBK$ durchschneidet, zu $ABCD$ senkrecht, und es ist: $JK \perp AB$ und $JK \perp EY$, wo EY den Durchschnitt von $ABCD$ und EJK vorstellt. Zieht man nun in dem Kreise $AJBK$ durch einen beliebigen Punkt S der Peripherie eine zu JK parallele Sehne ST und legt durch dieselbe eine zur Axe parallele Ebene, so schneidet diese den Zylinder nach einem Parallelogramme $STUZ$ und die schiefe Schnittebene EJK nach der Geraden LQ; und es ist:

$$UZ \# ST \# JK.$$

Legt man nun durch JK ebenfalls eine zur Axe parallele Ebene, so folgt aus einem bekannten Satze der Stereometrie:

$$LQ \# JK,$$

also ergibt sich:

$$UZ \# LQ, \text{ somit auch: } LQ \# CUDZ.$$

Fällt man also aus L und Q auf die Grundfläche $CUDZ$ die Perpendikel LR und QV, und legt durch LR und QV eine Ebene, so muss diese, wie man sogleich sieht, die Grundfläche $CUDZ$ nach einer zu LQ parallelen Geraden RV durchschneiden, und es entsteht ein Rechteck $LRQV$, so dass $LR = QV$ ist. Nennt man nun EY die Axe der schiefen Schnittfläche, so hat man, da $LQ \perp EY$, weil auch $JK \perp EY$, sogleich folgenden Satz:

Wenn man in der schiefen Schnittfläche auf der Axe ein Perpendikel errichtet, so sind die von den Endpunkten des Perpendikels auf die Grundfläche gefällten Perpendikel einander gleich.

2) Zieht man nun in der Grundfläche $CLDS$ (Taf. III. Fig. 2. und Taf. III. Fig. 3.) zwei unendlich nahe an einander liegende und zu JK parallele Sehnen LM und NQ, und legt durch dieselben parallel zur Axe OP des Zylinders Ebenen, so schneiden diese, wie bereits oben gezeigt wurde, die schiefe Schnittfläche EJK nach den zu JK parallelen, also auf EY senkrechten Geraden FG und HT, und es sind also die aus F, G und H, T auf die Grundfläche $CLDS$ gefällten Perpendikel einander gleich. Legt man dann durch die Erzeugenden FL, HN, GM, TQ des Zylindermantels und die Axe OP des Zylinders Ebenen, so schneiden diese die Grundfläche $CLDS$ nach den Radien LP, NP, MP, QP und die schiefe Schnittfläche EJK nach den Geraden VF, VH, VG, VT, wobei V der Punkt ist, in welchem die Axe der schiefen Schnittfläche von der Axe des Zylinders durchschnitten wird. Da nun die zwischen den Sehnen LM und NQ liegenden Bogen gleich

sind, und wegen der unendlichen Kleinheit als gerade Linien betrachtet werden können, so entstehen auf diese Weise zwei dreiseitige schief abgeschnittene Prismen *LNPV* und *MQPV*, welche kongruente Grundflächen *LPN* und *MPQ* haben, und deren drei Höhen bezüglich gleich sind, die also nach einem bekannten Lehrsatze der Stereometrie inhaltsgleich sind.

Legt man nun durch *JK* eine zur Axe *OP* parallele Ebene *JKRS* und denkt sich in der Grundfläche *CRS* alle möglichen unendlich nahe an einander liegenden und zu *JK* parallelen Sehnen gezogen und alle oben beschriebenen Ebenen gelegt, so werden die beiden Theile *CEVJRP* und *CEVKSP* in eine gleiche Anzahl bezüglich gleicher dreiseitiger schief abgeschnittener Prismen zertheilt, sind also inhaltsgleich.

3) Betrachtet man nun in dem Körper *CRPEJV* zwei auf einander folgende Prismen *UPLX'VF* und *LPNFVH*, so haben diese ausser der Höhe aus *V* auch noch die Höhe aus *F* gemeinschaftlich. Setzt man daher die Anzahl der Prismen, in welche der Körper getheilt wurde, $=n$, und bezeichnet die Prismen der Reihe nach durch P_1, P_2, $P_3, \ldots. P_n$; bezeichnet man ferner die Höhen, vom Punkte E angefangen, der Reihe nach durch h, h_1, $h_2, \ldots. h_n$ und die aus V gefällte Höhe mit x, so erhält man nach einem bekannten Lehrsatze der Stereometrie, wenn ausserdem noch g eine der unter einander kongruenten Grundflächen vorstellt:

$$P_1 \;\; = g . \frac{h + h_1 + x}{3},$$

$$P_2 \;\; = g . \frac{h_1 + h_2 + x}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{n-1} = g . \frac{h_{n-2} + h_{n-1} + x}{3},$$

$$P_n \;\; = g . \frac{h_{n-1} + h_n + x}{3};$$

daher wird, wenn man addirt:

$$CPREJV = g . \frac{nx + h_n + h + 2(h_1 + h_2 + \ldots. + h_{n-1})}{3}.$$

Da nun die Sehnen *UW*, *LM*, *NQ*.... unendlich nahe an einander liegend gedacht werden müssen, so können die zwischen ihnen liegenden Abschnitte des Durchmessers als einander gleich betrachtet werden. Die Geraden, welche von den Durchschnitten der Sehnen *UW*, *LM*.... mit dem Durchmesser *CD* nach den Durchschnitten *a*, *b*, *c*.... der Geraden *X'Y'*, *FG*, *HT*... mit der

Axe EY gezogen werden können, sind nichts anderes, als die Durchschnitte der Ebenen $X'W$, FM, HQ.... mit der Ebene $ABCD$, und sind folglich einander parallel. Es sind also auch die zwischen den Geraden $X'Y'$, FG, HT.... liegenden Abschnitte der Axe EY einander gleich, wie ein bekannter Lehrsatz der Planimetrie lehrt. Fällt man nun aus den Punkten a, b, c.... der Axe EY auf die Grundfläche Perpendikel, so sind diese, da $X'Y'$, FG, HT.... zu $CRDS$ parallel sind, den h_1, h_2, h_3.... gleich. Zieht man nun durch E, a, b, c.... (Taf. III. Fig. 4.) zu CD die Parallelen Ed, ae, bf...., so ist:

$$\Delta Ead \cong \Delta abe \cong \Delta bcf \ldots,$$

also:

$$ad = \quad be = \quad cf = \ldots,$$

d. h. die Unterschiede zweier auf einander folgender Höhen sind einander gleich.

Bezeichnet man daher diesen Unterschied mit α, so hat man:

$$\begin{aligned}
h_1 &= h + \alpha,\\
h_2 &= h_1 + \alpha = h + 2\alpha,\\
h_3 &= h_2 + \alpha = h + 3\alpha,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
h_{n-1} &= h_{n-2} + \alpha = h + (n-1)\alpha,\\
h_n &= h_{n-1} + \alpha = h + n\alpha;
\end{aligned}$$

daher ist:

$$\begin{aligned}
h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_{n-1} &= (n-1)h + \alpha + 2\alpha + \ldots + (n-1)\alpha\\
&= (n-1)h + \frac{n(n-1)}{2}.\alpha.
\end{aligned}$$

Es wird also nach dem Vorigen:

$$\begin{aligned}
CPREJV &= g.\frac{nx + 2h + n\alpha + n(n-1)\alpha + 2(n-1)h}{3}\\
&= ng.\frac{x + 2h + n\alpha}{3}.
\end{aligned}$$

Da nun $ng = CRP = \gamma$ und $n\alpha$ der Unterschied zwischen der grössten und kleinsten Höhe, also, wenn man die grösste Höhe mit H bezeichnet, $= H - h$ ist, so findet man:

$$CPREJV = \gamma.\frac{x + H + h}{3}.$$

Um x zu bestimmen, hat man, wenn man in der Ebene $CDEY$ (Taf. III. Fig. 5. und Fig. 6.) die Höhen h, x und H, ferner $Eq \# CD$

zieht, und $En=CZ=\beta$, $Em=CP=r$ setzt, wo r den Radius der Grundfläche vorstellt:

$$EY:EV=En:Em=\beta:r,$$

$$EY:EV=Yq:Vp=H-h:Vp;$$

also ist:

$$\beta:r=H-h:Vp,$$

folglich:

$$Vp=\frac{r(H-h)}{\beta};$$

also wird:

$$x=h+Vp=h+\frac{H-h}{\beta}r=\frac{h(\beta-r)+Hr}{\beta},$$

somit:

$$CPREJV=\gamma.\frac{\frac{h(\beta-r)+Hr}{\beta}+H+h}{3}$$

$$=\gamma.\frac{h(2\beta-r)+H(\beta+r)}{3\beta}.$$

Bezeichnet man also den Sektor $CRPS=2\gamma$ mit G, so wird:

$$CRPSEJVK=G.\frac{h(2\beta-r)+H(\beta+r)}{3\beta}.$$

Um nun den Körper $CRSEJK$ zu finden, hat man, je nachdem EY selbst (Taf. III. Fig. 2.) oder erst deren Verlängerung (Taf. III. Fig. 3.) von der Axe des Zylinders getroffen wird, das schief abgeschnittene Prisma $RPSJKV$ zu addiren oder zu subtrahiren. Bezeichnet man das Dreieck RPS mit δ, so erhält man:

$$RPSJKV=\delta.\frac{H+H+x}{3}$$

$$=\delta.\frac{2H+\frac{h(\beta-r)+Hr}{\beta}}{3}$$

$$=\delta.\frac{H(2\beta+r)+h(\beta-r)}{3\beta};$$

folglich wird:

$$CSREJK=G.\frac{H(\beta+r)+h(2\beta-r)}{3\beta}\pm\delta.\frac{H(2\beta+r)+h(\beta-r)}{3\beta}.$$

Um den vollständigen schief abgeschnittenen Zylinder zu finden, hat man noch den Körper $RSDJKB$ zu addiren. Derselbe kann aber als ein Prisma betrachtet werden, dessen Grundfläche $RSD = r^2\pi - G \mp \delta$ und dessen Höhe $= H$ ist. Daher wird:

$$\text{Schief abgeschn. Zylinder} = G.\frac{H(\beta + r) + h(2\beta - r)}{3\beta} \pm \delta.\frac{H(2\beta + r) + h(\beta - r)}{3\beta} + (r^2\pi - G \mp \delta)H,$$

oder, wie man nach einfachen Reduktionen findet:

$$\text{Schief abgeschn. Zylinder} = r^2\pi H + \frac{H-h}{3\beta}[r(G \pm \delta) - \beta(2G \pm \delta)],$$

wobei das obere oder untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem die Axe der schiefen Schnittfläche selbst oder deren Verlängerung von der Axe des Zylinders getroffen wird; oder, mit anderen Worten, je nachdem der Bogen, der das von der einen Grundfläche übrig bleibende Segment begrenzt, kleiner oder grösser als 180^0 ist.

Die in der vorausgehenden Formel enthaltenen Grössen β, δ, G können, wenn der Radius r der Grundfläche und die Sehne $JK = a$ gegeben sind, leicht durch Rechnung gefunden werden, so dass also die gestellte Aufgabe vollkommen gelöst ist.

Zusatz I. Geht die schiefe Schnittfläche durch den Mittelpunkt O der Grundfläche $AJBK$, so wird: $\delta = 0$, $\beta = r$, $G = \frac{1}{2}r^2\pi$; daher hat man:

$$\text{Schief abgeschn. Zylinder} = r^2\pi H + \frac{H-h}{3r}[\tfrac{1}{2}r^3\pi - r^3\pi] = r^2\pi.\frac{5H+h}{6}.$$

Zusatz II. Durchschneidet die schiefe Schnittfläche den ganzen Zylindermantel, so wird $\beta = 2r$, $\delta = 0$, $G = r^2\pi$; folglich hat man:

$$\text{Schief abgeschn. Zylinder} = r^2\pi H + \frac{H-h}{6r}(r^3\pi - 4r^3\pi) = r^2\pi.\frac{H+h}{2}.$$

Zusatz III. Geht die schiefe Schnittfläche durch den Punkt C der Grundfläche, so wird $h = 0$, also:

$$\text{Schief abgeschn. Zylinder} = r^2\pi H + \frac{H}{3\beta}[r(G \pm \delta) - \beta(2G \pm \delta)].$$

Wird überdiess der ganze Zylindermantel von der schiefen Schnittfläche durchschnitten, so wird $\delta=0$, $\beta=2r$, $G=r^2\pi$; also:

$$\text{Schief abgeschn. Zylinder} = r^2\pi H + \frac{H}{6r}(r^3\pi - 4r^3\pi)$$
$$= \tfrac{1}{2}r^2\pi H.$$

Zusatz IV. Um das Stück $AJKE$ des Zylinders zu finden, hat man nur vom ganzen Zylinder den schief abgeschnittenen Zylinder $CRDSEJKB$ zu subtrahiren; es wird also:

$$AJKE = r^2\pi H - r^2\pi H - \frac{H-h}{3\beta}[r(G \pm \delta) - \beta(2G \pm \delta)]$$
$$= [\beta(2G \pm \delta) - r(G \pm \delta)] \cdot \frac{H-h}{3\beta},$$

wobei das obere oder untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem arc $KAJ \gtrless 180^0$ ist.

In dieser Formel ist $H-h$ offenbar die aus E auf AJK gefällte Höhe.

Zusatz V. Wird ein gerader Zylinder durch eine Ebene schief durchschnitten, so kann man immer aus einem Punkte der Axe auf die schiefe Schnittfläche ein Perpendikel fällen. Eine Ebene, welche durch dieses Perpendikel und die Axe gelegt wird, steht dann, weil die Axe eines geraden Zylinders auf der Grundfläche senkrecht ist, sowohl auf der schiefen Schnittfläche, als auch auf der Grundfläche senkrecht. Aus dieser Betrachtung folgt, dass die oben angegebenen Formeln für den geraden Zylinder für jede Schnittebene giltig sind.

XIX.

Ueber die Gleichung zwischen dem Halbmesser des Kreises und den Seiten des eingeschriebenen Fünfecks und Zehnecks.

Schreiben an den Herausgeber
von
Herrn *Carl Schmidt*
in Spremberg.

Die Bemerkung S. 240. Thl. 41. des Archivs, „dass ganz elementare Mittheilungen dem Zwecke desselben keineswegs entgegen sind und künftig noch öfter als bisher einen Platz finden sollen", wird jedem praktischen Schulmanne erwünscht sein; ich lege darum Ihnen eine dergleichen zu gefälliger Begutachtung und event. Aufnahme in das Archiv hiermit ergebenst vor. Dieselbe ist durch eine andere Bemerkung S. 127. Thl. 40. veranlasst worden. Es heisst hier: „Der Beweis des Satzes, dass die Differenz der Quadrate der Seiten des in einen Kreis beschriebenen regulären Fünfecks und Zehnecks dem Quadrate des Halbmessers des Kreises gleich ist, macht in der Elementar-Geometrie immer einige Schwierigkeit." — In der That, wenn man auf dem directen Wege der Berechnung jeder der beiden Seiten aus dem Radius die Sache verfolgt, so erscheinen fortlaufend die gemischten irrationalen Ausdrücke mit ihrer $\sqrt{5}$, und es bedarf zur Erhärtung der Thesis längeren Umformens und selbst geschickten Einsetzens, wie solches auf der Lehrstufe, wo der Satz doch vorkommen sollte, nach der Behandlung der Seite des regulären Zehnecks nämlich, dem Lernenden noch nicht immer geläufig ist. Da der Satz aber nicht sowohl als Mittel zur Construction der Seite des regulären Fünfecks dient, als vielmehr nur eine der merkwürdigeren von den unerschöpflichen Relationen zwischen geometrischen Grössen abgiebt und sein Werth nur in der gros-

sen Vereinfachung der Berechnung der Fünfecksseite liegt, so kann natürlich im ersten Lehrgange keine besondere Mühe auf ihn verwandt werden, und es erklärt sich, dass er von den grundlegenden Sätzen öfter ausgeschlossen und nur als Uebungsaufgabe für die Handhabung der Rechnung benutzt wird. Indessen scheint es mir, dass ein ganz einfacher Beweis für den Satz, wenn er sich darböte, nicht unwillkommen sein müsste. Ich bediene mich für einen solchen des folgenden

Lemma. Steht auf dem Kreisdurchmesser MB (Taf. III. Fig. 7.) eine Linie AD senkrecht in D, und liegt ihr Endpunkt A ausserhalb des Kreises, so ist, wenn die Sekante AB von dem Endpunkte der Senkrechten nach einem Endpunkte des Durchmessers den Kreis in E schneidet,

$$AD^2 = AE.AB + DB.DM \text{ *)}.$$

Beweis. Wird A mit dem Mittelpunkte F des Kreises verbunden, so ist

$$AD^2 = AF^2 - FD^2.$$

Wird die Tangente $AT = t$, werden die Radien FT und $FG = r$ gezogen, und wird DG als halbe kleinste Sehne für den Punkt $D = s$ genommen, so ist:

$$AF^2 = t^2 + r^2,$$
$$FD^2 = r^2 - s^2;$$

also:

$$AD^2 = AF^2 - FD^2 = t^2 + s^2 = AE.AB + DB.DM.$$

Es lässt sich bald bemerken, dass dies Lemma einer allgemeineren Fassung fähig ist. D muss in der Peripherie eines Kreises um AF als Durchmesser liegen. Dann ist AD^2 gleich der Summe der Potenzen der Punkte A und D für den Kreis um F, so lange A ausserhalb und D innerhalb der Peripherie dieses Kreises liegt; es ist aber AD^2 gleich der Differenz dieser Potenzen, sobald die Punkte A und D entweder beide ausserhalb oder beide innerhalb des letzteren Kreises liegen. Der

---

*) Dieses Lemma kann als eine Verallgemeinerung des Satzes von der mittleren Proportionale betrachtet werden. Fällt nämlich der Punkt A in die Peripherie des Kreises, also mit G zusammen, so wird $AE = 0$, und die Gleichung $AD^2 = AE.EB + DB.DM$ geht dann in die Gleichung $AD^2 = GD^2 = DB.DM$ über, welches die bekannte Gleichung der mittleren Proportionale ist. G.

Beweis für die übrigen zwei von den drei Fällen, die bei wachsendem Radius des Kreises um F eintreten, sowie für die zwei Uebergangsfälle, lässt sich leicht nach Analogie des gegebenen Beweises führen. Aber weder die allgemeinere Fassung des Satzes, noch die Beweise für die verschiedenen einzelnen Fälle sind für den gegenwärtigen Zweck nöthig. Nun zur Sache.

1. *Aufgabe.* Eine Linie nach stetiger geometrischer Proportion zu theilen. (Bekannt.)

2. *Lehrsatz.* Das grössere Stück des nach stetiger geometrischer Proportion getheilten Radius (r) ist die Seite (z) des regulären Zehnecks im Kreise. (Bekannt.)

3. *Zusatz.* Das Quadrat der Zehnecksseite z ist gleich der Differenz zwischen dem Quadrate des Radius r und dem Rechteck aus diesem und der Zehnecksseite.

Aus

$$r:z = z:r-z \text{ folgt } z^2 = r(r-z) = r^2 - rz.$$

4. *Lehrsatz.* Das Quadrat der Seite f des regulären Fünfecks im Kreise ist gleich der Summe der Quadrate der Seite z des regulären Zehnecks und des Radius r.

Beweis. Es sei M (Taf. III. Fig. 8.) der Kreismittelpunkt, AB und BC seien zwei aneinander liegende Zehnecksseiten z, so ist AC die Fünfecksseite f, AD aber die halbe Fünfecksseite $= \frac{1}{2}f$. Wird nun über MB als Durchmesser ein Kreis beschrieben, der AB in E schneidet, so steht ME senkrecht auf AB, und es ist $AE = EB =$ der halben Zehnecksseite $= \frac{1}{2}z$. Nach dem angeführten Lemma ist

$$AD^2 = AE.AB + DB.DM,$$

also:

$$\frac{f^2}{4} = \frac{z^2}{2} + DB.DM. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

In den ähnlichen Dreiecken BDA und BEM verhält sich:

$$BD:BA = BE:BM \text{ oder } BD:z = \tfrac{1}{2}z:r,$$

folglich

$$BD.r = \frac{z^2}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Es ist aber nach dem Zusatz unter 3. das Quadrat der Zehnecksseite gleich der Differenz zwischen dem Quadrat des Radius und dem Rechteck aus diesem und der Zehnecksseite; wird demnach für z^2 in (2) eingesetzt $r^2 - rz$, so ergiebt sich:

$$BD . r = \frac{r^2 - rz}{2}, \text{ folglich } BD = \frac{r - z}{2};$$

also:

$$DM = r - \frac{r - z}{2} = \frac{r + z}{2}.$$

Es ist demnach in (1) das Rechteck

$$DB . DM = \frac{r - z}{2} \cdot \frac{r + z}{2} = \frac{r^2 - z^2}{4},$$

und folglich:

$$\frac{f^2}{4} = \frac{z^2}{2} + \frac{r^2 - z^2}{4} = \frac{z^2 + r^2}{4},$$

also:

$$f^2 = z^2 + r^2,$$

womit der Satz bewiesen ist.

XX.

Elementare Berechnung der Logarithmen.

Von

Herrn Doctor *Paugger*,

Adjuncten der k. k. hydrographischen Anstalt in Triest.

So schnell und einfach die Logarithmen mit Hilfe der Reihen berechnet werden können, die die Analysis darbietet, ebenso langwierig und complizirt sind die bekannten Methoden zur Logarithmenberechnung mit elementaren Mitteln. Es dürfte daher nicht ohne Interesse sein, wenn im Nachstehenden eine neue, ganz elementare Methode mitgetheilt wird, nach welcher die Logarithmen beliebiger rationaler oder irrationaler Zahlen fast ebenso schnell und leicht, in einigen Fällen sogar noch schneller, berechnet werden können, als durch Reihen.

Es sei der dekadische Logarithmus von der Zahl N zu berechnen, so hat man zunächst $\underset{10}{\lambda} N = \frac{\underset{10}{\lambda} N^m}{m}$. Ist a die Anzahl der ganzen Stellen in N^m, so wird $\underset{10}{\lambda} N^m = a-1+x$ oder

$$\underset{10}{\lambda} N = \frac{a-1+x}{m} = \frac{a-(1-x)}{m},$$

wobei x, und folglich auch $(1-x)$, kleiner als 1 sein muss. Für ein hinlänglich grosses m kann man näherungsweise $\underset{10}{\lambda} N = \frac{a-1}{m}$ oder $= \frac{a}{m}$ setzen, und es wird der dabei begangene Fehler kleiner als $\frac{1}{m}$ sein. Bei der Wahl zwischen den genäherten Werthen

$\frac{a-1}{m}$ und $\frac{a}{m}$ muss man sich, um den Fehler am kleinsten zu machen, für denjenigen aus beiden entscheiden, der sich nicht abkürzen lässt. — Es handelt sich nun aber darum, die Anzahl der Ziffer a in den ganzen Stellen der Potenz N^m in jedem Falle genau anzugeben. Dazu führt uns folgender Lehrsatz:

> Sind 1, $\sqrt[m]{10}$, $\sqrt[m]{10^2}$,.... $\sqrt[m]{10^r}$, $\sqrt[m]{10^{r+1}}$,.... $\sqrt[m]{10^{m-1}}$, 10 die $m$ten Wurzeln aus allen Potenzen von 10, deren Exponent m nicht übersteigt, und liegt die $n$ziffrige Zahl N in Bezug auf ihre obersten Ziffern zwischen eben so viel der obersten Ziffern von $\sqrt[m]{10^r}$ und $\sqrt[m]{10^{r+1}}$ ohne Rücksicht auf den Dezimalstrich, so hat N^m genau $(mn-m+r+1)$ Ziffern.

Der Beweis dieses Satzes ist einfach. Der Voraussetzung gemäss muss $\sqrt[m]{10^r} < \frac{N}{10^{n-1}} < \sqrt[m]{10^{r+1}}$, daher

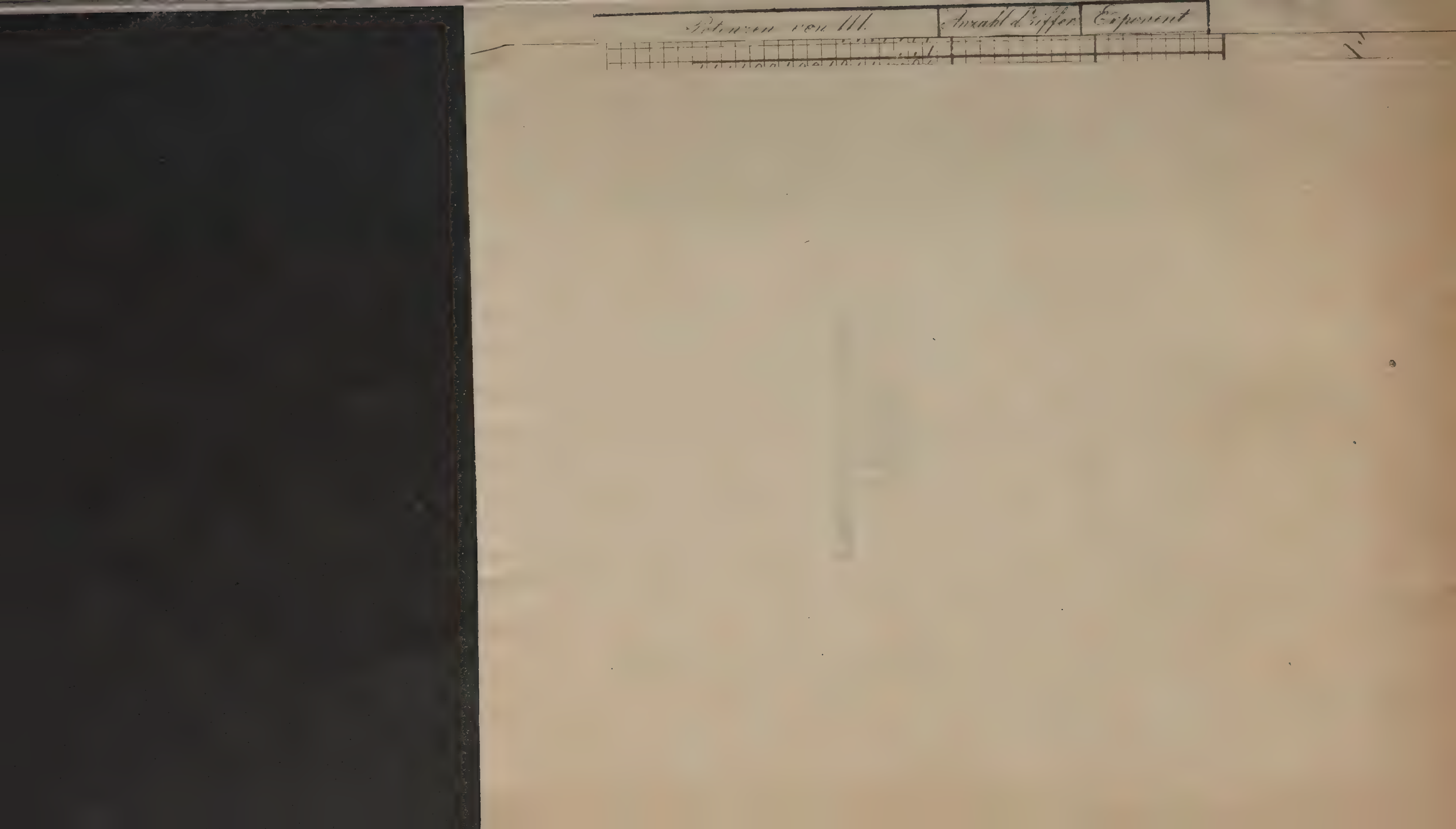
$$10^{mn-m+r} < N^m < 10^{mn-m+r+1}$$

sein, woraus folgt, dass N^m gerade $mn-m+r+1$ Ziffern hat.

Um, da m beliebig gross gemacht werden soll, bei der Bestimmung der Anzahl Ziffern von N^m nach diesem Satze nicht die vielen Wurzelausziehungen aus den $m-1$ niedrigsten Potenzen von 10 vornehmen zu müssen, setzen wir $m=2^n$ und erheben N successive auf die zweite Potenz, bis m für die verlangte Genauigkeit gross genug ist. Dabei braucht man aber nur die obersten Ziffern des jedesmaligen Quadrates und zwar um so mehr derselben zu entwickeln, je weiter man die Genauigkeit treiben will; diese Ziffern hat man bloss mit den obersten Ziffern von $\sqrt{10} = 3{\cdot}1622776\ldots.$ zu vergleichen, und je nachdem eine gewisse Anzahl derselben, als Zahl betrachtet, grösser oder kleiner ist, als dieselbe Anzahl oberster Ziffern in $3{\cdot}1622776\ldots.$, wird das nächste Quadrat doppelt so viel Ziffern haben, als das eben zu quadrirende, oder um eine Ziffer weniger, als doppelt so viel.

Für $m=2^{17}=131072$ erhält man die Logarithmen auf 5 Dezimalstellen vollkommen genau; dabei hat man anfänglich 6 bis 7 der obersten Ziffern, später aber immer weniger, bei den einzelnen Quadrirungen zu entwickeln, was mit einem ganz mässigen Rechnungsaufwand geschehen kann.

Folgende Tabelle gibt eine Uebersicht der Berechnung des Logarithmus von 83 auf 5 Dezimalen mit Angabe der successiven Näherungswerthe.


Potenzen von 111.
Anzahl d. Ziffern
Exponent

Ausführliche Berechnung des $\log_2 7$ auf 6 Decimalstellen genau.

Potenzen von 111.	Anzahl Ziffer	Exponent
111	3	2^0
110001	6	2^1
[illegible]	12	2^2
[illegible]	23	2^3
[illegible]	45	2^4
[illegible]	90	2^5
[illegible]	180	2^6
[illegible]	360	2^7
[illegible]	719	2^8
[illegible]	1438	2^9
[illegible]	2875	2^{10}
[illegible]	5750	2^{11}
[illegible]	11499	2^{12}
[illegible]	22998	2^{13}
[illegible]	45996	2^{14}
[illegible]	91992	2^{15}
[illegible]	183983	2^{16}
[illegible]	367966	2^{17}
[illegible]	735931	2^{18}
[illegible]	1471862	2^{19}
[illegible]	2943724	2^{20}
[illegible]	5887448	2^{21}
[illegible]	11774895	2^{22} = 4194304.

$$\log_2 7 = \frac{11774895}{4194304} = 2{\cdot}807354$$

daraus wird $\log_{10} 7 = \log_2 7 \cdot \log_{10} 2 = 0{\cdot}845098$

$\sqrt{2}$ im dyadischen Systeme ist $= \sqrt{10} = 1{\cdot}011010 \ldots\ldots$ und $7 = 111$.

Für den Buchbinder: Gehört Seite 198 einzuschalten!

Potenzen von 83	Exponent	Anzahl der Ziffern	Genäherter Logarithmus	
83	1	2	(2 : 1)	= 2·00000
6889	2	4	(3 : 2)	= 1·50000
47458321	4	8	(7 : 4)	= 1·75000
22522922....	8	16	(15 : 8)	= 1·87500
50728200....	16	31	(31 : 16)	= 1·93750
25733503....	32	62	(61 : 32)	= 1·90625
6622132....	64	123	(123 : 64)	= 1·92188
438526....	128	246	(245 : 128)	= 1·91406
192306....	256	492	(491 : 256)	= 1·91797
36981....	512	983	(983 : 512)	= 1·91992
13676....	1024	1966	(1965 : 1024)	= 1·91894
1870....	2048	3931	(3931 : 2048)	= 1·91943
3499....	4096	7861	(7861 : 4096)	= 1·91919
1224....	8192	15722	(15721 : 8192)	= 1·91907
150....	16384	31443	(31443 : 16384)	= 1·91914
22....	32768	62885	(62885 : 32768)	= 1·91910
5....	65536	125769	(125769 : 65536)	= 1·91909
. . . .	131072	251538	(251537 : 131072)	= 1·91908

Will man nach dieser Methode Logarithmen für eine andere Basis als 10 berechnen, so braucht man bloss diese neue Basis zugleich als Grundzahl eines Zahlensystems anzunehmen und die ganze Rechnung in diesem Systeme zu machen. Der oben angeführte Lehrsatz lässt sich leicht darnach wenden und als gültig erweisen. Sehr einfach gestaltet sich die Berechnung der Logarithmen auf diese Weise für die Basis 2 im dyadischen Zahlensysteme. Die Berechnung des Logarithmus von 7 für diese Basis auf Millionstel genau ist ganz ausführlich beigegeben. (Siehe am Schluss dieses Heftes.)

XXI.

Lösung einer nautischen Aufgabe.

Von

Herrn Doctor *Paugger*,

Adjuncten der k. k. hydrographischen Anstalt in Triest.

Aufgabe: Ein Schiff A bekommt in hoher See ein anderes Schiff B in Sicht. Beide Schiffe sind in Fahrt begriffen. Es sollen an Bord des Schiffes A durch geeignete Beobachtungen der Curs, die Entfernung und die Geschwindigkeit des Schiffes B bestimmt werden, unter der Voraussetzung, dass Curs und Geschwindigkeit des letzteren Schiffes constant bleiben.

Bevor wir zur Lösung dieser Aufgabe schreiten, machen wir folgende einleitende Betrachtung: Haben beide Schiffe constante Curse und Geschwindigkeiten, dann wird, wenn man von A aus in gleichen Zeitintervallen das Schiff B mehrmals peilt und die so erhaltenen Peilungslinien auf die Cursrichtung von A unter den entsprechenden Neigungswinkeln in den einzelnen unter sich gleichweit abstehenden Beobachtungspunkten aufträgt, auch die Curslinie des Schiffes B durch dieselben in unter sich gleichen Theilen geschnitten werden. Aus der Theorie der Kegelschnitte aber ist bekannt *), dass sämmtliche in Rede stehende Peilungslinien Tangenten zu einer Parabel sind, welche auch von den beiden Cursen berührt sind. Es folgt dies nämlich aus dem Satze, dass zwei beliebige veränderliche Tangenten einer Parabel auf zwei festen Tangenten derselben Abschnitte bilden, deren Verhältniss constant ist. In unserem Falle ist das Verhältniss der Abschnitte, welche je zwei Peilungen an den beiden

*) Siehe: Analytische Geometrie von Fort und Schlömilch, Leipzig 1855, Seite 176 etc.

Cursen bilden, gleich dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten beider Schiffe. Da die Geschwindigkeit des Schiffes B unbekannt ist, so kann man bloss durch Peilungen die Lage des Curses von B gegen den von A nicht bestimmen, weil jede beliebige Berührende der Parabel an die Stelle des Curses von B treten kann, indem ja die Peilungslinien von jeder Stücke abschneiden, welche denen am eigenen Curse proportionirt sind.

Nicht so verhält es sich, wenn das Schiff A seine Geschwindigkeit oder seinen Curs ändert, während natürlich B seinen Curs und seine Geschwindigkeit unverändert beibehält. Hat man nämlich vom Bord des Schiffes A aus, mit einer bestimmten Geschwindigkeit fahrend, das Schiff B mehrmals gepeilt und die Peilungslinien am Curse von A in den einzelnen Beobachtungspunkten verzeichnet, so hüllen diese eine Parabel ein, welche auch vom Curse des Schiffes B tangirt werden muss. Aendert man hierauf die Geschwindigkeit des Schiffes A und peilt B abermals in gleich unterschiedenen Zeitmomenten mehrere Male hintereinander, so erhält man ein anderes System von Peilungslinien, die eine andere Parabel einhüllen werden, zu der aber der Curs des Schiffes B ebenfalls eine Tangente sein muss. Da nun eine Parabel durch vier gegebene Bedingungen (in unserem Falle durch drei Peilungen und den eigenen Curs als Berührende) der Lage und Grösse nach vollkommen bestimmt ist, zu zwei Parabeln aber im Allgemeinen nur drei gemeinschaftliche Tangenten gezogen werden können, wovon eine in vorliegender Aufgabe der Curs des Schiffes A ist, so folgt, dass durch Aenderung der Geschwindigkeit des eigenen Schiffes die Lösung der gestellten Aufgabe eine bestimmte wird. Durch blosse Cursänderung des Schiffes A wird der gleiche Zweck erreicht, indem man auf jedem Curse die nöthige Anzahl Peilungen nimmt und die Lage der gemeinschaftlichen Tangenten der durch diese Peilungen bestimmten zwei verschiedenen Parabeln sucht. Es ist nicht schwer, auf diese Weise eine constructive Lösung der Aufgabe herzustellen, indem die Parabeln durch Berührende sehr leicht mit hinreichender Genauigkeit gezeichnet werden können; allein wir übergehen sie, um sogleich die analytische Lösung vorzunehmen, welche sich weit allgemeiner und einfacher gestaltet.

Es sei OA (Taf. IV. Fig. 1.) des Curs des Schiffes A und OB der des Schiffes B, also O ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt bei hinreichender Verlängerung derselben. Der von den beiden Cursen eingeschlossene Winkel werde mit φ bezeichnet. In gleichen Zeitintervallen sei an den Punkten C, D, E, F das Schiff B gepeilt und die Winkel, welche diese Peilungslinien

mit dem eigenen Curse nach vorne hin einschliessen, gleich α, β, γ, δ gefunden worden. Die Strecken, welche diese Peilungen an dem Curse des Schiffes B abschneiden, werden sämmtlich gleich sein; wir bezeichnen sie einzeln mit v. Die analogen, in gleichen Zeitunterschieden zurückgelegten Wege am eigenen Curse dürfen, wie wir früher gesehen und wie auch aus dem Resultate dieser Entwickelung hervorgehen wird, wenn die Aufgabe bestimmt sein soll, nicht einander gleich sein, oder, was gleichviel, das Schiff A muss in einem der nach C folgenden Beobachtungspunkte oder in mehreren, seine Geschwindigkeit ändern. Der Allgemeinheit wegen wollen wir diese Wege sämmtlich ungleich annehmen, und sie der Reihe nach mit m, n, r bezeichnen. Als Normallage der Curse beider Schiffe, welche bei den folgenden Entwickelungen im Auge behalten wird, nehmen wir die an, welche in Taf. IV. Fig. 1. dargestellt ist, nämlich, dass A sich dem Durchschnittspunkte der Curse O nähert, während B sich von demselben entfernt und das Schiff A steuerbord passirt. Jede andere Lage lässt sich leicht durch entsprechende Bezeichnung der in Rechnung kommenden Grössen auf diese Lage zurückführen.

Wir haben oben gesehen, dass auch eine Cursänderung des Schiffes A die Auflösung der Aufgabe zu einer bestimmten mache. Man kann diesen Fall jedoch leicht auf den einer Geschwindigkeitsänderung zurückführen. Denn man hat in dem Beobachtungspunkte D (Taf. IV. Fig. 2.) den Curs um den Winkel ψ geändert, und ist in dem neuen Curse mit unveränderter Geschwindigkeit die Strecke $DE_1 = DC$ in dem festgesetzten Zeitintervalle zurückgelegt und in E_1 der Peilungswinkel η_1 gefunden worden, so erhält man die Strecke DE, welche diese Peilungslinie am alten Curse von D aus abschneidet:

$$DE = DE_1 \frac{\sin \eta_1}{\sin \eta},$$

wobei $\eta = (\eta_1 + \psi)$ ist*).

Es ist aber für die Richtung der Peilungslinie EE_1 ganz einerlei, ob A mit unveränderter Geschwindigkeit im neuen Curse die Strecke DE_1 zurücklegt und in E_1 der Winkel η_1 beobachtet wird, oder ob im alten Curse die Strecke DE zurückgelegt und in E der Winkel η beobachtet worden wäre. Auf gleiche Weise kann man die Peilungen vom alten Curse auf den neuen reduziren.

---

*) Nach einer beiläufigen Schätzung muss man ψ so annehmen, dass η und η_1 nicht supplementäre Winkel werden, weil sonst $DE = DE_1$ werden würde.

Der Fall einer Cursänderung braucht daher nicht weiter berücksichtigt zu werden.

Wir bezeichnen nun noch die Entfernungen der Schiffe A und B von dem Durchschnittspunkte O ihrer Curse für den Augenblick der ersten Peilung respective mit p und q, dann hat man, wenn wir vor der Hand von der Entfernung beider Schiffe von einander noch absehen, im Ganzen die vier Unbekannten p, q, v und φ, zu deren Berechnung vier verschiedene Gleichungen nothwendig und hinreichend sind. Diese erhält man aus Taf. IV. Fig. 1. am Einfachsten in folgender Form:

$$(1) \quad \left\{\begin{aligned} p:q &= \sin(\alpha+\varphi):\sin\alpha, \\ (p-m):(q+v) &= \sin(\beta+\varphi):\sin\beta, \\ (p-m-n):(q+2v) &= \sin(\gamma+\varphi):\sin\gamma, \\ (p-m-n-r):(q+3v) &= \sin(\delta+\varphi):\sin\delta. \end{aligned}\right.$$

Es sind somit vier in gleichen Zeitabschnitten gemachte Peilungen genügend, um alle Bewegungselemente des Schiffes B zu finden, vorausgesetzt, dass das Schiff A seine Geschwindigkeit (nach jeder Peilung oder, wie wir später sehen werden, auch nur einmal) ändert. — Verwandeln wir diese Proportionen in Gleichungen, subtrahiren jede der drei letzten von der ersten, indem wir zugleich:

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{cotg}\alpha &= a, \\ \operatorname{cotg}\beta &= b, \\ \operatorname{cotg}\gamma &= c, \\ \operatorname{cotg}\delta &= d \end{aligned}\right.$$

setzen, so erhalten wir:

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned} m &= q(a-b)\sin\varphi - v(\cos\varphi + b\sin\varphi), \\ m+n &= q(a-c)\sin\varphi - 2v(\cos\varphi + c\sin\varphi), \\ m+n+r &= q(a-d)\sin\varphi - 3v(\cos\varphi + d\sin\varphi). \end{aligned}\right.$$

Durch Division je zweier dieser Gleichungen bekommt man:

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{m+n}{m} &= \frac{q(a-c)-2v(\cos\varphi + c\sin\varphi)}{q(a-b)-v(\cos\varphi+b\sin\varphi)}, \\ \frac{m+n+r}{m} &= \frac{q(a-d)-3v(\cos\varphi+d\sin\varphi)}{q(a-b)-v(\cos\varphi+b\sin\varphi)}; \end{aligned}\right.$$

und wenn man Zähler und Nenner im zweiten Theile dieser Gleichungen durch $q\sin\varphi$ theilt und zugleich:

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{v}{q} = u \quad \text{und} \\ \operatorname{cotg} \varphi = x \end{cases}$$

setzt, wird:

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{m+n}{m} = \dfrac{a-c-2u(x+c)}{a-b-u(x+b)}, \\ \dfrac{m+n+r}{m} = \dfrac{a-d-3u(x+d)}{a-b-u(x+b)}. \end{cases}$$

Durch Elimination von u erhält man hieraus endlich:

(7)

$$x = \frac{m(bc-2bd+cd)+n(3ad-2ac-2bd+bc)+r(ab-2ac+bc)}{m(b-2c+d)+n(-a+b+c-d)+r(a-2b+c)},$$

oder in anderer Form, welche zur Berechnung von x besser geeignet ist:

$$x = \frac{(a-b)(nd-rc)+(b-c)(ra-md)+(c-d)(mb-2na+nb)}{m(b-2c+d)+n(-a+b+c-d)+r(a-2b+c)}.$$

Eliminirt man x aus den Gleichungen (6), so bekommt man daraus:

(8)

$$u = \frac{m(b-2c+d)+n(-a+b+c-d)+r(a-2b+c)}{m(-b+4c-3d)+n(-b-2c+3d)+r(2b-2c)}.$$

Theilt man die erste der Gleichungen (3) beiderseits durch $q \sin \varphi$, so erhält man mit Berücksichtigung von (5):

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{m}{q \sin \varphi} = a-b-u(x+b), \quad \text{und hieraus:} \\ q \cos \varphi = \dfrac{mx}{a-b-u(x+b)}; \end{cases}$$

daher, weil nach (5) $v = qu$ ist:

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} v \cos \varphi = \dfrac{mux}{a-b-u(x+b)} \quad \text{und} \\ v \sin \varphi = \dfrac{mu}{a-b-u(x+b)}, \end{cases}$$

worin $v \cos \varphi$ die Projection der zwischen den Beobachtungszeiten von dem Schiffe B zurückgelegten Strecke v auf den Curs des Schiffes A und $v \sin \varphi$ auf eine darauf Senkrechte vorstellt.

Bezeichnet man mit ϱ die Entfernung der beiden Schiffe im Momente der ersten Peilung, so ist, wie man aus Taf. IV. Fig. 1. ersieht:

(11) . . $\left\{\begin{array}{l} q\sin\varphi = \varrho\sin\alpha, \\ \text{folglich erhält man mit Rücksicht auf (9):} \\ \varrho\sin\alpha = \dfrac{m}{a-b-u(x+b)}, \end{array}\right.$

wobei $\varrho\sin\alpha$ den senkrechten Abstand des Schiffes B vom Curse des Schiffes A im Augenblicke der ersten Beobachtung bedeutet.

Führt man die Werthe von x und u aus (7) und (8) in die Gleichungen (10) und (11) ein, so erhält man nach einer kleinen Umformung:

(12)

$$v\cos\varphi = \frac{(a-b)(nd-rc)+(b-c)(ra-md)+(c-d)(mb-2na+nb)}{3(a-b)(c-d)-(a-d)(b-c)},$$

$$v\sin\varphi = \frac{m(b-2c+d)+n(-a+b+c-d)+r(a-2b+c)}{3(a-b)(c-d)-(a-d)(b-c)},$$

$$\varrho\sin\alpha = \frac{m(b-4c+3d)+n(b+2c-3d)+2r(c-b)}{3(a-b)(c-d)-(a-d)(b-c)}.$$

Setzt man der Kürze halber:

(13) $\left\{\begin{array}{l} M = (a-b)(nd-rc)+(b-c)(ra-md)+(c-d)(mb-2na+nb), \\ N = m(b-2c+d)+n(-a+b+c-d)+r(a-2b+c), \\ P = m(b-4c+3d)+n(b+2c-3d)+2r(c-b) \quad \text{und} \\ R = 3(a-b)(c-d)-(a-d)(b-c); \end{array}\right.$

so erhält man die Formeln (7) und (12) in folgender einfachen Gestalt:

(14) . . . . $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{M}{N}, \\ v\cos\varphi = \dfrac{M}{R}, \\ v\sin\varphi = \dfrac{N}{R}, \\ \varrho\sin\alpha = \dfrac{P}{R}; \text{ ebenso findet man leicht:} \\ \varrho\cos\alpha = a\dfrac{P}{R}. \end{array}\right.$

Von den vier letzten Formeln wird man die eine oder die andere je nach den Werthen von φ und α gebrauchen. — Durch diese Resultate ist man nun vollkommen in den Stand gesetzt, den Curs, die Geschwindigkeit und die Entfernung des Schiffes B, letztere für einen beliebigen Moment, unter der Voraussetzung zu finden, dass die Strecken, welche das Schiff A zwischen den in gleichen Zeitabschnitten erfolgenden Beobachtungen zurückgelegt, sämmtlich ungleich sind, d. h. dass A zwischen je zwei Beobachtungen jedesmal eine andere Geschwindigkeit habe. Gehen wir nun von dieser Voraussetzung ab und nehmen die Geschwindigkeit von A durchwegs constant, also $m = n = r$ an, so folgt aus den Gleichungen (3) durch Division mit v:

$$\frac{m}{v} = \frac{q}{v}(a-b)\sin\varphi - (\cos\varphi + b\sin\varphi),$$

$$2\frac{m}{v} = \frac{q}{v}(a-c)\sin\varphi - 2(\cos\varphi + c\sin\varphi),$$

$$3\frac{m}{v} = \frac{q}{v}(a-d)\sin\varphi - 3(\cos\varphi + d\sin\varphi);$$

und hieraus durch Elimination von $\frac{m}{v}$ und $\frac{q}{v}$, wobei $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ von selbst verschwinden:

(15) . . . . . $(a-d)(b-c) = 3(a-b)(c-d)$.

Es ist diess eine merkwürdige Beziehung, welche stattfindet zwischen den Cotangenten der Neigungswinkel von je vier Berührenden einer Parabel gegen eine fixe Berührende, auf welcher letzteren jene vier gleiche Stücke abschneiden.

Für $m = n = r$ gehen aber die Formeln (13) mit Berücksichtigung von (15) sämmtlich in Null über; für diesen Fall erscheinen also sämmtliche zu suchende Grössen (14) in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ und es ist daher, wie schon erwähnt, absolut erforderlich, dass das Schiff A zwischen den einzelnen Beobachtungsintervallen nicht jedesmal dieselbe Geschwindigkeit (oder, was auf dasselbe hinauskommt, denselben Curs) beibehalte, d. h. es dürfen m, n und r nicht sämmtlich einander gleich sein, wenn die Aufgabe bestimmt sein soll. Wohl aber können je zwei von diesen Strecken gleich sein, während die dritte von ihnen verschieden ist.

Nehmen wir die zwei äusseren Strecken gleich, d. h. setzen wir $r = m$, so gehen die Formeln (13) über in:

$$(16)\quad \begin{cases} M = (a-b)(nd-mc) + m(b-c)(a-d) + (c-d)(mb-2na+nb), \\ N = (m-n)(a-b-c+d), \\ P = (m-n)(b+2c-3d), \\ R = 3(a-b)(c-d) - (a-d)(b-c). \end{cases}$$

Sind die zwei ersten Strecken unter sich gleich, so erhält man aus denselben Gleichungen wegen $n = m$:

$$(17)\quad \begin{cases} M = (a-b)(3md - 2mc - rc) + (b-c)(ra - md), \\ N = (r-m)(a - 2b + c), \\ P = 2(r-m)(b-c), \\ R = 3(a-b)(c-d) - (a-d)(b-c). \end{cases}$$

Endlich, wenn die beiden letzten Strecken unter sich gleich sind, also $r = n$ ist, bekommt man:

$$(18)\quad \begin{cases} M = (b-c)(na - md) + (c-d)(mb - 3na + 2nb), \\ N = (m-n)(b - 2c + d), \\ P = (n-m)(b - 4c + 3d), \\ R = 3(a-b)(c-d) - (a-d)(b-c). \end{cases}$$

Die Lösung der Aufgabe wird auch dann noch möglich, wenn eine oder zwei (nicht aber alle drei) von den Strecken m, n, r gleich Null werden, d. h. wenn das Schiff A während der innerhalb zweier oder dreier Peilungen verflossenen Zeit stehen geblieben ist. Die Formeln für diese Fälle ergeben sich ebenfalls sehr leicht aus (13) und (14); wir führen sie jedoch, als wahrscheinlich seltener zur Anwendung kommend, gar nicht speziell an.

Bevor wir über die praktische Rechnung nach diesen Formeln sprechen, mögen noch die wichtigsten Fälle zusammen gestellt werden, welche sich nach den besonderen Lagen der Curse und aus der Verschiedenheit der Richtungen beider Schiffe ergeben. Die dabei zu Grunde liegende Normallage der Curse und die Normalrichtungen der Schiffe, wornach die ganze vorstehende Rechnung durchgeführt wurde, ist oben in Taf. IV. Fig. 1. dargestellt. Hiervon abweichende Fälle sind:

1. Wenn B den Curs von A erst nach der Passirung schneidet, also sich dem Durchschnittspunkte beider Curse nähert, während A sich von demselben entfernt (Taf. IV. Fig. 3.). In diesem Falle wird φ durch den stumpfen Winkel BOM repräsentirt und folglich $\cotg \varphi$ negativ werden.

2. Wenn beide Schiffe sich dem Durchschnittspunkte der Curse nähern oder von demselben entfernen (Taf. IV. Fig. 4.); dann wird die Geschwindigkeit von B oder die derselben proportionirte Strecke v negativ werden und ausserdem $\cotg \varphi$ entsprechend positiv oder negativ sein.

3. Wenn einige der Peilungen backbord liegen (Taf. IV. Fig. 5.), so hat man ihre Neigungswinkel gegen den eigenen Curs, folglich auch die Cotangenten derselben, negativ in Rechnung zu bringen und nebstbei noch zu sehen, welcher der vorigen Fälle bezüglich der Lage der Curse eintritt.

4. Liegen alle Peilungen backbord, so kann man ihre Neigungswinkel gegen den Curs von A und deren Cotangenten positiv in Rechnung bringen, und erhält dann mit Berücksichtigung der früheren Fälle die Lage des Curses von B gegen die Backbordseite des eigenen Curses. Es wird hier nur noch erwähnt, dass die Neigungswinkel der einzelnen Peilungslinien gegen die Cursrichtung von A in allen Fällen nach vorne hin zu nehmen sind.

Für die praktische Lösung der Aufgabe nach den in (13), (14) oder nach den in (16), (17), (18) angeführten Formeln fügen wir folgende allgemeine Bemerkungen bei. Die Geschwindigkeitsänderung des Schiffes A darf nicht eine zu geringe sein, weil sich sonst die Aufgabe ihrem unbestimmten Falle, der in (15) angegeben, zu sehr nähert. Bei einer Fahrt mit Dampf wird man beispielsweise von ganzer Kraft auf halbe Kraft oder auf ein Drittel derselben herabgehen oder umgekehrt; bei einer Fahrt mit Segel wird eine Cursänderung am Sichersten zum Ziele führen. Da in den citirten Formeln hauptsächlich die Unterschiede der Cotangenten der Peilungswinkel vorkommen, so wird man die Beobachtungszeit derart wählen, dass die Aenderung der Peilungswinkel möglichst bedeutend ist, welcher Fall dann eintritt, wenn die beiden Schiffe in der Nähe ihrer geringsten Entfernung sich befinden. Bei der praktischen Rechnung selbst wird man mit grossem Vortheile eine Cotangententabelle anwenden, wobei man für die Genauigkeit, wie sie zur See verlangt wird, mit folgender Tafel der Cotangenten und Tangenten von Grad zu Grad ausreichen dürfte.

Tafel

der Cotangenten und Tangenten aller Winkel von 0° bis 90°.

Grade	Cotangt	Tangt	Grade	Grade	Cotangt	Tangt	Grade	Grade	Cotangt	Tangt	Grade
0		0	90	15	3·7321	0·2680	75	30	1·7321	0·5774	60
1	57·2900	0·01746	89	16	3·4874	0·2867	74	31	1·6643	0·6009	59
2	28·6363	0·03492	88	17	3·2709	0·3057	73	32	1·6003	0·6249	58
3	19·0811	0·05241	87	18	3·0777	0·3249	72	33	1·5399	0·6494	57
4	14·3007	0·06992	86	19	2·9042	0·3443	71	34	1·4826	0·6745	56
5	11·4301	0·08748	85	20	2·7475	0·3640	70	35	1·4282	0·7002	55
6	9·5143	0·1051	84	21	2·6051	0·3839	69	36	1·3796	0·7265	54
7	8·1443	0·1228	83	22	2·4751	0·4040	68	37	1·3270	0·7536	53
8	7·1154	0·1405	82	23	2·3559	0·4245	67	38	1·2799	0·7813	52
9	6·3138	0·1584	81	24	2·2460	0·4452	66	39	1·2349	0·8098	51
10	5·6713	0·1763	80	25	2·1445	0·4663	65	40	1·1918	0·8391	50
11	5·1446	0·1944	79	26	2·0503	0·4877	64	41	1·1504	0·8693	49
12	4·7046	0·2126	78	27	1·9626	0·5095	63	42	1·1106	0·9004	48
13	4·3315	0·2309	77	28	1·8807	0·5317	62	43	1·0724	0·9325	47
14	4·0108	0·2493	76	29	1·8040	0·5543	61	44	1·0355	0·9657	46
15	3·7321	0 2680	75	30	1·7321	0·5774	60	45	1·0000	1·0000	45
Grade	Tangt	Cotangt	Grade	Grade	Tangt	Cotangt	Grade	Grade	Tangt	Cotangt	Grade

Schliesslich möge noch die vollständige Berechnung eines Beispieles Platz finden.

Es sei an Bord des Schiffes A von 6 zu 6 Minuten ein in Sicht befindliches Schiff B gepeilt und für die Neigungswinkel der Peilungslinien gegen den Curs von A folgende Werthe gefunden worden:

$$\alpha = -13^0, \quad \beta = -2^0 \cdot 5, \quad \gamma = +10^0, \quad \gamma = +19^0.$$

Im Momente der dritten Peilung habe man die Geschwindigkeit vermindert und aus den Loggangaben $m = n = 1$ und $r = \frac{1}{3}$ Meilen gefunden. Zur Berechnung dieses Beispieles dienen die Formeln (17). Man erhält mit vorstehenden Winkeln aus der obigen Tabelle:

$a = -\ 4{\cdot}3315$	und hieraus	$a - b = +\ 19{\cdot}5272$	$3md - 2mc - rc = -4{\cdot}5194$
$b = -23{\cdot}8587$		$b - c = -29{\cdot}5300$	$ra - md = -4{\cdot}3480$
$c = +\ 5{\cdot}6713$		$a - d = -\ 7{\cdot}2357$	$a - 2b - c = +49{\cdot}0572$
$d = +\ 2{\cdot}9042$		$c - d = +\ 2{\cdot}7671$	

und folglich wird:

$$M = +40{\cdot}144, \quad P = +39{\cdot}377,$$

$$N = -32{\cdot}705, \quad R = -51{\cdot}571.$$

Daraus findet man nach (14):

$$x = \operatorname{cotg}\varphi = -1{\cdot}228.$$

Aus obiger Tabelle findet man zu 1·228 den Winkel 39°; da aber der Zahlwerth der Cotangente von φ negativ ist, so hat man:

$$\varphi = 180^0 - 39^0 = 141^0.$$

Ferner wird:

$$v\cos\varphi = -0{\cdot}778 \quad \text{oder wegen} \quad \cos\varphi = -0{\cdot}777:$$

$$v = +1 \text{ Meile};$$

d. h. das Schiff B legt in 6 Minuten 1 Meile zurück, folglich hat es die Geschwindigkeit von 10 Meilen per Stunde.

Endlich erhält man:

$$\varrho\sin\alpha = -0{\cdot}764 \quad \text{und wegen,} \quad \sin\alpha = -0{\cdot}224:$$

$$\varrho = +3{\cdot}4 \text{ Meilen}$$

als Entfernung des Schiffes B von A im Augenblicke der ersten Peilung.

Um das Resultat dieser Rechnung auf der Karte graphisch darzustellen, ziehe man in derselben (Taf. IV. Fig. 6.) die eigene Curslinie Ax, trage auf diese im Punkte der ersten Peilung C die Winkel $\varphi = 141^0$ und $\alpha = -13^0$ auf. Sodann schneide man von C aus auf dem einen Schenkel des Winkels α die Strecke $\varrho = 3{\cdot}4$ Meilen $= CD$ ab, und ziehe durch D eine Parallele BD zum Schenkel CB_1 des Winkels φ, so stellt diese letztere Linie den Curs von B dar. Trägt man nun von D aus die Strecken v, $2v$, $3v$.... in der Cursrichtung des Schiffes B auf, so erhält man den Ort dieses Schiffes nach 6, 12, 18, 24.... Minuten vom Augenblicke der ersten Beobachtung an gerechnet.

XXII.

Die mechanische Theorie der Wärme.

Vortrag gehalten in der feierlichen Sitzung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien am 30. Mai 1864

von

Herrn Dr. *A.* Freiherrn *v. Baumgartner*,

Präsidenten der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien.

(Den folgenden Vortrag des hochverdienten Präsidenten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien erlaube ich mir den Lesern des Archivs, wie ich dies schon früher öfters mit bei ähnlicher Gelegenheit gehaltenen Vorträgen gethan habe, im Folgenden mitzutheilen, weil derselbe seinen wichtigen Gegenstand mit ungewöhnlicher Klarheit behandelt. Grunert.)

Im Bereiche der Naturwissenschaften dehnt die Mechanik ihre Herrschaft immer mehr aus, obwohl sie ganz auf abstracten Principien beruht, unbekümmert um die wirklichen Dinge sich an der Hand der Mathematik fort entwickelt hat und keinerlei Eroberungsgelüste hegt.

Die Astronomie ist durch die Entdeckung der allgemeinen Schwere zur Mechanik des Himmels geworden, ohne dadurch ihrer Herrschaft über die Erde zu entsagen; denn die Gesetze der irdischen Schwere sind nur Corollarien von Weltgesetzen. Unter diesen sind die Gesetze der Pendelschwingungen Veranlassung zur ferneren Erweiterung der Herrschaft der Mechanik geworden. Man hat nämlich längst den Schall als Wirkung einer Bewegung angesehen; aber erst Vergleichungen der Bewegung eines schweren Pendels mit der einer tönenden Saite haben zu der Ueberzeugung geführt, dass über beide dieselbe Macht gebiete. So ist eine neue Wissenschaft entstanden, die Akustik, ihrem Wesen nach eine Mechanik des Schalls.

Es konnte nicht unbemerkt bleiben, dass sich Licht und Schall auf analoge Weise fortpflanzen und auf ihrem Wege übereinstimmende Veränderungen erleiden. Als man aber gar intime Beziehungen zwischen den Farben im Sonnenstrahl und der Höhe der Töne gewahr wurde, konnte man nicht mehr umhin, zu untersuchen, ob nicht etwa Licht und Schall auf analogen Gründen beruhen, um so mehr, da die damals herrschende Ansicht, das Licht sei ein materieller Ausfluss von leuchtenden Körpern, denkenden Köpfen nicht mehr genügen wollte. Als endlich gar an der doppelten Brechung, Polarisation, Interferenz des Lichtes und der Aenderung seiner Geschwindigkeit in brechenden Mitteln Lichtgesetze bekannt wurden, die in der Emanationshypothese keine Erklärung mehr fanden, ja zum Theile mit derselben in Widerspruch standen, mit der Vibrationshypothese hingegen sich friedlich vertrugen, ist die Lichtlehre der Mechanik unterthan geworden und kann füglich als Mechanik des Lichtes bezeichnet werden.

Die Physiker einer nahen Vergangenheit sagten, die Sonne sende uns mit den Lichtstrahlen auch Wärmestrahlen zu; die heutige Physik behauptet, von der Sonne werden uns Wärmestrahlen zugesendet, von denen ein grosser Theil auch leuchtet. Fallen Sonnenstrahlen auf eine wägbare Masse, von der sie ganz oder theilweise absorbirt, d. h. ihrer Bewegung beraubt werden, so wirken sie auf diese Masse wie ein mit ihr in Berührung gesetzter warmer Körper. Dieses deutet darauf hin, dass die Bewegung vom Aether an die wägbare Masse übertragen werden könne und ladet ein, zu versuchen, ob sich nicht die Gesetze der Wärme aus einer Bewegung der kleinsten Körpertheile ableiten lassen. Diese Ansicht, durch anderweitige zahlreiche Gründe unterstützt, hat zu einer mechanischen Theorie der Wärme geführt, welche somit der bisherigen Wärmestofftheorie gegenüber steht. So ist die Wärmelehre zu einer Mechanik der Wärme geworden.

Da diese Theorie eine der wichtigsten Errungenschaften der Physik in der Neuzeit ist, den menschlichen Verstand von einer bisher für unentbehrlich gehaltenen Krücke — dem Wärmestoff — befreit und ihn auf ein von hellen Strahlen der Mathematik reich beschienenes Feld geleitet; so mag es mir erlaubt sein, eine kurze und fassliche Darstellung derselben zum Gegenstande meines Vortrages am heutigen, der Erinnerung an die Stiftung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften gewidmeten Feste zu machen. Ich muss zwar besorgen, man werde diese Wahl nicht für eine glückliche halten, da ihr Gegenstand noch nicht abgeschlossen ist und dem ernsten Commando der Mathematik gar viel Einfluss gestattet; man würde es vielleicht lieber sehen, wenn ich meinen Stoff

aus der Strömung der Zeit geschöpft hätte. Allein ich halte jeden, der an dieser Versammlung Theil nimmt, für einen Freund wissenschaftlichen Fortschrittes und als solchen gewöhnt an ernste Beschäftigung, zugleich wollte und konnte ich als Mitglied der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe mein Gebiet nicht verleugnen. Es haben ja auch die Naturwissenschaften eine Strömung, wenn auch eine geräuschlose und wenig in die Augen fallende, und eben aus dieser habe ich meine Wahl getroffen. Uebrigens werde ich es nicht an Bemühung fehlen lassen, meinen Gegenstand möglichst klar darzustellen, um wenigstens nicht unhöflich zu erscheinen; denn nach dem Ausspruch eines französischen Philosophen ist Klarheit Höflichkeit von Seite derer, welche öffentlich sprechen.

Die Fortpflanzung eines Impulses, der von der Sonne oder einem andern leuchtenden oder auch nur warmen Körper ausgeht, auf den Aether erfolgt durch Uebertragung der Bewegung von einem Aethertheilchen an das daran grenzende nach den Gesetzen des Stosses elastischer Körper. In einer gleichartigen Aethermasse tritt das bewegte Theilchen seine Bewegung an das nächste ab. Das bewegte kommt in Ruhe, das ruhende nimmt aus der Hand dieses die ganze Bewegung an. Stosst ein freies Aethertheilchen an ein durch die Anziehung ponderabler Masse modificirtes oder umgekehrt, so kehrt ein Theil der lebendigen Kraft in's alte Mittel zurück, der andere tritt in's neue Mittel über. Dasselbe erfolgt, wenn freier oder modificirter Aether an wägbare Masse stosst oder umgekehrt. Hier treten aber beide eben betrachtete Fälle zugleich ein, da wägbare Stoffe in ihren Zwischenräumen immer modificirten Aether enthalten. Ein Theil der einfallenden Aetherwelle trifft auf wägbare Molecüle, ein anderer auf modificirten Aether, beide senden Bewegung in's alte Mittel zurück, und sowohl der modificirte Aether, als das wägbare Molecül werden in Bewegung gesetzt. Erstere Bewegung pflanzt sich in der Regel strahlend fort und durchfährt so die Zwischenräume oder wird nach allen Richtungen zerstreut, bis sie ganz in die Körpermolecüle abgegeben ist, letztere vertheilt sich successive an alle Molecüle des Körpers und erwärmt sie. Demnach ist es nicht die Bewegung des Aethers, sondern jene der wägbaren Körpermolecüle, die als Wärme erfunden wird. Dieses folgt überdies auch noch aus anderen Betrachtungen.

Es ist nämlich einleuchtend, dass, je nachdem die Bewegung, welche wir Wärme nennen, den Körpermolecülen oder den Aethertheilchen zukommt, in einem Krystall die Richtungen für das grösste oder kleinste Wärmeleitungsvermögen auch mit den Elasti-

citätsaxen des Krystalls oder mit jenen des darin enthaltenen Aethers zusammenfallen müssen. Nach Sénarmont ist in Blättchen von Gyps entschieden ersteres der Fall, und eben darauf deuten auch Versuche mit Platten von Bergkrystall und Kalkspath über Klangfiguren. Es kann sonach auch als experimental bewiesen angesehen werden, dass das Wesen der Wärme in einer Bewegung der ponderablen Molecüle, nicht in einer solchen des Aethers bestehe.

Jedes auf solche Weise in Bewègung gesetzte Körpermolecül besitzt eine mechanische Wirkungsfähigkeit von bestimmbarer Grösse. Die Mathematik lehrt, dass sie ausgedrückt werde durch das halbe Product aus der bewegten Masse und dem Quadrat ihrer Geschwindigkeit. Man nennt es die lebendige Kraft des Bewegten. Offenbar ist das halbe Quadrat der Geschwindigkeit die lebendige Kraft der Massen- oder Gewichtseinheit. Somit kann man die lebendige Kraft eines Molecüls auch bezeichnen als das Product des Moleculargewichts und der lebendigen Kraft der Gewichtseinheit. Es gibt Fälle, wo diese Ausdrucksweise Vortheil gewährt.

Die Summe der lebendigen Kräfte aller Molecüle eines Körpers bestimmt seinen Wärmegehalt. Die lebendige Kraft eines Molecüls, somit sein Wärmegehalt, bestimmt die Temperatur. Jeder Körper enthält also Wärme, wenn seinen Molecülen lebendige Kraft zukommt, und von zwei Körpern ist jener der wärmere, dessen Molecülen mehr lebendige Kraft innewohnt. Kalt soll eigentlich nur ein Körper heissen, wenn seine Molecüle aller lebendigen Kraft bar sind; man nennt aber meistens einen Körper kalt gegen einen andern, dem er an lebendiger Kraft seiner Molecüle nachsteht. Eine natürliche Temperaturscala kann also ihren Nullpunkt nur da haben, von wo die lebendige Kraft der Molecüle anhebt. Unsere üblichen Scalen beginnen mit dem Schmelzpunkt des Eises und haben von da nach aufwärts positive oder Wärmegrade, nach abwärts negative oder Kältegrade. Der absolute Nullpunkt der Wärme entspricht nahe 273 negativen Graden. Negative Grade einer solchen Scala von mehr als 273 haben sonach keinen Sinn mehr.

Molecüle verschiedener Natur haben verschiedene Gewichte. Um gleiche Temperatur zu erlangen, müssen daher die leichteren auf grössere Geschwindigkeit gebracht werden als die schwereren, so dass durch die grössere Geschwindigkeit der Abgang an Masse ersetzt wird. Sonach braucht ein Eisenmolecül, dessen Gewicht gleich 28 ist, eine fast dreimal grössere Geschwindigkeit als ein Goldmolecül mit einem Gewichte von 198, damit beiden dieselbe

Temperatur zukomme. Daraus folgt, dass gleiche Massen von verschiedener Natur bei gleichen Temperaturen ungleiche Wärmegrade enthalten und daher verschiedenen Körpern verschiedene Wärmecapacitäten zukommen.

Wird Molecülen von ungleicher Natur, aber gleicher Temperatur, so viel lebendige Kraft zugeführt als nöthig ist, um die Temperatur eines jeden um 1 Grad zu steigern, so wird dadurch die Gleichheit ihrer Temperatur nicht aufgehoben und es müssen sonach auch diese Zuwüchse an lebendiger Kraft für alle gleich sein. Dieselben können aber wegen der Unveränderlichkeit der Moleculargewichte blos durch Steigerung der Geschwindigkeit, d. h. der lebendigen Kraft der Gewichtseinheit bewerkstelligt werden. Diese hat aber in der mechanischen Wärmetheorie die Bedeutung der specifischen Wärme, und es müssen sonach die Producte aus dem Moleculargewichte und der specifischen Wärme für alle Molecüle gleich sein, von welcher Natur sie auch sein mögen. Dieses ist aber das auf dem Versuchswege gefundene Dulong-Petit'sche Gesetz auf einzelne Molecüle angewendet. Es muss offenbar auch für Aggregate gleichartiger Molecüle gelten, so ferne durch die Aggregation deren Selbständigkeit nicht geändert wird und sie nicht etwa durch ihre Molecularanziehung auf einander wirken. In vollkommenen Gasen, die sich bei der Erwärmung nicht ausdehnen können, bleibt diese Selbständigkeit gewahrt und diese befolgen in der That, der Erfahrung gemäss, das genannte Gesetz vollkommen. In Aggregaten von Molecülen, die dem Einflusse der Molecularanziehung unterliegen, wie dieses bei unvollkommenen Gasen, bei Dünsten, festen und tropfbaren Körpern der Fall ist, erleidet dieses Gesetz eine Modification, wie solches auch durch die Versuche von Neumann und Regnault bestätiget wird. Aber selbst über die Art dieser Modification gibt die mechanische Wärmetheorie Aufklärung. Die einem Körper zugeführte lebendige Kraft ist nämlich in demselben nur bei vollkommenen Gasen, deren Volumen sich beim Erwärmen nicht ändern kann, vollständig als solche enthalten, in anderen Körpern wird ein Theil derselben zu Arbeit verbraucht, durch welche die Entfernung und Lage der Molecüle und das Volumen geändert, der Zusammenhang derselben modificirt und wenn auf dem Volumen ein äusserer Druck lastet, diese Last eine Strecke weit fortgeschoben wird. Die letztere dieser Arbeiten wirkt daher nach Aussen und heisst darum auch äussere Arbeit, die ersteren bleiben auf das Innere des Körpers beschränkt und sind das Werk innerer Arbeit. Nur das, was an lebendiger Kraft als solcher im Körper zurückbleibt, unterhält seine Temperatur und bildet

das, was man bisher freie Wärme genannt hat, während der nur in Form von geleisteter Arbeit vorhandene Theil die Temperatur nicht beeinflusst. Er wurde sonst gebundene Wärme genannt. Es herrscht aber zwischen jenem Theil der einem Körper zugeführten Wärme, welcher zur Arbeit verbraucht wird, und jenem, der als lebendige Kraft fortbesteht, so lange sich der Aggregationszustand nicht ändert, ein bestimmtes Verhältniss und darum kann man auch aus der Grösse der gethanen Arbeit der Wärme in einem Körper innerhalb bestimmter Grenzen auf seine Temperatur schliessen, wie dieses in der That bei der Anwendung unserer Thermometer geschieht.

Bisher hat man unter specifischer Wärme eines Körpers jene Wärmemenge verstanden, welche die Temperatur einer Gewichtseinheit um 1° C. erhöht, ohne Rücksicht darauf, ob sie ganz oder zum Theil zur Temperaturerhöhung verwendet oder ein Theil davon zur Arbeit verbraucht wird; nur bei Gasen hat man specifische Wärme bei constantem Volum, wo keine äussere Arbeit verrichtet wird, und solche bei constantem Druck, wo ein Theil derselben zur äusseren Arbeit verbraucht wird, unterschieden; erst in neuester Zeit, wo die mechanische Wärmetheorie ihren Einfluss zu üben angefangen, hat man die ausschliessend zur Temperaturerhöhung einer Gewichtseinheit um 1° C. verwendete Wärme sowohl von der specifischen Wärme bei constantem Volumen als von der bei constantem Druck unterschieden und nennt sie freie specifische Wärme. Da ist es wohl kein Wunder, wenn die Producte aus dem Moleculargewichte und der specifischen Wärme im letzteren Sinn für verschiedene Körper, ja selbst für denselben Körper bei verschiedener Härte, Festigkeit etc. auch ungleiche Werthe haben, während doch die freie specifische Wärme von der Art der Verbindung der Molecüle ganz unabhängig sein muss. Dass jene Producte für Körper von übereinstimmender chemischer Zusammensetzung doch sehr nahe dasselbe Product geben, wie dieses aus Neumann's und Regnault's Versuchen hervorgeht, deutet nur darauf hin, dass bei solchen Körpern auch ein homologer Verbrauch von Wärme zur inneren Arbeit stattfinde. Bei festen und tropfbaren Körpern wird auch auf äussere Arbeit kein Bedacht genommen, daher mag es auch kommen, dass diese ihre specifische Wärme mit der Temperatur wegen der dabei stattfindenden Ausdehnung zunimmt.

In der bisherigen Darstellung sind die Grundbegriffe der Wärmelehre und ihre Relation, zu deren Bekanntwerdung auf dem Wege des Experimentes es nahe ein Jahrhundert bedurfte, ohne irgend eine Hilfshypothese blos aus den Elementen der Bewegung

überhaupt, wie sie die Mechanik längst lehrt, abgeleitet worden. Weitere Betrachtungen, bei denen auf die Aggregationszustände Rücksicht genommen wird, werden die bisher bekannten Wärmegesetze nicht blos in ihrer vollen Bedeutung aus Molecularbewegungen erklären, sondern über sie neues Licht verbreiten.

Molecüle, die blos von ihrer Anziehungskraft beherrscht werden, müssen sich zu einer starren (festen) Masse verbinden, in der jedes eine stabile Gleichgewichtslage inne hat, aus der es wohl durch einen äusseren Impuls verrückt werden kann, in welche es aber wieder zurückkehren muss, wenn jene Einwirkung aufhört. Eine solche Verrückung erleiden die Molecüle durch die Stösse einer Aetherwelle. Sie werden dadurch der Herrschaft zweier Kräfte unterthan, einer centripetalen vermöge der molecularen Anziehung und einer gegen diese im Allgemeinen geneigten tangentiellen, in Folge der Aetherstösse. Es ist nicht wahrscheinlich, dass sich daraus eine hin- und hergehende Bewegung zusammensetzt, wie sie den Schallerscheinungen zum Grunde liegt, sondern vielmehr eine solche um einen fixen Mittelpunkt, die, wenn auch in unendlich verkleinertem Massstab, der Bewegung der Sonne und der Erde um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt ähnlich ist. Wird der tangentiellen Bewegung in Folge intensiver einfallender Aetherwellen oder auf andere Weise Zuwachs zu Theil, so wird, wie schon bemerkt worden ist, ein Theil dieser entsprechenden lebendigen Kraft in Arbeit umgesetzt, durch welche der Zusammenhang der Molecüle gelockert, das Volumen vergrössert, nach Umständen auch eine äussere Last fortbewegt wird. Von einer bestimmten Temperatur an wird die ganze Zufuhr von lebendiger Kraft in Arbeit umgesetzt, weil von da an die innere Arbeit eine gänzliche Umstaltung des Gleichgewichtssystems der Molecüle bewerkstelligt und den tropfbaren Zustand herbeiführt. In diesem kommt den Molecülen nicht mehr eine bestimmte Gleichgewichtslage, wohl aber ein bestimmter Abstand von anderen zu, und ein äusserer Impuls hat nur die Folge, dass die Centralbewegung der Molecüle nicht mehr um fixe Mittelpunkte vor sich geht, sondern um veränderliche, einigermassen ähnlich den Wassermolecülen bei der Wellenbewegung. Zugleich mögen drehende Bewegungen der Molecüle auftreten. Fortgesetzte äussere Zufuhr von lebendiger Kraft steigert die Temperatur der bewegten Masse und erzeugt intermoleculare Veränderungen, bis die Molecüle ausserhalb des Wirkungskreises der molecularen Anziehung gesetzt zu werden beginnen. Der Eintritt dieses Zustandes bezeichnet das Verdampfen. Von da an sind die Molecüle von einander ganz oder fast ganz unabhängig,

ihre Anziehung hat keine Macht mehr über sie und jeder Stoss, der von Aussen anlangt, kann nur eine progressive Bewegung derselben bewirken oder die schon bestehende in Richtung und Geschwindigkeit ändern, wohl auch bei schiefen Zusammenstössen drehende Bewegungen erzeugen. Die Bewegung der Molecüle, welche wir als Wärme empfinden, ist sonach bei ausdehnsamen Körpern nur eine progressive. Molecüle, welche sich an der Oberfläche einer Flüssigkeit befinden, können schon bei einer Temperatur weit unter der Siedhitze in Dunst übergehen, weil sie schon durch die gegen die Oberfläche gerichtete Wirkung der tangentiellen Bewegung tropfbarer Theile aus der Wirkungssphäre der Anziehung kommen. Diese Theile verlassen die flüssige Masse und schiessen geradlinig fort, bis sie an ein Hinderniss gelangen und daselbst als ein elastischer Körper zurückgeworfen werden. In einem geschlossenen, nicht ganz mit Flüssigkeit gefüllten Gefässe wird dieses an der Decke geschehen; die Molecüle werden zur Oberfläche der Flüssigkeit zurückkehren, ja vermöge ihrer Geschwindigkeit in dieselbe eindringen und der flüssigen Menge einverleibt werden, während andere an ihrer Stelle sie verlassen. Anfangs werden wohl mehr Molecüle ausscheiden als zurückkehren und die Dunstmenge wird zunehmen, doch wird ein Zustand eintreten müssen, wo gleich viele Molecüle sich dem Dunst und der tropfbaren Masse beigesellen. Da hat nun der Dunst das Maximum seiner Dichte erreicht. Im Dunst stehen die Molecüle nur wenig ausserhalb der Wirkungssphäre der molecularen Anziehung, daher schon ein mässiger Druck, der sie näher an einander bringt, oder eine geringe Abkühlung den Uebergang in den tropfbaren Zustand zur Folge hat.

Es ist schon lange bekannt, dass der Siedpunkt einer Flüssigkeit von dem darauf lastenden Druck abhängt und dass er mit diesem Druck steigt und sinkt. Man weiss, dass Wasser unter dem gehörigen Druck ohne zu sieden bis zum Glühen erhitzt, aber unter geringem Druck schon nahe am Eispunkte zum Sieden gebracht werden kann. Die mechanische Wärmetheorie lehrt aber auch, dass der Schmelzpunkt einem ähnlichen Einflusse unterliege; er wird bei Flüssigkeiten, die sich bei der Erwärmung ausdehnen und wo daher ein äusserer Druck der Wärmearbeit entgegen wirkt, durch Verstärkung desselben hinauf, bei solchen, die sich beim Erwärmen zusammenziehen und wo ein Druck die Wärmearbeit unterstützt, herabbewegt. Zu den ersteren Körpern gehören viele, z. B. Olivenöl und Wallrath, zu den letzteren Wasser unter 4° C. In der That wird Olivenöl, das unter 35 Atmosphären Druck noch flüssig ist, ohne Entziehung von Wärme, sondern blos durch Ver-

mehrung des Druckes bis zu 60 Atmosphären fest. Wallrath schmilzt beim gewöhnlichen Luftdruck schon bei 47°·7, unter einem Druck von 156 Atmosphären aber erst bei 49°·9.

Wasser kann unter starkem Drucke noch bei —20° C. flüssig erhalten werden.

Die Molecüle der permanenten Gase stehen offenbar am weitesten ausserhalb der Sphäre der molecularen Anziehung, an diesen muss sich auch die mechanische Wärmetheorie der stärksten Probe unterziehen lassen. Dem Vorhergehenden gemäss ist da die Bewegung, welche wir Wärme nennen, eine progressive und aus dieser müssen sich sonach die zahlreichen Gesetze der Wärme von Gasen ergeben. Diese Bewegung erfolgt in gerader Richtung mit gleichförmiger, in verschiedenen Gasen verschiedener Geschwindigkeit, bis ein Molecül an ein anderes oder an die Gefässwand stosst und eine Reflexion eintritt, bei der natürlich wegen der vollkommenen Elasticität der Molecüle kein Verlust an lebendiger Kraft eintritt. Die Molecüle einer Gasmasse mögen je nach der Richtung der auf sie wirkenden Impulse nach bestimmten Richtungen sich bewegen, allein die häufig vorkommenden schiefen Stösse unter den Molecülen selbst und die für so kleine Körperchen unter allen Umständen sehr gross erscheinende Rauheit der Gefässwände wird es bald bewirken, dass im ganzen Raume alle Richtungen gleich zahlreich vertreten sind. Eben diese Umstände bringen es aber auch mit sich, dass ein Molecül sehr häufigen Zusammenstössen mit anderen ausgesetzt ist und sonach der Weg, den es von einem Zusammenstoss zum andern zurücklegt, nur sehr kurz sein kann. Nach Maxwell beträgt er bei Molecülen atmosphärischer Luft von 15½° C. nur $\frac{1}{17500}$ Millim., und es erfährt ein Molecül in einer Secunde über 8077 Mill. Reflexionen.

Die Rechnung lehrt uns die Geschwindigkeit jedes Gasmolecüls bei einer bestimmten Temperatur kennen. Diese beträgt bei 0° C. für ein Molecül im Sauerstoffgas 461, im Stickstoffgas 492, im Wasserstoffgas 1844 Meter. Diese Geschwindigkeiten machen es begreiflich, dass die Stösse bei einer so raschen Aufeinanderfolge auf die Wände eine Wirkung üben, welche einem stetigen Druck gleich kommt. Zur Erklärung eines solchen bedarf es daher nicht der Annahme einer abstossenden Kraft zwischen den Molecülen.

In einem Gasgemenge hat jeder Gemengtheil seine eigene Moleculargeschwindigkeit und es muss in einer solchen ein eigenthümliches Gewirre von Bewegungen, Stössen und Rückprallungen herrschen. In einem chemisch zusammengesetzten Gase müssen

die Geschwindigkeiten der Bestandmolecüle zu einem Mittelwerth ausgeglichen sein. Die Rechnung lehrt, dass er zu der Geschwindigkeit der die Zusammensetzung constatirenden Molecüle in ähnlicher Relation stehe, wie die Dichte der Bestandgase zu der des Zusammensetzungs-Productes.

Bringt man die Molecüle eines Gases näher an einander, indem man sie in einen kleineren Raum zusammenpresst, so wird auch der Druck auf die Gefässwände grösser, und zwar 1. weil die Flächeneinheit derselben von einer grösseren Anzahl Molecüle getroffen wird; 2. weil in derselben Zeit jedes Molecül mehr Stösse vollbringt. Die erste Ursache vermehrt den Druck im Verhältniss der Länge und Breite des Gasraumes, die zweite im Verhältniss der Tiefe desselben, beide zusammen also in dem Verhältnisse, in welchem das Gasvolumen kleiner geworden ist. Dieses Gesetz ist längst unter dem Namen des Mariotte'schen bekannt.

Steigert man die Temperatur, d. h. die Geschwindigkeit der Gasmolecüle, so wird dadurch nicht blos jeder Stoss eines solchen auf die Gefässwände stärker, sondern auch die Anzahl der auf eine Flächeneinheit in einer bestimmten Zeit erfolgenden Stösse grösser. Hat der Widerstand der Gefässwände bei der geringeren Geschwindigkeit der Molecüle dem Andrange derselben eben zu widerstehen vermocht, so wird er dieses bei der grösseren Geschwindigkeit derselben nicht mehr zu thun im Stande sein, das Gas wird die Wände auseinander treiben und erst bei einem im Verhältniss zur Steigerung der lebendigen Kraft grösseren Volumen wieder mit dem Widerstande im Gleichgewichte stehen. Dieses Gesetz lautet also: Das Volumen eines Gases wächst im geraden Verhältnisse mit dessen Wärme, gemessen an einem Thermometer, dessen Scala mit dem absoluten Nullpunkte der Wärme beginnt. Es ist unter dem Namen des Gay-Lussac'schen Gesetzes bekannt.

Wird ein Gas durch Verstärkung des äusseren Druckes auf ein geringeres Volumen gebracht, so steigt seine Temperatur, lässt man es durch Verminderung des Druckes zu einem grösseren Volumen gelangen, so sinkt sie, ohne dass im ersten Falle Wärme zugeführt, im zweiten Wärme abgeleitet wird. Zuwachs und Abnahme der Temperatur müssen also ihre Quelle im Gase selbst haben. Nach unserer Theorie begreift sich dieses leicht. Eine Verstärkung des Druckes macht einen Theil der innern Arbeit rückgängig und veranlasst, dass die dazu verbrauchte Kraft wieder zur lebendigen werde, eine Verminderung des Druckes erweitert die Schranken für das Gasvolum, ruft mehr innere Arbeit

hervor und verursacht sonach einen Mehrverbrauch lebendiger Kraft. In beiden Fällen wird das früher bestandene Verhältniss zwischen der noch freien lebendigen Kraft und der zur Arbeit verbrauchten geändert. Es ist aber auch das Wärmegleichgewicht gestört, da in dem Falle, wo die Arbeit im Gase vermindert worden, mehr, in jenem aber, wo diese Arbeit eine Vermehrung erfahren hat, weniger freie lebendige Kraft vorhanden, als jenes Gleichgewicht fordert, und es muss, um solches wieder herzustellen, im ersten Falle Wärme nach Aussen abfliessen, im zweiten aber von Aussen aufgenommen werden. Daraus folgt nun, dass in einem Gase zwischen der freien lebendigen Kraft, welche die Temperatur macht, und jener, die zur Arbeit verwendet ist, ein bestimmtes Verhältniss bestehe.

Erwärmung und Erkaltung durch Zusammendrücken und Ausdehnen finden aber auch bei anderen Aggregationsformen Statt, und es kann sonach angenommen werden, dass auch bei solchen das Verhältniss zwischen der freien und der zur Arbeit verbrauchten lebendigen Kraft ein bestimmtes sei, wie dieses schon früher angedeutet worden ist.

Für permanente einfache Gase oder solche zusammengesetzte, wo sich bei der Zusammensetzung keine Volumenänderung ergibt, findet man sogar die Ziffer für das gedachte Verhältniss. Die Mathematik lehrt nämlich, dass von der gesammten lebendigen Kraft der progressiven Bewegung der Molecüle $^3/_5$ zur Erhaltung der Temperatur, $^2/_5$ zur Arbeit verwendet werden.

Dalton hat das Gesetz aufgestellt, dass ein Gasgemenge auf die Gefässwände gerade so drückt, als wenn jeder einzelne Gemengtheil den ganzen Raum für sich erfüllte und als wäre der andere gar nicht vorhanden. Die Wärmestofftheorie, welche zur Erklärung des Gasdruckes auf die Gefässwände eine abstossende Kraft der Gasmolecüle postulirte, musste daher annehmen, dass nur gleichartige Molecüle einander abstossen, ungleichartige aber auf einander gar keine Wirkung ausüben, sonach für eines der vom andern occupirte Raum als leer zu betrachten sei. Nach der mechanischen Wärmetheorie, nach welcher alle Gasmolecüle von einander gänzlich unabhängig sind, und jedem eine seiner Natur und der herrschenden Temperatur entsprechende progressive Bewegung zukommt, ist dieses Gesetz in der Natur der Gase begründet; denn sowohl zwischen homogenen, als zwischen heterogenen Molecülen finden Zusammenstösse Statt und die lebendige Kraft der einen sowohl, als der andern wird bis zur Gefässwand ohne Verlust fortgepflanzt. Wenn zwei Gase in Berührung stehen, so sinkt wohl anfangs das schwerere im leichteren zu Boden und

das leichtere steigt im schwereren auf, wie Oel im Wasser; allein diese Uebereinanderlagerung begründet nicht einen stabilen Zustand. Bald beginnen sich die verschiedenen Molecüle mit einander zu vermengen, selbst wenn sie nur durch einen engen Canal mit einander verbunden sind und das schwerere den unteren Platz einnimmt; Stabilität tritt nur ein, wenn sie ein gleichförmiges Gemenge bilden. Nach der bisherigen Theorie, wo homogene Gastheile abstossend auf einander wirken, werden die Molecüle des einen durch diese Kraft in die Zwischenräume des andern hineingedrückt. Viel natürlicher ist aber die Erklärung nach der mechanischen Wärmetheorie. Bei dem nach allen Richtungen statthabenden Fortschiessen der Gasmolecüle und den unzähligen Zusammenstössen, wo sie wieder nach allen Richtungen zurückgeworfen werden, muss wohl der Finalzustand in einer gleichförmigen Mengung beider Gase bestehen und dieser Zustand kann nicht ein vorübergehender sein, sondern muss Permanenz haben.

Es gibt feste Körper, welche ein Gas nicht in Masse, sondern nur in einzelnen Molecülen durch ihre Zwischenräume gehen lassen, die sonach im Kleinen einer Pforte ähnlich sind, durch welche nur eine Person nach der andern, nicht deren mehrere zugleich gelangen können. Künstlich comprimirter Graphit in dünnen Platten, Gypsmörtel, Kalk, gebrannter Thon sind solche Körper.

Will man dieses merkwürdige, erst in neuester Zeit von Graham näher gewürdigte Verhalten aus den bisherigen Vorstellungen über die Natur der Gase erklären, so muss man annehmen, dass die Molecüle Stück für Stück durch die Poren gedrückt werden; nach der neuen Theorie werden sie wie abgeschossene Pfeile durch dieselben getrieben. Das Gesetzliche dieser Vorgänge spricht aber entschieden zu Gunsten der letzteren. Die Grösse des Gasvolums, welches in einer Zeiteinheit durch die Poren in einen leeren Raum übergeht, steht im Zusammenhange mit der Geschwindigkeit, welche die neue Gastheorie den Molecülen beilegt. Dieses Volumen ist grösser bei Kohlensäuregas als bei Sauerstoffgas, bei diesem grösser als bei Stickgas, am grössten bei Wasserstoffgas, gerade so wie es die molecularen Geschwindigkeiten der Gase verlangen. Ist das im Gas enthaltene, durch eine Graphitplatte geschlossene Gefäss von einem andern Gase umgeben, so treten die Molecüle der beiden Gase durch die Poren der Platte aus und ein. Haben diese Gase nahe eine gleiche moleculare Geschwindigkeit, wie z. B. Kohlenoxydgas und Stickgas, so findet ein Austausch ohne Volumenänderung Statt; bei Gasen von ungleicher molecularer Geschwindigkeit tritt eine solche Gleichheit nicht mehr ein, ungeachtet sie mit gleichen

Kräften auf die Platte drücken. Diese Gesetze spielen ohne Zweifel in der organischen Natur eine hervorragende Rolle, und es muss für die Physiologen der theoretische Zusammenhang der diesfälligen Thatsachen ebenso lehrreich sein, wie die Thatsachen selbst.

Ungeachtet sich die neue Theorie der Gase durch die Leichtigkeit empfiehlt, mit der sie die wichtigsten und sonst nur ärmlich theoretisch begründeten Gesetze der Wärme erklärt, so hat man ihr doch Erscheinungen entgegengestellt, die sie mit einem Schlag zu vernichten drohten. Unter diesen besteht die wichtigste darin, dass sich, wenn den Gasmolecülen eine so grosse progressive Bewegung zukäme, in einer Gasmasse locale Ueberschüsse der Wärme sehr rasch ausgleichen müssten, während doch der Erfahrung gemäss eine solche Ausgleichung sehr langsam vor sich geht und Gase überhaupt sich als sehr schlechte Wärmeleiter darstellen. Allein ein näheres Eingehen in die Art und Weise, wie sich nach dem Geiste der mechanischen Wärmetheorie Wärmedifferenzen in einer Gasmasse ausgleichen, behebt nicht blos alles Gewicht dieses Einwurfes, sondern vindicirt unserer Theorie sogar einen neuen Vorzug, indem sie über ein bisher ganz dunkles Gebiet Licht verbreitet. Leitung der Wärme in einer Gasmasse bedeutet Uebertragung lebendiger Kraft von wärmeren Molecülen in minder warme. Diese würde bei der grossen Geschwindigkeit der Gasmolecüle in kurzer Zeit auf einer grossen Strecke eintreten, wenn die Bewegung in gerader Linie ungehindert fortgesetzt werden könnte. Es stosst aber jedes Molecül schon nach sehr kurzer Wegstrecke an ein anderes oder an die Gefässwand und wird dadurch zurückgeworfen, und zwar nach den verschiedensten Richtungen. Wenn ein wärmeres Molecül an ein minder warmes stosst, wird nicht etwa, wie bei der Fortpflanzung des Schalles der ganze Gehalt an lebendiger Kraft der zusammenstossenden Molecüle, sondern nur die Differenz desselben übertragen; bei einem Zusammenstosse nach so kurzer Wegstrecke würde auch nur wenig Wärme übertragen, selbst wenn der ganze Wärmeüberschuss vom wärmeren Molecüle in ein kälteres überginge. Aber wegen des Umstandes, dass jedes Molecül von anderen unter allen möglichen Neigungen der Centrallinie gegen die Stossrichtung getroffen wird, wird von dieser Differenz nur die Hälfte davon übertragen. Es wird sonach die Leistung der mit einem Stoss übertragenen Kraft nach einer grossen Anzahl von Uebertragungen auf ein sehr geringes Maass herabgesetzt und es bedarf einer ungemein grossen Anzahl von Uebertragungen, um eine merkliche Temperaturerhöhung hervorzubringen; um so

mehr, als auch unsere Instrumente, die zu solchen Messungen gebraucht werden, eine verhältnissmässig geringe Empfindlichkeit besitzen.

Wenn auch die Wärmeleitung in Gasen nur gering ist, so können Gase doch nicht als Nichtleiter angesehen werden, wie man dieses noch vor Kurzem annehmen zu müssen glaubte, ja es geht aus der Theorie hervor, dass die molecularen Geschwindigkeiten von jedem Gase Anhaltspunkte liefern, sie nach ihrer Leitungsfähigkeit zu ordnen. Wasserstoffgas zeigt sich nach der Theorie als der beste Leiter, und dieses ist bereits auch durch die neuesten Versuche ausgemittelt; die übrigen Gase folgen aber nach der Theorie erst in ziemlich grossem Abstande und unterscheiden sich von einander in Bezug ihres Leitungsvermögens nur wenig. Neuere Versuche stehen auch hiemit im Einklange.

Zum Schlusse möge es mir noch gestattet sein, die verschiedenen Wärme-Erzeugungs-Processe nach der mechanischen Wärmetheorie zu deuten und zu zeigen, dass sie sich auf eine gemeinschaftliche Quelle zurückführen lassen, nämlich auf Umwandlung von Arbeit in Wärme, d. h. von Massenbewegung in Molecularbewegung, auf ein Princip, das durch zahlreiche Versuche ausser Zweifel gestellt ist. Die Wärmestofftheorie ist in dieser Angelegenheit völlig rathlos geblieben.

Eine der ergiebigsten Quellen der Wärme ist bekanntlich die Reibung. Wird ein Wagen auf horizontalem Boden fortgezogen, wo sein Gewicht nicht überwältigt zu werden braucht, so fordert er doch wegen der stattfindenden Reibung dazu einen bestimmten Kraftaufwand, ja sogar einen dauernden, obwohl der Wagen mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegt wird. Es geht sonach Kraft verloren, dafür aber wird Wärme theils an den Axen der Räder, theils zwischen dem Boden und den Radkränzen erzeugt. Gestatten es die Umstände, die verlorene Kraft mit der erzeugten Wärme zu vergleichen, so findet man, dass jeder verlorenen Krafteinheit ein Gewinn von $\frac{1}{424}$ einer Wärmeeinheit entspricht. Diese Wärmequelle zeigt sich überall wirksam, wo lebendige Kraft plötzlich in ihrer Wirkung gehemmt oder verkümmert wird. Wenn man Quecksilber mehrmal von einem Glase in ein anderes überschüttet, und daher plötzlich von Bewegung in Ruhe überführt, so erscheint es etwas wärmer. Das Wasser des Niagara soll am grossen Fall nach dem Sturze etwas wärmer sein als vor demselben, und selbst im Ocean will man bemerkt haben, dass das Wasser durch einen Sturm etwas erwärmt wird.

Ein Schlag, Stoss, anerkannt bewährte Mittel Wärme zu er-

zeugen, wirken auf dieselbe Weise. Ein Hammer verliert im Augenblicke, wo sein Schlag trifft, seine Bewegung und die gestossene Masse wird erwärmt. Ein Druck wirkt in derselben Weise. In den englischen Stahlfabriken, so erzählt Liebig, erhitzt ein Schmied eine 10—12 Zoll lange Stahlstange an einem Ende in einer Esse bis zum Rothglühen, bringt sie dann unter den Maschinenhammer und streckt sie auf ebenso viel Fuss Länge aus, ohne sie abermals in's Feuer zu bringen. Die Stelle, welche der Hammer trifft, wird rothglühend, so dass dem Zuschauer die Glühhitze der Stange entlang hin und her zu laufen scheint, so wie die geschlagene Stelle wechselt. Die Häufigkeit der Schläge, von denen jeder mit Verlust lebendiger Kraft verbunden ist, steht mit der Menge der genannten Wärme im Einklange.

Ein Körper, der nach einem erlittenen Schlage sich wieder zum früheren Volumen ausdehnt, erfährt keine Erwärmung, weil Umsetzung lebendiger Kraft in Wärme beim Schlage und der umgekehrte Vorgang bei der Ausdehnung sich gegenseitig aufheben.

Die Erwärmung durch Sonnenstrahlen ist bereits aus einer Uebertragung lebendiger Kraft von Aetherwellen an ponderable Molecüle erklärt worden. Es erscheint hier der Aether als der wahre Prometheus, der das Feuer vom Himmel nimmt und es der Erde überbringt.

Ueber den Ursprung der Wärme bei chemischen Processen sind die Naturforscher von jeher im Dunkel gewesen, doch ist auch hier einige Helle von der mechanischen Wärmetheorie ausgegangen. Chemische Verbindungen nämlich werden durch die den Atomen inhärirenden anziehenden Kräfte bewirkt. Im Sinne der mechanischen Wärmetheorie besteht aber diese Wirkung in einer Zusammensetzung von Atomenbewegungen zu einer Resultirenden. Nimmt man diese Bewegungen als drehende an, deren Bahnhalbmesser und Winkelgeschwindigkeit mit der Natur der Atome wechseln, in einem homogenen Producte aber für alle Atome gleich sind; so tritt in Folge der Ausgleichung der Winkelgeschwindigkeiten ein Verlust an lebendiger Kraft ein, der sich in einem mathematischen Ausdruck darstellen lässt. Die chemische Anziehung wirkt also wie ein von Aussen angebrachter Druck und muss daher auch dieselbe Folge haben wie ein solcher. Die Grösse des vorerwähnten Verlustes an lebendiger Kraft findet man wenigstens für Mischungen von Schwefelsäure und Wasser der dabei frei werdenden Wärme proportional.

Mein Vortrag, dem nun nicht Mangel an Stoff, sondern nur Mangel an Zeit eine Grenze setzt, hatte zum Zweck, zu zeigen, wie allen Erscheinungen und Gesetzen der Wärme Bewegungen

der kleinsten Körpertheile zum Grunde liegen, sonach zwischen Schall, Licht und Wärme sehr nahe Verwandtschaft bestehe. Dabei bleibt aber die Eigenthümlichkeit jedes der genannten Agentien vollkommen gewahrt. Die Molecularbewegungen, die wir als Schall, Licht und Wärme empfinden, gehen wohl insgesammt von ponderabler Materie aus, können aber von mannigfaltigster Art, drehende, hin- und hergehende, in Stössen erfolgende etc. sein, wenn nur ihre Geschwindigkeit in Mehr und Weniger gewisse Grenzen einhält. Soll aber durch das Gehör nicht blos ein Geräusch oder Poltern, sondern ein Ton von angebbarer Höhe, durch den Gesichtssinn nicht blos ein unbestimmter Schein, sondern Licht von bestimmter Farbe, durch das Gefühl nicht blos ein Druck, Stoss, ein Kitzeln, Jucken, Brennen etc., sondern Wärme empfunden werden, so muss derselbe Bewegungszustand der Molecüle des schallenden, leuchtenden oder wärmenden Körpers in bestimmten, kurzen und gleichen Zeitabschnitten wiederkehren, sonach die Bewegung eine regelmässig periodische sein.

Das Mittel, welches den Schall in die Ferne trägt, ist in der Regel die Luft, das Vehikel des Lichtes und der Wärme der Aether und die Bewegung ist in allen diesen Fällen eine wellenartige. Die Lufttheile bewegen sich in der Richtung des entsprechenden Schallstrahles, die Aethertheile hingegen senkrecht auf die Richtung des Licht- oder Wärmestrahles. Die Dauer einer Schwingung der Luft bestimmt die Tonhöhe, jene einer Aetherschwingung in der Lichtwelle die Farbe, in der Wärmewelle den Grad ihrer Gefügigkeit für die Einwirkung der wägbaren Molecüle auf den Aether.

Jedes dieser Medien gibt den Impuls an den Nerv ab, der für denselben empfänglich ist, und dieser leitet ihn an das Centrum des Nervensystems, wo er in Empfindung eigener Art umgesetzt, gleichsam in eine andere Sprache übertragen wird.

Alles, was hierbei Bewegung ist, gehorcht den Gesetzen der Mechanik, mag es sich auf Weltkörper oder auf Aetheratome beziehen, das Ohr bedarf keines Schallstoffes mehr, wie er in ferner Vergangenheit für nöthig erachtet wurde, das Auge hat den Lichtstoff, das Gefühlsorgan den Wärmestoff seiner Dienste enthoben. Dabei ist das Gebäude der Physik geräumiger und fester geworden, sein Inneres ist mehr erhellt, der ganze Bau in einem mehr harmonischen Style ausgeführt. Allein auch die herrlichsten Paläste bedürfen mit der Zeit eines Zu- oder gar Umbaues und diesem Lose wird auch unsere Wissenschaft nicht entgehen. Sie wird aber durch jede Umstaltung vollendeter werden, so lange ihr der grosse Architekt, die Mathematik, hilfreich zur Seite steht.

XXIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn F. Unferdinger, Professor der Mathematik an der Oberrealschule am Bauernmarkte in Wien.

1. Zieht man von einem festen Punkte nach beliebigen Punkten eines Kreises gerade Linien, so liegen die Mittelpunkte aller dieser Strecken in der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser halb so gross ist, als der des gegebenen Kreises, und dessen Mittelpunkt auf der Mitte der Strecke liegt vom festen Punkte bis zum Mittelpunkte dieses letzteren Kreises.

2. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen eines gegebenen Kreises, welche durch einen festen Punkt gehen, ist ein Kreis, welcher die Verbindungslinie des festen Punktes mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises zum Durchmesser hat.

Man kann auch Kugeln an die Stelle der Kreise setzen.

3. Bezeichnen A, B, C und a, b, c die Winkel und Seiten eines geradlinigen Dreiecks, so ist bekanntlich:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Vermehrt man jeden der drei Winkel A, B, C um 60^0, so sind die Ausdrücke

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60^0),$$
$$a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60^0),$$
$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^0)$$

immer einander gleich.

XXIV.

Miscellen.

Lehrsätze über das sphärische Dreieck.

Von Herrn F. Unferdinger, Professor der Mathematik an der Oberrealschule am Bauernmarkte in Wien.

1) Sind die drei Seiten eines sphärischen Dreieckes je kleiner als 180°, so ist die Summe der Sinus zweier Seiten immer grösser als der Sinus der dritten und die Summe der Sinus zweier Winkel immer grösser als der Sinus des dritten Winkels, oder es ist immer:

$$\operatorname{Sin} a + \operatorname{Sin} b > \operatorname{Sin} c, \quad \operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B > \operatorname{Sin} C.$$

2) Ist der Umfang eines Dreieckes grösser oder kleiner als 180°, so ist immer beziehungsweise:

$$\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} A + \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} B + \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} C \lessgtr 2;$$

ist $a + b + c = 180^0$, so wird diese Summe gleich 2.

3) Ist die Summe der Winkel eines Dreieckes kleiner oder grösser als 360°, so ist immer beziehungsweise:

$$\operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} a + \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} b + \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} c \lessgtr 2;$$

ist $A + B + C = 360^0$, so wird diese Summe gleich 2.

Lehrsatz von der dreiseitigen Pyramide.

Von Herrn F. Unferdinger, Professor der Mathematik an der Oberrealschule am Bauernmarkte in Wien.

Sind in einer dreiseitigen Pyramide die Scheitelkanten einander gleich und ist die Summe der Flächenwinkel der Scheitel-

ecke 360°, so ist die Summe der Quadrate der Basiskanten gleich dem achtfachen Quadrate der Seitenkanten, oder es ist:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8s^2,$$

wenn a, b, c, s die Basiskanten und die Seitenkante bezeichnen.

Bemerkung über das ebene Dreieck.

Von dem Herausgeber.

Wenn in dem Dreieck ABC (Taf. IV. Fig. 7.) der Winkel A doppelt so gross ist als der Winkel B, so ist immer

$$a^2 = b(b+c)$$

oder

$$b:a = a:b+c,$$

d. h. a ist die mittlere Proportionale zwischen b und $b+c$.

Um dies zu beweisen, halbire man den Winkel A durch die Linie AD, so sind in dem Dreiecke ABD die Winkel an der Seite c einander gleich, und dasselbe ist folglich ein gleichschenkliges Dreieck, also $AD = BD$. Der Winkel ADC ist als Aussenwinkel dieses gleichschenkligen Dreiecks doppelt so gross als der Winkel B, und das Dreieck ACD ist folglich offenbar dem Dreiecke ABC ähnlich, woraus sich die Proportion

1) . . . . $a:c = b:y$

ergiebt. Nach einem anderen bekannten Satze ist aber

$$b:c = x:y,$$

also

$$b:c = a-y:y,$$

und folglich:

2) . . . . $b+c:c = a:y$.

Aus den beiden Proportionen 1) und 2) ergiebt sich:

$$y = \frac{bc}{a} = \frac{ac}{b+c},$$

also:

$$a^2 = b(b+c),$$

w. z. b. w.

Es frägt sich nun, ob sich dieser Satz auch umkehren, d. h. ob sich behaupten lässt, dass unter der Voraussetzung

$$a^2 = b(b+c)$$

jederzeit im Dreieck ABC der Winkel A doppelt so gross als der Winkel B sein muss.

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir zuerst die in dem Dreieck ABC (Taf. IV. Fig. 8.) den Winkel A halbirende Linie u durch die Seiten des genannten Dreiecks ausdrücken. In den Dreiecken ABD und ACD ist:

$$\cos BAD = \frac{c^2+u^2-y^2}{2cu}, \quad \cos CAD = \frac{b^2+u^2-x^2}{2bu};$$

also, weil die Winkel BAD und CAD nach der Construction einander gleich sind:

$$\frac{b^2+u^2-x^2}{b} = \frac{c^2+u^2-y^2}{c},$$

folglich:

$$bc(b-c) - cx^2 + by^2 = (b-c)u^2.$$

Weil aber bekanntlich:

$$b:c = x:y = x:a-x,$$

$$c:b = y:x = y:a-y;$$

also:

$$b:b+c = x:a,$$

$$c:b+c = y:a$$

ist; so ist:

$$x = \frac{ab}{b+c}, \quad y = \frac{ac}{b+c};$$

folglich:

$$cx^2 - by^2 = \frac{a^2b^2c}{(b+c)^2} - \frac{a^2bc^2}{(b+c)^2} = \frac{a^2bc(b-c)}{(b+c)^2}.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$bc(b-c) - \frac{a^2bc(b-c)}{(b+c)^2} = (b-c)u^2,$$

also:

$$u^2 = bc\left\{1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right\} = \frac{bc\{(b+c)^2-a^2\}}{(b+c)^2},$$

und folglich:

$$u=\frac{\sqrt{bc\{(b+c)^2-a^2\}}}{b+c},$$

oder:

$$u=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}.$$

Nehmen wir nun an, dass in dem Dreieck ABC (Taf. IV. Fig. 9.) die Relation:

$$a^2=b(b+c)$$

Statt finde. Man halbire den Winkel A durch die Linie AD; dann ist nach einem bekannten Satze:

$$b:c=x:y=a-y:y,$$

$$b+c:c=a:y;$$

also:

$$3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y=\frac{ac}{b+c}.$$

Nach dem vorher Bewiesenen ist:

$$u^2=\frac{bc\{(b+c)^2-a^2\}}{(b+c)^2},$$

und weil nun, in Folge der Voraussetzung,

$$a^2=b(b+c)$$

ist, so ist:

$$u^2=\frac{bc\{(b+c)^2-b(b+c)\}}{(b+c)^2}=\frac{bc^2}{b+c},$$

also, weil, wieder in Folge der Voraussetzung:

$$b=\frac{a^2}{b+c}$$

ist:

$$u^2=\frac{a^2}{b+c}\cdot\frac{c^2}{b+c}=\frac{a^2c^2}{(b+c)^2},$$

folglich:

$$4) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u=\frac{ac}{b+c}.$$

Nach 3) und 4) ist $u=y$, oder $AD=BD$, und daher ABD ein gleichschenkliges Dreieck, folglich:

$$\angle BAD = \angle ABD,$$

woraus, weil $\angle BAC$ durch die Linie AD halbirt worden, sich unmittelbar ergiebt, dass

$$\angle BAC = 2.\angle ABC$$

oder $A = 2B$ ist.

Man sieht also, dass der zuerst bewiesene Satz sich in der That auch umkehren lässt; es frägt sich aber, ob sich dies nicht auf eine weit einfachere Art wie vorher beweisen lässt, was ich jetzt hier nicht weiter untersuchen will, da ich das Obige nur als Stoff zu einer einfachen Uebung für Schüler ansehe und die vorstehende Mittheilung auch nur aus diesem Gesichtspunkte zu betrachten bitte.

Trigonometrische und geometrische Elementarsätze.

Von dem Herausgeber.

In den Elementen der ebenen Trigonometrie scheint mir ein Satz oder eine einfache Formel zu fehlen oder wenigstens noch nicht genug Berücksichtigung gefunden zu haben, von denen sich öfters fruchtbare Anwendungen machen lassen. Wenn nämlich in einem ebenen Dreiecke zwei Seiten und die, den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel halbirende Gerade gegeben sind: so kann aus diesen gegebenen Stücken der in Rede stehende Winkel leicht gefunden, also das Dreieck überhaupt berechnet werden.

In dem Dreieck ABC (Taf. IV. Fig. 10.) sei der Winkel C durch die Gerade CD halbirt, so ist nach bekannten Sätzen:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC.CD.\cos\tfrac{1}{2}C,$$
$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.\cos\tfrac{1}{2}C$$

und:

$$AD:BD = AC:BC,$$

also:

$$AD.BC = BD.AC, \quad AD^2.BC^2 = BD^2.AC^2;$$

folglich nach dem Obigen:

$$BC^2.(AC^2 + CD^2 - 2AC.CD.\cos\tfrac{1}{2}C)$$
$$= AC^2.(BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.\cos\tfrac{1}{2}C),$$

woraus sich leicht:

$$(AC^2-BC^2).CD^2=2AC.BC.CD.(AC-BC).\cos\tfrac{1}{2}C,$$

also, unter der Voraussetzung, dass nicht $AC=BC$ ist:

$$(AC+BC).CD=2AC.BC.\cos\tfrac{1}{2}C,$$

und folglich:

$$1) \ldots\ldots \cos\tfrac{1}{2}C=\tfrac{1}{2}CD.\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}\right)$$

ergiebt.

Wenn $AC=BC$ und das Dreieck ABC also ein gleichschenkliges ist, wo sich durch $AC-BC=0$ nicht, wie vorher geschehen, dividiren lässt, wird die vorstehende Formel:

$$\cos\tfrac{1}{2}C=\tfrac{1}{2}CD.\frac{2}{AC}=\tfrac{1}{2}CD.\frac{2}{BC}=\frac{CD}{AC}=\frac{CD}{BC},$$

wie es in diesem Falle offenbar sein muss, da unter der gemachten Voraussetzung ACD und BCD bei D rechtwinklige Dreiecke sind. Also gilt die Formel 1) auch in dem Falle eines gleichschenkligen Dreiecks und ist daher allgemein gültig. Mittelst dieser Formel kann man aus AC, BC, CD den Winkel C leicht ohne alle Zweideutigkeit berechnen, und dann also das Dreieck ABC überhaupt auflösen.

In dem Archiv *) und auch anderwärts ist in neuerer Zeit vielfach der folgende geometrische Lehrsatz discutirt worden:

Wenn in dem Dreiecke ABC (Taf. IV. Fig. 11.) die Linien AD und BE, von denen die Winkel BAC und ABC halbirt werden, einander gleich sind: so ist das Dreieck ABC gleichschenklig, nämlich $AC=BC$.

Mittelst der Formel 1) lässt sich dieser Satz sehr leicht auf folgende Art beweisen. Bezeichnen wir der Kürze wegen die Winkel BAC und ABC bloss durch A und B; so ist nach 1):

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\tfrac{1}{2}AD.\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}\right),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B=\tfrac{1}{2}BE.\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}\right);$$

also, weil nach der Voraussetzung $AD=BE$ ist, durch Division:

---

*) M. s. z. B. Thl. IV. S. 330. — XI. 444. — XIII. 337. — XIII. 341. — XV. 221. — XV. 351. — XV. 358. — XVI. 259. — XVIII. 357. — XX. 459. — XLI. 151.

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}B}=\frac{\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}}{\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}}.$$

Wäre nun nicht $A=B$, also etwa $A>B$, so wäre $\frac{1}{2}A>\frac{1}{2}B$, und folglich, weil $\frac{1}{2}A$ und $\frac{1}{2}B$ immer spitze Winkel sind, $\cos\frac{1}{2}A<\cos\frac{1}{2}B$; also nach dem Obigen:

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}<\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC},$$

folglich:

$$\frac{1}{AC}<\frac{1}{BC}, \text{ also } AC>BC.$$

Es wäre folglich:

$$A>B,\quad BC<AC;$$

was ungereimt ist, weil nach einem bekannten Elementarsatze:

$$A>B,\quad BC>AC$$

ist. Also ist $A=B$, woraus alles Uebrige ohne Weiteres folgt.

Leicht kann man diesem Beweise auch eine rein geometrische, von trigonometrischen Formeln unabhängige Gestalt geben, wo sich aber die Sache allerdings bei Weitem nicht so einfach wie vorher gestaltet. In Taf. IV. Fig. 12., wo wieder CD den Winkel ACB halbirt, fälle man von A und B auf CD oder seine Verlängerung die Perpendikel AE und BF; dann ist nach einem bekannten geometrischen Satze *):

$$AD^2=AC^2+CD^2-2CD.CE,$$
$$BD^2=BC^2+CD^2-2CD.CF;$$

und nach einem anderen bekannten Satze ist:

$$AD:BD=AC:BC,$$
$$AD.BC=BD.AC,\quad AD^2.BC^2=BD^2.AC^2;$$

also nach dem Obigen:

$$BC^2.(AC^2+CD^2-2CD.CE)=AC^2.(BC^2+CD^2-2CD.CF),$$
$$(AC^2-BC^2).CD^2=2CD.(AC^2.CF-BC^2.CE),$$
$$(AC^2-BC^2).CD=2(AC^2.CF-BC^2.CE).$$

---

*) M. s. mein Lehrbuch der ebenen Geometrie. **Fünfte Auflage.** Brandenburg 1862. §. 172. Bemerkung. S. 88.

Weil die Winkel ACE und BCF einander gleich sind, so sind die rechtwinkligen Dreiecke ACE und BCF einander ähnlich, und es ist also:

$$AC:CE = BC:CF,$$
$$AC.CF = BC.CE;$$

folglich nach dem Obigen:

$$(AC^2 - BC^2).CD = 2AC.CF.(AC-BC)$$
$$= 2BC.CE.(AC-BC),$$

und daher, wenn nicht $AC=BC$ ist:

$$(AC+BC).CD = 2AC.CF = 2BC.CE,$$

$$\tfrac{1}{2}CD.\frac{AC+BC}{AC.BC} = \frac{CF}{BC} = \frac{CE}{AC}$$

oder:

$$2) \ldots\ldots \tfrac{1}{2}CD.\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}\right) = \frac{CF}{BC} = \frac{CE}{AC}.$$

Wenn $AC=BC$ ist, so ist offenbar $CE=CF=CD$, und die vorstehende Gleichung wird also in diesem Falle:

$$\tfrac{1}{2}CD.\frac{2}{AC} = \frac{CD}{AC}, \quad \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{AC};$$

folglich eine Identität, woraus sich ergiebt, dass die Gleichung 2) auch noch für $AC=BC$ gilt, und daher allgemein gültig ist.

In Taf. IV. Fig. 13. seien jetzt wieder die Linien AD und BE, welche die Winkel BAC und ABC halbiren, einander gleich, und von A und B seien auf BE und AD die Perpendikel AF und BG gefällt. Dann ist nach 2):

$$\tfrac{1}{2}AD.\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}\right) = \frac{AG}{AB},$$
$$\tfrac{1}{2}BE.\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}\right) = \frac{BF}{AB};$$

also, weil nach der Voraussetzung $AD=BE$ ist, durch Division:

$$\frac{AG}{BF} = \frac{\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}}{\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}}.$$

Wäre nicht $AG=BF$, etwa $AG > BF$, so wäre:

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}>\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC},$$

also:

$$\frac{1}{AC}>\frac{1}{BC}, \text{ folglich } AC<BC;$$

und nach einem bekannten Elementarsatze wäre also:

$$\angle A>\angle B,\ \tfrac{1}{2}\angle A>\tfrac{1}{2}\angle B;$$

d. i. $\angle BAG>\angle ABF$.

Denkt man sich nun über AB als Durchmesser einen Halbkreis beschrieben, so geht derselbe bekanntlich durch F und G. Dreht man das Dreieck ABF um und legt es in den Halbkreis wieder hinein, so dass es, weil nach dem so eben Bewiesenen $\angle ABF<\angle BAG$ ist, in die Lage ABF' (Taf. IV. Fig. 14.) kommt, wo also $AF'=BF$, $BF'=AF$ ist; so ist nach dem Obigen $AF'<AG$, da doch nach einem bekannten Satze vom Kreise (Eucl. Elem. Lib. VIII. Prop. VII.) $AF'>AG$ ist. Folglich ist $AG=BF$ (Taf. IV. Fig. 13.), daher sind die rechtwinkligen Dreiecke ABG und ABF einander congruent, also die Winkel BAG und ABF einander gleich, folglich

$$\tfrac{1}{2}\angle BAC=\tfrac{1}{2}\angle ABC,$$

also auch $\angle BAC=\angle ABC$, woraus alles Uebrige ohne Weiteres folgt.

Eine ähnliche Formel wie 1) kann man auch für das sphärische Dreieck entwickeln. In Taf. IV. Fig. 15. sei der Winkel C durch CD halbirt, so ist in den sphärischen Dreiecken ACD und BCD nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos AD=\cos b\cos d+\sin b\sin d\cos\tfrac{1}{2}C,$$
$$\cos BD=\cos a\cos d+\sin a\sin d\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Ferner ist:

$$\sin a:\sin BD=\sin BDC:\sin\tfrac{1}{2}C,$$
$$\sin b:\sin AD=\sin ADC:\sin\tfrac{1}{2}C;$$

also, weil

$$\sin ADC=\sin BDC$$

ist:

$$\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{\sin BD}{\sin AD};$$

folglich:

$$\sin a^2 \sin \overline{AD}^2 = \sin b^2 \sin \overline{BD}^2.$$

Daher hat man nach dem Obigen die folgende Gleichung:

$$\sin a^2 \{1 - (\cos b \cos d + \sin b \sin d \cos \tfrac{1}{2}C)^2\}$$
$$= \sin b^2 \{1 - (\cos a \cos d + \sin a \sin d \cos \tfrac{1}{2}C)^2\},$$

also, wenn man die Quadrate entwickelt und aufhebt, was sich aufheben lässt, wie man leicht findet:

$$\sin a^2 - \sin b^2 - (\sin a^2 \cos b^2 - \cos a^2 \sin b^2) \cos d^2$$
$$= 2 \sin a \sin b \sin d \cos d \sin (a - b) \cos \tfrac{1}{2}C.$$

Nach bekannten Formeln ist aber:

$$\sin a^2 - \sin b^2 = (\sin a + \sin b)(\sin a - \sin b)$$
$$= \sin (a + b) \sin (a - b),$$

$$\sin a^2 \cos b^2 - \cos a^2 \sin b^2 = (\sin a \cos b + \cos a \sin b)(\sin a \cos b - \cos a \sin b)$$
$$= \sin (a + b) \sin (a - b);$$

also, wenn man zugleich mit $\sin d \sin (a - b)$ dividirt, nachdem man $1 - \cos d^2 = \sin d^2$ gesetzt hat:

$$\sin (a + b) \sin d = 2 \sin a \sin b \cos d \cos \tfrac{1}{2}C,$$

woraus:

$$3) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \cos \tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} d \frac{\sin (a + b)}{\sin a \sin b},$$

oder:

$$4) \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \cos \tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} d (\cot a + \cot b),$$

oder auch:

$$5) \;.\;.\;.\;.\;. \quad \cos \tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} d \left(\frac{1}{\operatorname{tang} a} + \frac{1}{\operatorname{tang} b}\right),$$

welche Formel der Formel 1) analog ist.

Für $a = b$ wird die Gleichung 5):

$$\cos \tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} d \cdot \frac{2}{\operatorname{tang} a} = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} d \cdot \frac{2}{\operatorname{tang} b},$$

also:

$$\cos \tfrac{1}{2}C = \frac{\operatorname{tang} d}{\operatorname{tang} a} = \frac{\operatorname{tang} d}{\operatorname{tang} b},$$

was nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie richtig ist, da im vorliegenden Falle die Dreiecke ACD und BCD offenbar bei D rechtwinklig ist. Also gilt die Formel 5) auch für $a=b$, und daher allgemein.

Schreiben des Herrn Professor Lobatto in Delft an den Herausgeber.

Delft 9. Mars 1864.

Vous avez publié dans le 41. Thl. 1. Hft. de votre estimable journal une solution analytique du problème où il s'agit de déterminer le lieu géométrique des points milieux de toutes les cordes d'une ellipse passant par le même point.

Qu'il me soit permis de vous soumettre par la présente une autre solution assez simple de ce problème, et basée sur la théorie des projections. J'y suis parvenu de la manière suivante.

Considérons l'ellipse aux deux axes a, b comme la section d'un cylindre droit ayant pour base un cercle dont le diamètre soit égal au petit axe $2b$. Si α désigne l'inclinaison de cette section, l'on aura entre les trois quantités a, b, α la relation connue

$$b = a\cos\alpha.$$

Soit $AB=2b$ (Taf. V. Fig. 1.)*) la projection du grand axe sur la base du cylindre; P celle du point donné (f, g); les coordonnées OQ, PQ (O étant la projection du centre de l'ellipse) auront évidemment pour valeurs $f\cos\alpha$ et g ou $\frac{bf}{a}$ et g. Menons la droite PO, et soit MN la projection d'une corde quelconque tirée dans l'ellipse par le point donné. Si l'on observe maintenant que le pied de la perpendiculaire Om abaissée sur MN, détermine le point m, milieu de cette corde, et projection du point milieu de la corde correspondante dans l'ellipse; que d'ailleurs le lieu géométrique des points m sera une circonférence de cercle décrite sur OP comme diamètre, on en conclura immédiatement que les points milieux des cordes, tracées dans l'ellipse, seront situés sur une autre ellipse ayant cette circonférence pour projection, et dont les deux axes seront égaux à OP et $OP.\sec\alpha$. Les valeurs de ces axes sont faciles à calculer. En effet le triangle rectangle OPQ donne directement

---

*) Die Figur wird mit Taf. V. im nächsten Hefte nachgeliefert. G.

$$OP = \sqrt{\left\{\frac{b^2f^2}{a^2} + g^2\right\}} = b\sqrt{\left\{\frac{f^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2}\right\}}$$

et

$$OP.\sec\alpha = OP\cdot\frac{a}{b} = a\sqrt{\left\{\frac{f^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2}\right\}}.$$

Le centre de cette ellipse se projettera en p milieu de OP; ses coordonnées seront la moitié de celles du point P, donc dans l'ellipse même ce centre aura pour coordonnées $\frac{1}{2}f$ et $\frac{1}{2}g$. Quant à la direction du grand axe, il est évident qu'elle sera parallèle a celle du grand axe de la section elliptique, puisque sa projection, égale au petit axe, sera de même longueur que le diamètre PO; ce qui s'accorde entièrement avec les résultats que vous avez obtenu à l'endroit cité. Je saisis cette occasion de vous renouveller l'assurance de la considération très distinguée avec la quelle j'ai l'honneur d'être

Votre très humble serviteur
R. Lobatto.

Von Herrn Professor Strehlke in Danzig.

Herr Professor Strehlke in Danzig hat mir, übrigens nur ganz beiläufig, den folgenden Kettenbruch mitgetheilt, von dem ich in diesem Augenblicke nicht sogleich entscheiden kann, ob er in dieser Form schon anderwärts gegeben worden ist, ihn aber als weniger bekannt immerhin abdrucken lasse:

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{m}} = a + \cfrac{1}{2am + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2am + \cfrac{1}{2a + \ldots}}}}$$

G.

Berichtigungen.

Der Herr Verfasser der Abhandlung Nr. XVI.: „Ueber die cubischen Gleichungen“ hat nachträglich zu den derselben beigefügten Tabellen die folgenden Berichtigungen eingesandt, welche vor dem Gebrauch der Tabellen in denselben vorzunehmen ich recht sehr bitten muss.

S. 127. Z. 5. v. u. statt „$+27q$“ s. m. „$\pm 27q$.“

S. 130. Im Kopf der zweiten Hälfte der Tabelle, also oben rechts ganz am Ende, werde für $D=0{,}00$ gesetzt: $D=0{,}0$, die zweite 0 ist also zu streichen.

S. 131. Im Kopf der ersten Hälfte der Tabelle, also oben rechts vor dem starken Vertikalstrich werde für $D=0{,}00$ gesetzt: $D=0{,}0$. Die zweite 0 ist also zu streichen.

S. 134. Im Kopf der zweiten Hälfte der Tabelle, also oben rechts ganz am Ende, werde statt $D=0{,}000$ gesetzt: $D=0{,}0$. Die beiden letzten Nullen sind also zu streichen.

S. 140. In der dritten Spalte der ersten Hälfte der Tabelle Z. 21 und Z. 22 werde statt

099854 gesetzt: 99854
099979 99979

so dass also in beiden Zahlen die vordersten Nullen zu streichen sind. Ferner gehört zu den acht letzten Zahlen in derselben Spalte, also zu den Zahlen 100104 (incl.) bis 100980 (incl.) nicht $D=0{,}00$, sondern $D=0{,}0$, was leicht in der Tabelle bemerkt werden kann, aber wohl zu beachten ist.

S. 148. In dem Kopf der ersten Hälfte der Tabelle, in der dritten Spalte, ist statt „$D=2$,“ zu setzen: „$D=1$,“.

S. 149. In der mit D bezeichneten dritten Spalte der zweiten Hälfte der Tabelle ist statt der obersten Zahl „9548“ zu setzen: „3,9548“, also der in der Tabelle im Druck sich findenden Zahl links noch „3,“ beizufügen.

Wenn ich auch für vorstehende Berichtigungen, mit Ausnahme von ein Paar leicht zu bewerkstelligenden, eine Verantwortlichkeit nicht zu übernehmen habe und überdies dieselben sämmtlich sehr leicht vorzunehmen sind, so dass ein Umdruck der betreffenden Blätter nicht nothwendig schien: so bitte ich doch wegen derselben recht sehr um Verzeihung. Alle meine Bemühungen und Anordnungen sind darauf gerichtet, den Druck so fehlerfrei als nur irgend möglich herstellen zu lassen.

Grunert.

S. 73. in der ersten Zeile von oben muss es statt $x=\pm a.0{,}244\ldots.$ heissen: $x=\pm a.2{,}44$.

XXV.

Galileo Galilei.

Ein Vortrag, gehalten in Greifswald zur Erinnerung an seinen 300sten Geburtstag

von

Herrn Doctor *Johannes Streit*,
Gymnasiallehrer.

Hochgeehrte Versammlung!

Wenige Tage sind verflossen, seit von jenseits der Alpen die Kunde zu uns drang, dass man an den verschiedensten Orten Italiens das Gedächtniss eines Mannes gefeiert hat, auf den sein Vaterland mit Recht stolz sein darf. Am 18. Februar d. J. waren dreihundert Jahre vergangen, seit Galilei das Licht der Welt erblickte[1]). Vergleichen wir den Zustand der mathematischen Wissenschaften, zumal der Astronomie und der verschiedenen Gebiete der Physik, in welchem er dieselben vorfand, mit den reichen Erfolgen, die bei seinem Tode, grossentheils durch sein Verdienst, in allen Theilen derselben erlangt waren, so wird man ihm den Namen eines Reformators der Wissenschaften nicht versagen können und die gerechte Bewunderung begreifen, welche ihm nicht blos von seinen Zeitgenossen zu Theil ward, die er noch heute überall da findet, wo man die Bestrebungen und Leistungen eines Pythagoras und Archimedes, eines Kepler und Newton, und so vieler anderer hochbegabter Männer zu würdigen versteht. Aber wenn wir Galilei auch nicht alle die glänzenden Entdeckungen verdankten, die er am Himmel und auf Erden gemacht hat, das Schicksal, welches ihm in seinem Alter sein Eintreten für die Wahrheit, für das Recht der freien Forschung bereitete, wird ihm einen dauernden Platz in der Geschichte der Menschheit und die Theilnahme fühlender Herzen für alle Zeiten sichern. Gestatten Sie mir, Ihnen das Lebensbild dieses Mannes uud sein Wirken in der Wissenschaft, so weit es mir nach Maassgabe meiner Kräfte möglich ist, heute vorzuführen.

Galileo Galilei[2]) wurde am 18. Februar 1564, an demselben Tage und fast in derselben Stunde, in welcher Michelangelo zu Rom seinen Geist aushauchte, in Pisa geboren, wo seine Eltern sich Geschäfte halber aufhielten. Sein Vater, Vincenzo Galilei, der als theoretischer Musiker durch eine Abhandlung über die antike und moderne Musik sich einen geachteten Namen erworben hat, stammte aus einer edlen aber verarmten florentinischen Familie, seine Mutter, Guilia Ammannati di Pescia, gehörte ebenfalls einem edlen florentinischen Hause an. Galileo war der älteste unter seinen Geschwistern; ein jüngerer Bruder, Michelangelo, der später als Musiker in München lebte, nahm wiederholt Galilei's Unterstützung in Anspruch, sowie ihm auch, nach dem 1591 erfolgten Tode des Vaters, die Sorge für die Ausstattung seiner Schwestern zufiel.

Seine Jugendjahre verlebte Galilei in Florenz; schon als Knabe zeigte er Vorliebe und grosses Geschick für Mechanik. Er verfertigte Modelle zu Mühlen, Galeeren und Maschinen aller Art, wobei er die ihm zu Gebote stehenden geringen Hülfsmittel mit grossem Geschick zu verwerthen wusste. Sein Vater bestimmte ihn für den Handelsstand, liess ihn aber doch im Lateinischen und in der Logik unterrichten; an dieser fand er wenig Geschmack, in jenem überflügelte er bald seinen Lehrer, arbeitete nun auf eigene Hand weiter und wandte sich auch dem Griechischen zu. Aus seinem eifrigen Studium beider klassischer Sprachen erwuchs wohl zumeist jener glänzende Stil, dem später seine akademischen Vorträge einen Theil ihrer Erfolge verdankten, den wir noch heute in seinen Schriften bewundern, und der ihn, nach dem eigenen Urtheil der Italiäner, den besten Prosaisten, einem Machiavelli und andern, würdig an die Seite stellt. Auch in der Musik und Malerei machte er sehr rasche Fortschritte und bildete seinen Geschmack in dem Maasse aus, dass noch später bedeutende Maler seinen Rath, namentlich in der Lehre von der Perspective, einzuholen nicht verschmähten. Diese vielseitige Entwickelung seiner Talente liess den Vater seinen Entschluss ändern und ihn für das Studium der Medicin bestimmen. Siebenzehn Jahre alt bezog Galilei die Universität Pisa, wo damals alle Professoren Anhänger des Aristoteles waren; nur Mazzoni trug die Lehren der Pythagoräer vor. An ihn schloss sich Galilei an und lernte aus seinem Munde, was man damals von der Physik wusste.

In diese Zeit seiner medicinischen Studien verlegt man gewöhnlich seine Entdeckung des Isochronismus der Pendelschwingungen. Er befand sich nämlich eines Tages im Dom zu Pisa, als er bemerkte, dass eine von der Decke herabhängende Lampe

sich hin- und herbewegte, und dass die Schwingungen, mochten sie gross oder klein sein, jedesmal in gleichen Zeiten zu erfolgen schienen. Diese Bemerkung wurde die Grundlage zur Entdeckung der Gesetze, nach welchen die Pendelschwingungen vor sich gehen. Galilei machte sogleich eine Anwendung auf die Medicin, indem er seine Entdeckung zur Bestimmung der Puls-Frequenz benutzte; unter dem Namen pulsilogium wurde sie zuerst 1603 von Santorius veröffentlicht; doch spricht Galilei schon in einem Briefe vom 29. November 1802 ausführlich über das Gesetz der Pendelbewegung und die Versuche, welche dasselbe bestätigen.

Während seines zweiten Studienjahres führte ihn ein Zufall den mathematischen Wissenschaften zu, in denen er später so Grosses leisten sollte. Hören wir, was uns darüber aus seinem eigenen Munde durch Gherardini überliefert ist. Ein Bekannter seines Vaters, Abbé Ricci, der die grossherzoglichen Pagen in der Mathematik zu unterrichten hatte, siedelte mit dem Hofe nach Pisa über. Galilei beeilte sich, ihn aufzusuchen, fand ihn aber jedesmal beschäftigt, den Pagen die Elemente des Euclid zu erklären, in einem Saale, welchen Galilei nicht betreten durfte. Hinter der Thüre stehend lauschte er dem Vortrage, und der Gegenstand fesselte ihn in dem Maasse, dass er durch volle zwei Monate diese sonderbare Art, Unterricht zu nehmen, fortsetzte. Er hatte sich inzwischen einen Euclid verschafft, studirte fleissig auf eigene Hand und unter dem Vorwande, über einige schwierige Sätze seine Belehrung einholen zu wollen, entdeckte er sich endlich Ricci. Dieser nahm sich mit Wärme seiner an, erwirkte ihm von dem anfangs widerstrebenden Vater die Erlaubniss, sich ganz dem Studium der Mathematik zu widmen, und schenkte ihm die Werke des Archimedes. In diese vertiefte sich Galilei mit solchem Eifer und solcher Begeisterung, dass er fortan keinen andern Führer mehr haben wollte, und es aussprach, wer diesem folge, könne dreist am Himmel und auf Erden einherschreiten. An der Hand des grossen sicilischen Mathematikers machte er rasche Fortschritte; er vervollkommnete die Lehre vom Schwerpunkte fester Körper und trat bald mit bedeutenden Gelehrten seiner Zeit in Briefwechsel. Aber die Mittel seines Vaters reichten nicht mehr aus; der Grossherzog von Toscana verweigerte ihm eine nachgesuchte Unterstützung, und er musste die Universität verlassen, ohne den Doctorgrad erlangt zu haben. Die wiederholten Bemühungen seiner Freunde, ihm einen Lehrstuhl in Bologna zu verschaffen, schlugen fehl, und er durfte es noch als ein Glück ansehen, als er durch Vermittlung seines Gön-

ners, des Marchese del Monte, der ihn nur den Archimedes seiner Zeit nannte, im Jahre 1589, fünfundzwanzig Jahre alt, eine Anstellung als Lektor der Mathematik an der Hochschule zu Pisa mit einem Jahrgehalt von 60 Skudi erhielt, etwa 90 Thaler in unserm Gelde.

Die Vorlesungen, welche Galilei damals gehalten hat, sind nicht mehr vorhanden, man weiss aber, dass er in denselben offen gegen Aristoteles auftrat, dessen Autorität bis dahin fast allgemein als unumstösslich gegolten hatte. In diese Zeit fallen auch seine Versuche über den Fall schwerer Körper, zu denen er den schiefen Thurm zu Pisa benutzte, und die Entdeckung der Gesetze, nach welchen die Schwere auf alle Naturkörper wirkt. Es wird erzählt, dass die Professoren und Studenten, welche bei seinen Versuchen zugegen waren, ihn wiederholt mit Zischen empfangen hätten. Schon etwas früher hatte der Venetianer Benedetti den Satz aufgestellt, dass im leeren Raume Körper von verschiedener Masse mit gleicher Geschwindigkeit fallen; ähnliche Gedanken finden sich auch in den Abhandlungen von Moleti, Galilei's Vorgänger in seiner spätern Professur in Padua. Aber diese Priorität der Ansichten mindert nichts an Galilei's Verdienst; denn als Meinung ist dasselbe schon viel früher, nämlich im zweiten Buche des Lucrez ausgesprochen, und Galilei war der erste, der die Ergebnisse seiner theoretischen Untersuchungen durch Versuche bestätigte. Diese Entdeckungen bilden die Grundlage der ganzen Bewegungslehre. Sie wurden von Galilei nebst Untersuchungen über die Pendelschwingungen und über den Fall auf der schiefen Ebene in einem Werke veröffentlicht, das erst gegen das Ende seines Lebens erschien[3]). Der grosse Lagrange spricht sich in seiner Mécanique analytique folgendermaassen über dasselbe aus:

„Die Dynamik ist die Wissenschaft von den beschleunigenden und verzögernden Kräften und den mannigfachen Bewegungen, welche dieselben hervorbringen. Diese Wissenschaft gehört ganz und gar der neueren Zeit an, und Galilei ist es, der zu ihr den Grund gelegt hat."

„Vor ihm hatte man die Kräfte, welche auf die Körper wirken, nur im Zustande des Gleichgewichts betrachtet; und obgleich man die beschleunigte Bewegung fallender Körper und die krummlinige Bewegung der Geschosse nur der dauernden Wirkung der Schwere zuschreiben konnte, war es noch Niemand geglückt, die Gesetze dieser gewöhnlichen Erscheinungen durch eine so einfache Ursache zu erklären. Galilei hat zuerst diesen Schritt

gethan und dadurch der Mechanik neue und unermessliche Bahnen eröffnet. Seine Entdeckungen am Himmel haben ihm bei seinen Lebzeiten mehr Ruhm verschafft; aber jenes ist heute der sicherste und beste Theil seiner Verdienste.“

„Um die Jupiterstrabanten, die Phasen der Venus, die Sonnenflecken aufzufinden, brauchte man nur Ferngläser und fleissige Beobachtungen; aber es bedurfte eines ausserordentlichen Genies, um Naturgesetze in den Erscheinungen herauszufinden, die man täglich vor Augen gehabt hatte, deren Erklärung aber doch dem Scharfsinn der Forscher stets entgangen war.“

Nach der Sitte damaliger Zeit war Galilei's Ernennung nur auf drei Jahre erfolgt. Nach Ablauf derselben hätte er sich, trotz seines geringen Gehaltes, gern von Neuem bestätigt gesehen, da er durch den Tod seines Vaters die einzige Stütze der Familie geworden war. Inzwischen hatte er durch seine Freimüthigkeit seine Stellung auf's Spiel gesetzt. Johann von Medici, ein natürlicher Sohn Cosmos I., hatte eine Hafenreinigungsmaschine erfunden, und da er sich für einen grossen Baumeister hielt, so wurde seine Eitelkeit empfindlich verletzt, als Galilei ihre Fehler aufdeckte. Er beschwerte sich beim Grossherzog, und da alle Anhänger des Aristoteles sich seinen Klagen anschlossen, so zog es Galilei vor, dem Sturme zu weichen und kehrte nach Florenz zurück, folgte aber bald einem Rufe der Republik Venedig als Professor in Padua mit einem Gehalte von 180 fl. — Im Sommer 1592 reiste er nach Venedig, und er erzählte gern noch im hohem Alter, dass damals sein Gepäck, welches sein ganzes Hab und Gut enthielt, noch keine hundert Pfund gewogen habe.

In Padua schuf sich Galilei bald einen ausgedehnten Wirkungskreis. Seine mathematischen Vorlesungen hatten einen solchen Zulauf, dass er zweimal in grössere Auditorien wandern musste und endlich in der Juristenschule einen Hörsaal fand, der über 2000 Menschen fasste und dennoch häufig überfüllt war, wenn Galilei vortrug. Sein Ruf zog Zuhörer aus aller Herren Länder herbei, und es werden darunter auch fürstliche Personen genannt. Er liebte es, seine Schüler in seinem Hause um sich zu versammeln und zu bewirthen, und da für die Ueberzahl der Gäste das vorhandene Tischzeug oft nicht ausreichte, sah er sich genöthigt, Papier statt der Servietten zu verabreichen. Hier in Padua verband er sich mit einer wegen ihrer Schönheit berühmten Dame, Marina de Gamba, die ihm mehrere Kinder schenkte. Sein Sohn Vincenzo, der den Vater nur wenig Jahre überlebte, zeigte sich später geschickt in der Mechanik. Zwei Töchter, Julia und

Polissena, nahmen den Schleier unter den Namen Arcangela und Celeste.

Galilei schrieb in dieser Zeit verschiedene Abhandlungen über Mechanik, Befestigungskunst, Sonnenuhren, welche zum Theil verloren gegangen, zum Theil erst viel später im Druck erschienen sind[4]). Auch auf das Gebiet praktischer Erfindungen dehnte er seinen Scharfsinn aus. So erhielt er 1594 für eine von ihm erdachte hydraulische Maschine vom Dogen von Venedig ein Privilegium auf 20 Jahre. Bald darauf erdachte er den Proportional-Zirkel; zwar behauptete der Mailänder Baltasar Capra, diese Erfindung schon früher gemacht zu haben, doch wurde er von dem niedergesetzten Schiedsgerichte schmählich abgewiesen, da sich herausstellte, dass er gar nicht die einfachsten Kenntnisse in der Geometrie besass[5]). — In Anerkennung seiner Verdienste als akademischer Lehrer wurde Galilei nach Ablauf der ersten sechs Jahre bestätigt, und gleichzeitig sein Einkommen auf 320 fl., bei seiner abermaligen Bestätigung aber 1606 auf 520 fl. erhöht. Als er endlich 1609 dem Venetianischen Senat das Fernglas überreicht hatte, belohnte ihn die Ernennung auf Lebenszeit, mit einem Jahrgehalt von 1000 fl. — Aus Holland war das Gerücht nach Venedig gedrungen, dass dort ein Instrument erfunden sei, durch welches man mit Hülfe von geschliffenen Gläsern sehr entfernte Gegenstände ganz nahe und deutlich wahrnehmen könne. Galilei hörte davon (ein Brief aus Paris brachte ihm die Bestätigung), er dachte eine ganze Nacht darüber nach und fand das Richtige. Er setzte sein Teleskop aus zwei Gläsern, einem planconvexen und einem planconcaven, zusammen, eine Form, die noch heute, z. B. bei unsern Operngläsern, in Gebrauch ist, und den Namen des Galileischen Fernrohrs bewahrt hat. Und während in der Hand der holländischen Künstler das Instrument noch lange ein sehr unvollkommenes blieb, brachte es Galilei bald zu 1000facher Flächenvergrösserung; ja, er benutzte es sogleich, um der Forschung ein ganz neues, ungeahntes Feld zu eröffnen: Er richtete sein Fernrohr gen Himmel, zuerst auf den Mond, und fand auf ihm Thäler und Berge, höher als die Berge der Erde. Die Plejaden, in denen man im Alterthume nur 6—7 Sterne annahm, zeigten ihm 40; im Gürtel des Orion, wo das blosse Auge nur 7 Sterne wahrnimmt, zählte er deren 80; die Milchstrasse und die Nebelflecke lösten sich in seinem Glase zu Gruppen von unzähligen Sternen auf. Am 7. Januar 1610 entdeckte er die Monde des Jupiter, zuerst drei, sechs Tage später einen vierten. Alle diese wichtigen Beobachtungen veröffentlichte er schon im März desselben Jahres[6]).

Eine andere Entdeckung, die er im Juli 1610 machte, hielt er noch zurück und theilte sie vorläufig nur in einem Anagramm mit, von dem er später auf Bitten Kaiser Rudolph II. die Auflösung gab:

Altissimum planetam tergeminum observavi.

Er hatte nämlich den Ring des Saturn durch sein nicht hinreichend starkes Telescop nur undeutlich wahrgenommen; der Planet schien ihm aus drei Sternen zu bestehen, und er war nicht wenig erstaunt, als nach einigen Jahren die Henkel des Ringes wieder verschwunden waren. Er fragte sich, ob ihn sein Fernrohr getäuscht, ob sein Auge schwächer geworden sei, oder ob Saturn zum zweiten Male seine Kinder verschlungen habe. Am wahrscheinlichsten war es ihm freilich, dass sie nur periodisch verschwänden und später wieder erscheinen würden, was sich in der Folge vollkommen bestätigt hat.

Diese glänzenden Entdeckungen, welche so rasch auf einander folgten, erregten überall Staunen und Bewunderung. Die Dichter wetteiferten, Galilei zu verherrlichen, und die Jupiterstrabanten wurden auf Maskenbällen dargestellt. Dem Toscanischen Herrscherhause zu Ehren hatte Galilei dieselben Mediceische Gestirne benannt; der König von Frankreich beeilte sich, ihn zu bitten, bei nächster Gelegenheit auch seinen Namen zu berücksichtigen. Am 10. Juli 1610 berief Cosmos II. ihn nach Toscana zurück als ersten Professor der Mathematik an der Universität Pisa mit einem Jahrgehalt von 1000 Skudi, ohne die Verpflichtung, in Pisa zu wohnen und Vorlesungen zu halten, und zugleich als Mathematiker und Philosophen des Grossherzoglichen Hofes. Galilei nahm diese Stellung gern an, da sie ihm die Musse für fernere Untersuchungen sicherte, während in Padua ein grosser Theil seiner Zeit durch Vorlesungen in Anspruch genommen war. Im September kehrte er in seine Vaterstadt zurück und bald darauf beobachtete er, dass die Venus, ähnlich wie der Mond, in regelmässiger Aufeinanderfolge vier verschiedene Gestalten zeigt, was schon Copernikus als einen Beweis für die Bewegung der Planeten um die Sonne vorhergesagt hatte; auch fand er merkliche Veränderungen in dem Glanze und dem scheinbaren Durchmesser des Mars. Noch in Padua hatte er die Entdeckung der Sonnenflecken gemacht, dieselbe aber anfangs nur einigen vertrauten Freunden mitgetheilt, da sie gegen das peripatetische Dogma von der Reinheit der Sonne verstiess. Im März 1611 ging er nach Rom, wo er viele Personen, darunter auch mehrere Cardinäle, seine neuen Entdeckungen am Himmel sehen liess. Dieselben

erregten allgemeines Staunen, und ihre Wichtigkeit wurde nicht verkannt. Jede einzelne von ihnen war ein Stoss gegen die Lehre des Ptolemäus, dass der Himmel sich um die Erde als festen und unbeweglichen Mittelpunkt dreht, welche durch das ganze Mittelalter hindurch gegolten hatte, — jede einzelne eine neue Bestätigung des Copernikanischen Weltsystems. Die Frage über die Bewegung der Erde, welche Galilei seit lange angenommen hatte, kam jetzt in Rom zur Sprache. Sein Freund Sarpi, der ihn ungern von Venedig scheiden sah, hatte ihn vor dieser Reise gewarnt und schon damals ausgesprochen, dass man aus jener Frage eine kirchliche Angelegenheit machen und Galilei zum Widerruf zwingen würde. In der That kamen einige einflussreiche geistliche Würdenträger auf den Gedanken, dass das, was Galilei ihnen zeigte, nur eine Täuschung sei, die mit dem kirchlichen Dogma im entschiedensten Widerspruch stände; in Folge dessen beauftragte Cardinal Bellarmin vier Jesuiten, darunter den Astronomen Clavio, mit der Prüfung von Galilei's Entdeckungen, und diese konnten darin nichts Verfängliches finden. So kehrte Galilei, nachdem er unter die Mitglieder der berühmten Accademia dei Lincei aufgenommen war, mit erhöhtem Ansehen nach Florenz zurück. Doch liess er in Rom viel Neider und Feinde; von denen manche heftig die Richtigkeit seiner Behauptungen bestritten. Ein Blick durch Galilei's Fernrohr hätte sie eines Besseren belehren können; allein sie weigerten sich hartnäckig, diesen Blick zu thun, indem sie von vorn herein alles, was das Fernrohr zeigte, für Teufelsspuk erklärten. — In diese Zeit fällt die Erfindung des Mikroskops, des Instruments, welches für alle Zweige der Naturwissenschaften von grösster Wichtigkeit geworden ist, und welchem wir namentlich in Bezug auf den inneren Bau der Thiere und Pflanzen eine Reihe der glänzendsten Aufschlüsse verdanken. Es ist darüber gestritten worden, ob Galilei auch diese Erfindung gebührt. Viviani, sein treuer Schüler und Biograph, berichtet, dass er schon 1612 ein Mikroskop an den König von Polen geschenkt habe. Soviel steht fest, dass es ihm im Jahre 1624 gelang, dasselbe bedeutend zu vervollkommnen und ihm eine Einrichtung zu geben, welche lange Zeit im Gebrauch gewesen ist. Auf Veranlassung des Grossherzogs von Toscana gab Galilei seine Abhandlung über die schwimmenden Körper[7]) heraus, worin er eine Menge interessanter Beobachtungen anführt und die wahren Ursachen derselben nachweist. Er hat hier zuerst das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten aufgestellt, welches eine so vielfache Anwendung in der Physik gefunden hat. Auch handelt er in diesem Werke von den Phasen der Venus,

den Umlaufszeiten der Jupiterstrabanten und von den Sonnenflecken. Diese letztere Entdeckung nahm der Jesuit Scheiner für sich in Anspruch und veranlasste dadurch Galilei, im Febr. 1613 seine Briefe an Marco Velseri[8]) von der Accademia dei Lincei herausgeben zu lassen, worin er die Behauptung Scheiner's widerlegt, dass die Sonnenflecken Gestirne seien, welche den festen und unveränderlichen Sonnenkörper umkreisen.

Wir nähern uns jetzt der Zeit, worin sich die Katastrophe vorbereitete, in welcher der grosse Forscher endlich unterliegen sollte. Schon seit vielen Jahren hatte er die Copernikanische Lehre vom Weltsystem als die richtige erkannt. Er spricht dies z. B. in einem Briefe an unsern berühmten Landsmann Johann Kepler vom 4. August 1597 aus, und fügt hinzu, dass er viel darüber geschrieben, aber noch nicht gewagt habe, damit hervorzutreten, abgeschreckt durch das Schicksal des Copernikus, der zwar bei manchen unsterblichen Ruhm erlangt habe, aber bei unendlich vielen lächerlich geworden sei. Seinen Schülern und vertrauten Freunden gegenüber hielt er mit seinen Ansichten nicht zurück, hatte aber bis jetzt nichts darüber veröffentlicht. Zwar hatte die Kirche noch nicht für nöthig gehalten gegen die neue Lehre einzuschreiten; hatte doch der Pabst selbst die Widmung von Copernikus Werk De orbium coelestium revolutionibus libri VI angenommen. Aber Galilei's Gegner, zumal die Anhänger der Aristotelischen Schule, ruhten nicht. Von dem Erzbischof von Florenz, dem Bischof von Fiesole und andern ging die Bewegung aus, die Dominikaner schlossen sich offen an; der Pater Caccini eiferte von der Kanzel herab gegen den grossen Astronomen. Er legte seiner Predigt die Worte des Lukas zu Grunde: „Viri Galilei, quid statis adspicientes coelum. Ihr Galileischen Männer, was steht Ihr und schaut gen Himmel“, und führte aus, dass die Geometrie eine teuflische Kunst sei, und dass aus allen Staaten die Mathematiker, als Anstifter sämmtlicher Ketzereien, verbannt werden müssten. Unaufhörlich wiederholte man die Worte der Schrift: Terra in aeternum stat und die Stelle, wo erzählt wird, dass Josua die Sonne still stehen hiess. Galilei antwortete auf diese Angriffe durch einen Brief an die Grossherzogin-Wittwe Christine von Lothringen, in welchem er sich auf den theologischen Standpunkt stellt und nachzuweisen versucht, dass die Schrift falsch ausgelegt worden sei. Die Anmassung eines Gelehrten, der keinem geistlichen Orden angehörte, die Bibel interpretiren zu wollen, veranlasste in Rom einen allgemeinen Sturm, da sie als ein Eingriff in die ausschliesslichen Vorrechte der Kirche angesehen wurde. Die beiden Dominikanermönche Caccini und Lorini denuncirten Galilei bei der Inquisition und

dieser begab sich, mit Emfehlungsbriefen des Grossherzogs versehen, persönlich nach Rom, konnte aber nicht verhindern, dass im Februar 1616 die Lehre von der Unbeweglichkeit der Sonne und der Umdrehung der Erde für falsch und ketzerisch erklärt, sowie die Werke des Copernikus und des neapolitanischen Mönches Foscarini, worin dieser den Wortlaut verschiedener Schriftstellen mit dem System des Copernikus in Uebereinstimmung zu bringen suchte, der Censur unterworfen wurden. Die Congregation des Index machte dabei einen Unterschied zwischen beiden Werken; das des Foscarini ward gänzlich verboten, während jenes des Copernikus bloss corrigirt und darin unter andern alle Stellen gestrichen werden sollten, worin die Erde als Stern bezeichnet wird. Galilei wurde zunächst von dieser Massregel nicht persönlich betroffen; doch wurde ihm das päbstliche Decret ausdrücklich mitgetheilt, und ihm untersagt, die falsche Lehre vorzutragen. Er blieb nichtsdestoweniger in Rom und bemühte sich noch immer, der Wahrheit Geltung zu verschaffen, bis er endlich vom Grossherzog selbst zurückgerufen wurde in Folge eines Berichtes des toskanischen Gesandten, Guicciardini, worin dieser auf die Gefahren hinwies, denen man sich aussetzte, wenn man Galilei länger protegirte „unter einem Pabst, der das Talent und die Wissenschaft verabscheue und Neuerungen und feinen Untersuchungen so abhold sei, dass diejenigen, welche etwas verständen, sich unwissend stellten, um nicht verdächtig zu werden und sich Verfolgungen auszusetzen.“ Galilei schöpfte neue Hoffnung, als 1623 sein langjähriger Freund, Cardinal Maffeo Barbarini, unter dem Namen Urban VIII., den Stuhl Petri bestieg. Die Accademia dei Lincei widmete dem neuen Pabst Galilei's jüngste Schrift, den Saggiatore, ein Meisterwerk des Stils und der Dialektik, worin er die Ansichten des Pater Sarsi über die Cometen widerlegt und seine eigenen, freilich nicht sehr glücklichen Vermuthungen über die Natur dieser Himmelskörper darlegt; und im nächsten Frühjahre ging Galilei selbst nach Rom, wo er eine sehr freundliche Aufnahme fand. Dies ermuthigte ihn, ein Werk zu vollenden, in welchem die beiden Weltsysteme, das Ptolemäische und Copernikanische, mit einander verglichen und die Gründe für und wider das eine und das andere gegen einander abgewogen werden[10]). Er wählte für diese Darstellung die Form von Gesprächen. Alle Gründe für die Richtigkeit des Copernikanischen Systems legt er zweien seiner Freunde Sagredo und Salviati, in den Mund, denen er als Vertheidiger der ptolemäischen Ansichten einen Peripatetiker Simplicio gegenüberstellt. Dieser letztere erscheint dabei in einem sehr ungünstigen Lichte; er bringt die albernsten Dinge zu Platze und erklärt z. B. alle

mathematischen Einwürfe seiner Gegner für Subtilitäten, die Aristoteles seinen Schülern untersage, weil er selber nichts davon verstanden habe. Wenn man diese Gespräche liest, kann man nicht zweifelhaft sein, auf welche Seite der Verfasser sich stellen wollte. Jeden Augenblick scheint der einfältige Simplicio im Begriffe, vollständig matt gesetzt zu werden, bis er ganz unerwartet am Schlusse die Oberhand behält und die Entscheidung zu Gunsten des Ptolemäus getroffen wird.

Es ist ein Beweis von dem Ungeschick oder der Unwissenheit der Censoren, welchen die Gespräche zur Beurtheilung vorlagen, dass sie den Hohn und Spott nicht erkannten, welche aus dieser Art der Behandlung sprechen. Vielleicht liessen sie sich durch die Vorrede täuschen, worin Galilei sagt, es sei vor einigen Jahren in Rom ein sehr heilsames Edikt erschienen, welches über die Pythagoräische Lehre von der Bewegung der Erde, um dem Skandal des Jahrhunderts ein Ende zu machen, gänzliches Stillschweigen auferlege. Einige Verwegene hätten den Gedanken gefasst, dass dies Dekret nicht aus reiflicher Prüfung, sondern aus schlecht unterrichteter Leidenschaft hervorgegangen sei, und ausgesprochen, dass in der Astronomie vollständig unerfahrene Richter durch ein übereiltes Verbot den spekulativen Geistern die Flügel nicht beschneiden dürften. Sein Eifer könne zu diesen Klagen nicht stillschweigen. Er sei von jener weisen Maassregel unterrichtet gewesen und habe sie vollkommen gebilligt; jetzt wolle er als Zeuge der Wahrheit auftreten und durch dieses Werk den fremden Völkern zeigen, dass man von diesem Gegenstande in Italien, und besonders in Rom, ebensoviel als anderwärts verstände; dass alle seine Betrachtungen über das Copernikanische System schon vor der Verdammung desselben in Rom bekannt gewesen seien, und dass man diesem Lande nicht nur Dogmen für das Seelenheil verdanke, sondern auch sinnreiche Entdeckungen zur Vergnügung der Geister.

Genug, die Druckerlaubniss wurde, nach Abänderung einiger Stellen, gegeben, und da eine in Toscana ausgebrochene Epidemie Galilei von der Reise nach Rom abhielt[11]), so erschien das Werk 1632 in Florenz, nach einer nochmaligen Revision durch die dortigen Censoren und den General-Inquisitor, und wurde mit grossem Beifall aufgenommen. Aber sogleich regten sich seine Feinde: es erschien eine Menge von Gegenschriften; er wurde abermals bei der Inquisition denuncirt, und dem Pabst die Meinung beigebracht, dass Galilei unter dem Simplicio ihn gemeint habe. Mit unerbittlicher Strenge, ohne Rücksicht auf seine Kränklichkeit, auf die Strenge des Winters oder auf die Gefahren

des herrschenden Contagiums, wurde der fast 70jährige Greis nach Rom vor die Congregation des Sant' Ufficio geladen, um sich zu verantworten. Am 13. Februar 1633 kam er dort an und stieg bei Niccolini, dem florentinischen Gesandten, ab, dem der Ruhm gebührt, dass er bei der ganzen Angelegenheit warm und eifrig für Galilei Sorge getragen. Zwei Monate vergingen, ohne dass in seiner Sache irgend etwas geschah. Mitte April musste er den Gesandtschaftspalast mit den Gefängnissen der Inquisition vertauschen, wo er ungefähr 14 Tage blieb. Dann erhielt er die Erlaubniss zu Niccolini zurückzukehren, wurde aber am 20. Juni noch einmal vor die Inquisition geführt, um sein Urtheil zu vernehmen. Es lautete auf Haft in den Gefängnissen der Inquisition auf eine vom Pabste zu bestimmende Zeit. Knieend musste er seine Irrthümer abschwören und feierlich versprechen, über die Bewegung der Erde, welche als eine falsche, unsinnige, ketzerische und den Lehren der Schrift widersprechende Meinung verdammt wurde, niemals zu reden oder zu schreiben[12]). Man hat bezweifelt, ob Galilei gefoltert worden ist. Ihm selbst war jede Mittheilung über das, was mit ihm im Inquisitionsgefängniss vorgegangen, streng untersagt. Es finden sich aber in dem Urtheil, welches nebst den übrigen Processakten erhalten ist, folgende Worte:

„Und da es Uns so vorkam, als hättest Du nicht aufrichtig die Wahrheit über Deine Meinung gesagt, schien es uns nöthig, mit dem examen rigorosum gegen Dich vorzugehen, in welchem Du katholisch geantwortet hast“.... Die Sprache der Inquisition kennt nur eine Bedeutung für examen rigorosum: die Tortur![13]) — Gebrochen am Körper, aber ungebrochen am Geist, verliess Galilei Rom und brachte mit Erlaubniss des Pabstes bei dem Erzbischof von Siena, seinem Schüler und treuen Freunde, fünf Monate zu; dann bezog er die Villa di San Matteo in Arcetri bei Florenz, die ihm als Gefängniss angewiesen wurde. Die von ihm nachgesuchte Erlaubniss nach Florenz gehen oder wenigstens den Besuch seiner Freunde empfangen zu dürfen, wurde ihm abgeschlagen mit dem Bedeuten, sich künftig jeder Bitte zu enthalten, wenn er nicht in das Inquisitionsgefängniss zurückwandern wolle; und diese unmenschliche Ankündigung des Inquisitors erhielt er an demselben Tage, an welchem die Aerzte ihm die bevorstehende Auflösung seiner Lieblingstochter, der Schwester Celeste, die ihm die Tage seines Unglücks hatte erleichtern helfen, ankündigten. Alles schien sich zu vereinigen, um ihm die letzten Jahre seines Lebens zu verbittern. Sein Sohn machte ihm Kummer durch schlechte Aufführung. Schon 1632 hatte sich

eine merkliche Abnahme seiner Sehkraft gezeigt; Ende 1637 erblindeten die Augen für immer, welche so viele herrliche und glänzende Erscheinungen entdeckt hatten. Auch seine wissenschaftlichen Unternehmungen schlugen fehl; die Mönche hörten nicht auf, ihn zu verfolgen, und wohin er seine Werke schicken mochte, überall traf von Rom der Befehl ein, den Druck zu verhindern. Schon vor 20 Jahren hatte er dem spanischen Hofe eine neue Methode der geographischen Längenbestimmung vorgeschlagen; die Verhandlung war wiederholt abgebrochen und wieder aufgenommen, aber noch stets fruchtlos geblieben. Er bot seine Erfindung auf den Rath seiner Freunde den Generalstaaten von Holland an; die Unterhandlungen waren noch im Gange, als er, 78 Jahre alt, am 8. Januar 1642 starb. Die irdische Hülle des grossen Geistes wurde, seiner letztwilligen Bestimmung gemäss, in der Kirche Santa Croce zu Florenz beigesetzt; aber es bedurfte dazu erst eines Ausspruches der berühmtesten Lehrer des kanonischen Rechtes, da seine erbitterten Feinde sein Testament, als eines im Banne der Inquisition verstorbenen, für null und nichtig erklären wollten. 140 seiner Bewunderer wollten ihm ein Denkmal setzen; aber Niccolini rieth, die Ausführung besseren Zeiten vorzubehalten. Sie geschah fast ein Jahrhundert später, im Jahre 1737; und erst in unserer Zeit, 1841, wurde in Florenz, im Museum der Naturgeschichte, bei Gelegenheit des 3. italiänischen wissenschaftlichen Congresses eine prächtige Gedenkhalle mit seiner lebensgrossen Bildsäule errichtet. Heutzutage wird in Italien die Lehre des Copernikus von Mitgliedern derselben geistlichen Orden, welche bei Galilei's Verurtheilung die Hauptrolle spielten, öffentlich vorgetragen. Das wissenschaftliche Märtyrerthum, zu welchem man den Vertheidiger der Wahrheit stempelte, hat ihrem endlichen Durchdringen eben so sehr genützt, als dem Ansehen der Kirche geschadet, und es hat jetzt auch jenseits der Alpen die Ueberzeugung Platz gegriffen, dass man die Umkehr der Wissenschaft nicht dekretiren kann, und ob auch das Uebelwollen Einzelner oder die Vorurtheile des grossen Haufens sie zeitweise im Fortschreiten hemmen, — sie kann nicht still stehen, sie bewegt sich doch!

Anmerkungen.

1) „Die 300jährige Jubelfeier des Geburtstags Galilei's ist in Pisa auf das glänzendste vor sich gegangen; fünfzig Universitäten und Akademien waren bei derselben vertreten; auch der Unterrichts-Minister wohnte der Festlichkeit bei. In Turin, Mailand, Cuneo und andern Städten ist diese Säkularfeier ebenfalls fürstlich begangen worden. Ueberall wurden Reden gehalten und die Büste Galilei's bekränzt.“ Nat.-Zeit. vom 27. Febr. 1864. Nr. 97.

2) Nelli, Vita di Galileo. Losanna 1793. 2 vol. in 4° und Racconto istorico della Vita di Galileo scritto da Vicenzo Viviani, wovon mehrere Ausgaben erschienen und der sich wieder abgedruckt findet in der unter Leitung von Eugenio Albèri von 1842—56 zu Florenz erschienenen Gesammtausgabe von Galilei's Werken in 16 Bänden: Le opere di Galileo Galilei, prima edizione completa condotta sugli autentici manoscritti palatini e dedicata a S. A. I. e R. Leopoldo II, Granduca di Toscana, auf die wir uns im Folgenden stets beziehen werden.

Libri, Histoire des Sciences Mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle. Paris 1838—41. T. VI. p. 157—294.

Arago, Oeuvres complètes T. III. p. 240—297.

K. v. Littrow, Kalender für alle Stände 1863. p. 108—122, stützt sich in Bezug auf Galilei's Process namentlich auf Reumont, Beiträge zur italienischen Geschichte, die mir leider nicht zu Gebote standen.

Nennen will ich hier noch:

Galileo Galilei. Geschichtlicher Roman von Mathilde Raven. Leipzig bei Brockhaus. 1860.

Das Leben Galileo Galilei's. Gedenkblatt zur Feier seines 300jährigen Geburtstages von Lina Morgenstern. Berlin 1864.

Galilei. Trauerspiel von Heinrich Bolze. Cottbus 1861.

3) 1638 bei den Elzeviers in Leyden. Es führt den Titel: Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove science oder Dialoghi delle nuove science, Opere T. XIII.

4) Della Scienza Meccanica, Trattato di Fortificazione, Opere T. XI.

5) Usus et fabrica circini proportionis Balthasaris Caprae; Difesa di Galileo contro il Capra, Opere T. XI.

6) Sidereus Nuncius, Opere T. III.

7) Discorso intorno alle cose que stanno in su l'acqua o que in quella si muovono oder Discorso intorno i galleggianti, Opere T. XII.

8) Lettere intorno alle macchie solari, Opere T. III.

9) Jl. Saggiatore, nel quale con bilancia esquisita e giusta si ponderano le cose contenute nella Libra Astronomica e Filosofica di Lottario Sarsi, Opere T. IV.

10) Dialogo intorno al due massimi sistemi del mondo, Tolemaico e Copernicano, Opere T. I.

11) Die Accademia dei Lincei, welche wiederum die Herausgabe übernehmen sollte, hatte sich inzwischen aufgelöst. Eine spätere Fortsetzung derselben ist die noch heute in Rom blühende Accademia Pontificia de' nuovi Lincei.

12) Die oft citirten Worte: E pur si muove, welche Galilei nach Leistung des Abschwörungseides ansgerufen haben soll, sind nicht beglaubigt und scheinen ihm von einer spätern Zeit in den Mund gelegt worden zu sein.

13) Appendice relativa al processo di Galileo, Opere Suppl.

Erst während des Drucks dieser Zeilen ist mir durch die Güte des Herrn Herausg. d. Arch. d. M. u. P. ein Aufsatz von Moriz Cantor bekannt geworden, welcher nachzuweisen versucht, dass unter dem peinlichen Verhör, wenigstens in diesem speciellen Falle, nur die Befragung vor Anwendung der Tortur, vielleicht in Gegenwart der Marterinstrumente und unter Bedrohung mit den Qualen derselben, zu verstehen sei. Jedenfalls scheint in den Processacten eine Lücke zu sein. Vielleicht ist es der Zukunft vorbehalten, aus den geheimen Archiven des Vaticans diese Lücke auszufüllen und schliesslich den wahren Thatbestand unzweifelhaft festzustellen.

XXVI.

Kugel der mittleren Krümmung des Ellipsoids.

Von
dem Herausgeber.

Ich will in diesem kurzen Aufsatze, als eine Anwendung des in Thl. XLI. S. 294. entwickelten allgemeinen Satzes, die Kugel der mittleren Krümmung des durch die Gleichung

$$1) \ldots\ldots \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

charakterisirten dreiaxigen Ellipsoids vollständig bestimmen.

Wenn (xyz) ein beliebiger Punkt dieses Ellipsoids ist und durch R', R'' der kleinste und grösste Krümmungshalbmesser in diesem Punkte bezeichnet werden; so ist in Thl. XLI. S. 291. schon gezeigt worden, dass

$$R'R''=\frac{\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}^2}{\frac{1}{a^2b^2c^2}}=a^2b^2c^2\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}^2$$

ist. Bezeichnen wir nun den Halbmesser der Kugel der mittleren Krümmung in dem Punkte (xyz) durch R, so ist nach dem in Thl. XLI. §. 14. aufgestellten Satze:

$$R=\sqrt{R'R''},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$2) \ldots\ldots R=abc\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\},$$

wobei wir bemerken, dass in Thl. XLI. S. 269. S. 291. schon bewiesen worden ist, dass im vorliegenden Falle die Grösse $T<0$, die Grösse S positiv ist, weshalb wir, wenn die Coordinaten des Mittelpunkts der Kugel der mittleren Krümmung durch X, Y, Z bezeichnet werden, in den in Thl. XLI. S. 293. für diese Coordinaten gefundenen allgemeinen Formeln die oberen Zeichen nehmen müssen. Weil nun, wenn

$$u=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{c^2}$$

und folglich

$$P=2\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}$$

ist; so ist nach den in Rede stehenden allgemeinen Formeln:

$$X=x-\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}.abc\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\},$$

$$Y=y-\frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}.abc\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\},$$

$$Z=z-\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}.abc\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\};$$

also:

$$3)\ \ldots \left\{\begin{array}{l} X=x\left\{1-\frac{bc}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}\right\},\\ Y=y\left\{1-\frac{ca}{b}\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}\right\},\\ Z=z\left\{1-\frac{ab}{c}\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}\right\}; \end{array}\right.$$

so dass also nun die Kugel der mittleren Krümmung vollständig bestimmt ist.

Die Gleichung der Berührungsebene des Ellipsoids in dem Punkte (xyz) ist bekanntlich:

$$\frac{x}{a^2}(\mathfrak{x}-x)+\frac{y}{b^2}(\mathfrak{y}-y)+\frac{z}{c^2}(\mathfrak{z}-z)=0;$$

und bezeichnen wir nun das von dem Mittelpunkte des Ellipsoids auf diese Berührungsebene gefällte Perpendikel durch p; so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$p=\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

also, weil (xyz) ein Punkt des Ellipsoids ist:

4)

$$p=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\quad \sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}=\frac{1}{p};$$

folglich nach 2) und 3):

$$5)\quad \left\{\begin{array}{c} R=\dfrac{abc}{p^2}; \\[2ex] X=x(1-\dfrac{bc}{ap}),\quad Y=y(1-\dfrac{ca}{bp}),\quad Z=z(1-\dfrac{ab}{cp}). \end{array}\right.$$

Weil

$$X-x=-\frac{bc}{ap}x,\quad Y-y=-\frac{ca}{bp}y,\quad Z-z=-\frac{ab}{cp}z;$$

also:

$$X-x=-\frac{abc}{p}\cdot\frac{x}{a^2},\quad Y-y=-\frac{abc}{p}\cdot\frac{y}{b^2},\quad Z-z=-\frac{abc}{p}\cdot\frac{z}{c^2}$$

ist, so ist

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=\frac{a^2b^2c^2}{p^2}\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\},$$

folglich nach 4) und 5):

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=\frac{a^2b^2c^2}{p^2}\cdot\frac{1}{p^2}=\left(\frac{abc}{p^2}\right)^2=R^2,$$

wie es sein muss.

Ferner ist:

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}}=-\frac{abc}{p},\quad \frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}}=-\frac{abc}{p},\quad \frac{Z-z}{\frac{z}{c^2}}=-\frac{abc}{p};$$

also:

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{c^2}},$$

woraus sich ergiebt, dass der Mittelpunkt (XYZ) der **Kugel der mittleren Krümmung** in der dem Punkte (xyz) entsprechenden Normale des Ellipsoids, deren allgemeine Gleichungen bekanntlich

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{z}{c^2}}$$

sind, liegt, wie es nach dem oben erwähnten allgemeinen Satze sein muss.

Bezeichnen wir die Breite und reducirte Breite des Punktes (xyz), über welche Begriffe die Abhandlung Thl. XXXVI. Nr. VIII. zu vergleichen ist, durch B und $\mathfrak{B}$; so ist nach einer in Thl. XL. S. 279. Nr. 26. bewiesenen Formel:

$$\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}=c\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}},$$

also nach 4):

$$p=c\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}},\quad \frac{1}{p}=\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B};$$

und folglich nach 5):

$$6)\;\ldots\ldots\quad \left\{\begin{array}{l} R=\dfrac{ab}{c}\left(\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2,\\[2ex] X=x(1-\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}),\\[2ex] Y=y(1-\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}),\\[2ex] Z=z(1-\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}); \end{array}\right.$$

oder, weil nach Thl. XXXVI. S. 90. Nr. 19):

$$x=a\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad y=b\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad z=c\sin\mathfrak{B}$$

ist:

$$7) \ldots \begin{cases} X = a\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} - b\,\dfrac{\cos\mathfrak{L}\sin\mathfrak{B}\cos\mathfrak{B}}{\sin B}, \\[2ex] Y = b\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} - a\,\dfrac{\sin\mathfrak{L}\sin\mathfrak{B}\cos\mathfrak{B}}{\sin B}, \\[2ex] Z = c\sin\mathfrak{B} - \dfrac{ab}{c}\cdot\dfrac{\sin\mathfrak{B}\sin\mathfrak{B}}{\sin B}; \end{cases}$$

oder:

$$8) \ldots\ldots \begin{cases} X = (a - b\,\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B})\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}, \\[2ex] Y = (b - a\,\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B})\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}, \\[2ex] Z = (c - \dfrac{ab}{c}\cdot\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B})\sin\mathfrak{B}. \end{cases}$$

Nach 6) ist aber:

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B} = \sqrt{\frac{cR}{ab}};$$

also:

$$b\,\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B} = \sqrt{\frac{bcR}{a}}, \quad a\,\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B} = \sqrt{\frac{caR}{b}}, \quad \frac{ab}{c}\cdot\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B} = \sqrt{\frac{abR}{c}};$$

woraus sich die folgenden eleganten Formeln zur Bestimmung der Kugel der mittleren Krümmung ergeben:

$$9) \ldots\ldots \begin{cases} R = \dfrac{ab}{c}\left(\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2; \\[2ex] X = (a - \sqrt{\dfrac{bcR}{a}})\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}, \\[2ex] Y = (b - \sqrt{\dfrac{caR}{b}})\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}, \\[2ex] Z = (c - \sqrt{\dfrac{abR}{c}})\sin\mathfrak{B}; \end{cases}$$

oder:

$$10) \ldots\ldots\ldots \quad R = \frac{ab}{c}\left(\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2;$$

$$X = (a - \sqrt{\frac{bcR}{a}})\frac{x}{a}, \quad Y = (b - \sqrt{\frac{caR}{b}})\frac{y}{b}, \quad Z = (c - \sqrt{\frac{abR}{c}})\frac{z}{c}.$$

Für die Kugel ist $a=b=c=r$, wenn r den Halbmesser der Kugel bezeichnet, und $\mathfrak{B}=B$; also nach den vorstehenden Formeln:

$$R=r,\quad X=0,\quad Y=0,\quad Z=0;$$

wie es sein muss.

Für das Rotations-Ellipsoid ist $a=b$ und $\mathfrak{L}=L$ zu setzen, wodurch man nach 9) und 10) die folgenden Formeln erhält:

$$11)\;\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}R&=\frac{a^2}{c}\left(\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2;\\X&=(a-\sqrt{cR})\cos L\cos\mathfrak{B},\\Y&=(a-\sqrt{cR})\sin L\cos\mathfrak{B},\\Z&=\left(c-\sqrt{\frac{a^2R}{c}}\right)\sin\mathfrak{B};\end{aligned}\right.$$

oder:

$$12)\;\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}R&=\frac{a^2}{c}\left(\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2;\\X&=(a-\sqrt{cR})\frac{x}{a},\\Y&=(a-\sqrt{cR})\frac{y}{a},\\Z&=\left(c-\sqrt{\frac{a^2R}{c}}\right)\frac{z}{c};\end{aligned}\right.$$

also ist in diesem Falle $X:Y=x:y$.

Bekanntlich (Thl. XXXVI. S. 86.) bezeichnet L die Länge des Punktes (xyz), welcher hier die reducirte Länge $\mathfrak{L}$ gleich ist.

XXVII.

Considérations théoriques sur la Chimie.

Par

Monsieur *E. Bacologlo*

à Boucarest.

I.

Malgré le grand développement que la chimie a pris dans ces derniers temps, l'on est pourtant encore loin d'apercevoir les lois générales qui président aux phénomènes chimiques, ce qui doit être attribué en partie aussi à ce, qu'en général on n'a pas tenu compte des forces mises en jeu, lors des réactions chimiques. C'est cette considération qui fera le point de départ du présent travail, qui devra être regardé comme une introduction à la solution mathématique du problème général de la chimie théorique.

Si l'on jette un coup d'oeil attentif sur l'immense domaine de la chimie, on reconnaitra sans peine que tout s'y passe suivant des lois bien déterminées, bien définies, quoique pour la plupart encore inconnues. Ceci nous conduit à introduire en chimie les méthodes des autres sciences exactes, surtout celles de la mécanique rationnelle qui me paraissent les plus appropriées à la chimie et capables de devenir pour elle d'une fécondité immense. Un exemple va éclaicir ce qui vient d'être dit.

Qu'on expose la pyrite à l'action simultanée de la chaleur et de l'oxygène, on détruira par là l'équilibre déjà existant, et le fer et le soufre ne pourront plus exister sous forme de pyrite. Mais, des forces nouvelles se mettent en jeu, des attractions nouvelles se font valoir, un nouvel équilibre s'établit et devient manifeste par la formation du sulfate de fer. Soit c la somme des

actions que subit une molécule de fer de la part des molécules environnantes de fer en état d'agir sur elle par suite de la cohésion, en d'autre termes la force de cohésion; soit de même c' la force de cohésion pour une molécule de soufre; a l'affinité d'une molécule de fer pour une molécule de soufre, c'est à dire, la somme des actions que subit une molécule de fer de la part de celles de soufre en état d'agir sur elle, plus la somme des actions que subit une molécule de soufre de la part de celles de fer. L'existence du sulfure de fer exigera l'équilibre de ces trois forces, et l'on aura nécessairement une équation de condition pour cet équilibre entre les trois forces c, c' et a: $F(c, c', a) = 0$; la difficulté consiste à préciser la forme de cette équation.

Soit maintenant c'' la force de cohésion de l'oxygène, a et a'' son affinité pour le fer et le soufre, t la température à laquelle on opère. L'action de la chaleur équivaut à une certaine force que je désigne par $f(t)$. Or, il est évident, que l'introduction de ces quatre nouvelles forces pourra bien détruire l'équilibre exprimé par l'équation ci dessus et en établir un nouveau dont l'équation de condition sera: $\Phi(c, c', c''; a, a', a''; f(t)) = 0$. On pourrait éliminer de cette équation la fonction $f(t)$, si l'on savait de quelle maniére la cohésion et l'affinité varient avec la température.

Parmi les forces moléculaires, dans l'acception du mot la plus générale, qui sont en activité dans l'intérieur des corps, il y en a qui sont inhérentes aux molécules mêmes de la matière (p. ex. la cohésion); d'autres n'exercent leur influence que par l'intermédiaire de l'éther intercalé entre les molécules de la matière (forces caloriques, électriques). Mais, quelle que soit l'action de ces agents, on peut, comme on le fait souvent en physique, imaginer que cette action soit produite par le travail de forces équivalentes, inhérentes aux molécules mêmes de la matière.

La répulsion calorique qui est une force permanente, mais d'intensité variable, exerce sur les molécules d'un corps composé une action remarquable. Chaque molécule étant entourée de l'éther calorique, reçoit sur tous les points de sa surface l'action de cette force répulsive et, si l'on ne tient compte que des composantes normales de ces diverses actions, celles-ci exerceront sur la molécule une pression de dehors en dedans, qui contribue à maintenir la stabilité du composé chimique et que je désignerai sous le nom de pression calorique. Quant aux composantes tangentielles de la répulsion calorique, elles peuvent imprimer aux molécules divers mouvements, vibratoires ou autres, qui font sous un autre point de vue l'objet des recherches de plusieurs

physiciens. Si maintenant on admet que les atomes qui constituent la molécule, ne la remplissent pas d'une manière continue, il en résulte que l'éther interatomique manifestera de son côté une action repulsive, directement opposée à celle de la pression extérieure et finira, pour une température assez élevée, par vaincre cette pression, laquelle diminue d'ailleurs, à mesure que les molécules s'écartent les unes des autres par l'effet de la chaleur, ce qui amenerait en définitive la d é c o m p o s i t i o n c h i m i q u e du corps. Cette manière de voir, ce double effet de la chaleur sur l'éther qui entoure la molécule et sur l'éther interatomique me parait rendre complètement compte d'une foule de phénomènes chimiques dans lesquels les substances qui se combinent à une température modérée, sont décomposées, lorsqu'on élève la température.

On conçoit d'après ce qui précède que le problème général de la chimie consiste dans les cinq questions suivantes:

1) Quelles sont les forces actives dans un corps élémentaire, par quelles relations sont elles liées entre elles et quelles sont les conditions d'équilibre de ces forces?

2) De quelle nature sont les modifications que subissent les forces actives d'un élément, les relations qui les lient et les conditions de leur équilibre, lorsqu'on fait réagir sur lui un ou plusieurs autres corps, avec ou sans le concours d'autres forces extérieures?

3) Quelles sont les conditions du nouvel équilibre et la nature des nouvelles forces, résultant de la combinaison de ces corps?

4) Quelles modifications subissent les forces et les conditions d'équilibre dans un corps composé, lorsqu'on fait réagir sur lui, séparément ou simultanément, certains agents ou autres corps, simples ou composés, et quelles sont les conditions du nouvel ou des nouveaux équilibres résultant?

5) Quelles relations existent entre les propriétés, physiques ou chimiques, d'un corps et les forces qui s'y font équilibre, et comment ces relations sont elles modifiées, lorsqu'on change les conditions d'équilibre suivant 2) ou 4)?

Pour résoudre ces problèmes, il y a deux voies à suivre: la voie expérimentale que l'on a si richement exploitée, et la voie théorique et de l'analyse mathématique; et le problème ne sera complétement résolu, la science n'atteindra le dégré de perfection

qu'elle comporte, que lorsqu'on aura conduit à bonne fin la solution par cette double voie: la physique en donne la preuve la plus éclatante.

Je désignerai sous le nom d'état moléculaire d'un corps l'état dans lequel se trouvent ses molécules sous l'influence des forces actives dans son intérieur, et cet état pourra évidemment subir des modifications par l'effet de causes extérieures. On conçoit d'après cela, que, lorsque deux ou plusieurs corps dissemblables viennent en contact immédiat, leurs états moléculaires respectifs, qui ne sont que le résultat de l'action de forces divergentes, tendront à se mettre en concordance, suivant les principes de la mécanique, relatifs à la composition des forces; l'état moléculaire de ces corps sera d'autant plus troublé, qu'ils seront moins semblables entre eux, et, dans ce cas, le nouvel équilibre, ainsi que l'état moléculaire lui-même du corps ou des corps nouvellement formés, divergera d'autant plus de l'état primitif des corps mis en réaction. Ceci explique les différences considérables que l'on observe entre les propriétés d'un corps et celles des éléments dont il se compose. Il en résulte donc que, lorsque plusieurs corps se combinent, leurs forces moléculaires respectives ne sont point détruites, mais elles se composent entre elles d'après les lois de la mécanique; que par conséquent létat moléculaire et la nature des corps résultants devra bien être différent de ceux des corps qui se sont combinés, et qu'enfin, lors de la décomposition chimique d'un corps, chacune de ses parties constituantes devra reparaitre avec toutes ses propriétés primitives, vu que les forces moléculaires, sans avoir été détruites, n'ont été que modifiées dans leurs effets.

On est conduit par ces considérations à conclure qu'une certaine quantité de matière pondérable, qui renferme en elle une certaine quantité d'éther, doit être regardée comme le représentant matériel ou l'équivalent pondérable des forces, que cette substance met en jeu, lors de ses combinaisons chimiques. Comme cette équivalence a lieu pour chacune des parties constituantes d'un composé chimique, il s'ensuit qu'on ne peut fair varier leur quantité pondérable, sans modifier en même temps les forces qui se font équilibre dans ce composé, et détruire par là cet équilibre. D'ailleurs, comme l'existence de ce dernier exige un rapport déterminé entre le forces en équilibre, il en résulte encore que leurs représentants matériels ne peuvent entrer dans ces composés que dans des proportions définies, ce qui constitue la notion théorique des équivalents chimiques des corps, que l'expérience et les faits forcent d'admettre, mais

dont on ne peut se rendre compte qu'en se fondant sur les notions exposées ci-devant relativement à l'équilibre moléculaire des corps. Je reviendrai dans un travail ultérieur sur ces différentes questions, en les soumettant aussi, autant que possible, au calcul mathématique; mais je me bornerai pour le moment à appliquer ces principes à quelques questions générales et très-importantes de chimie théorique, telles que la volatilité, la solubilité des substances et les chaleurs spécifiques.

II.

Les molécules d'un corps sont maintenues, comme on sait, à des petites distances sous l'action simultanée d'une force attractive, la cohésion, et d'une force répulsive, la répulsion calorique et ses congénères. Mais, quelle que soit la force répulsive ou attractive qui agit sur la molécule intérieure d'un corps, que ces forces soient égales entre elles, ou que l'une surpasse l'autre, la molécule se trouvera en équilibre, sauf les mouvements infiniment petits qu'elle pourrait exécuter, ainsi que je l'ai annoncé plus haut, puisqu'elle est affectée symmétriquement dans toutes les directions possibles par les molécules et les éthers environnants. Il n'en est pas même des molécules situées à la surface d'un corps; celles ci ne reçoivent que la moitié des actions dont une molécule intérieure est affectée, en sorte que leur résultante n'étant pas détruite, comme pour cette dernière, par l'autre moitié des actions, aura une certaine influence sur la molécule appartenant à la surface libre du corps et, si la répulsion calorique l'emporte sur l'attraction ou la cohésion moléculaire, les molécules superficielles manifesteront une tendance à se détacher du corps auquel elles appartiennent, tendance qui n'est équilibrée jusqu'à un certain point que par la pression de l'atmosphère environnante. L'accroissement de cette tendance amène le détachement des molécules superficielles qui se continue, tant que la répulsion calorique maintient sa prépondérance.

La plupart des solides entrent d'abord en fusion pour subir ensuite l'évaporation à l'état liquide. Cependant, il y en a qui ne passent point, du moins dans les conditions ordinaires, par cet état intermédiaire, mais qui se volatilisent immédiatement, dès q'on élève convenablement la température. La véritable cause de cette divergence n'est point connue, mais, imaginons, ainsi qu'on l'a fait en optique, que l'éther calorique possède une élasticité variable d'un corps à l'autre, considérable dans les sub-

stances qui fondent avant de se volatiliser, très faible dans les substances volatiles sans fusion. La chaleur apportée de dehors à ces dernières sera absorbée par ce milieu nullement ou peu élastique; mais, pour une élévation convenable de température, la répulsion se manifestera presque brusquement, comme cela a lieu avec tout corps peu élastique quand on le soumet à une action mécanique violente, et exercera son influence de préférence sur les parties superficielles, en déterminant ainsi la volatilisation de ces substances. Celles-ci peuvent d'ailleurs entrer en fusion sous des pressions considérables; c'est que l'élasticité de l'éther, développée aux parties superficielles par l'effet de la chaleur, n'étant point détruite par leur volatilisation, empêchée qu'elle est par la haute pression, s'étend successivement à l'intérieur de la substance et en amène définitivement la fusion.

La solubilité d'un corps dans un liquide dépend principalement des trois forces suivantes: 1) de la cohésion des molécules de la substance solide; 2) de la répulsion calorique qui s'exerce sur les molécules et qui varie avec la témperature; 3) de l'attraction mutuelle des molécules du corps solide et de celles du liquide, c'est à dire de l'affinité qu'ont entre elles les deux substances. Si l'on désigne sous le nom de cohésion relative la différence entre la cohésion et la répulsion calorique du corps solide, on peut dire que sa solubilité dans un liquide dépend du rapport entre sa cohésion rélative et l'affinité de ses molécules pour celles du liquide. Elle n'est donc empêchée, en général, que par une trop grande cohésion relative, ou bien par la faible affinité de la substance à dissoudre pour le dissolvant employé, ou bien enfin par le concours de ces deux circonstances. Il en résulte que mainte substance qui est régardée comme insoluble, se dissoudrait aisément, si l'on pourrait porter la température du dissolvant jusqu'à un point pour lequel la cohésion relative de la substance deviendrait assez petite, pour ne plus mettre obstacle à sa dissolution, et c'est ce qu'on peut en effet réaliser en soumettant le liquide à des pressions considérables.

Un fait remarquable souvent masqué par des circonstances secondaires, c'est l'abaissement de température qui accompagne toujours l'acte de la dissolution et qui serait dû, suivant notre manière de voir, à une perte d'élasticité que subit l'éther calorique renfermé dans la substance qui se dissout. En effet, une fois que la cohésion du corps en dissolution est vaincue, l'éther calorique n'exerce plus aucune pression, il se détend; il y a donc perte d'élasticité, c'est à dire, perte de travail et de

force vive; la chaleur est absorbée des corps environnants pour rendre à l'éther son élasticité perdue.

Lorsqu'un corps solide est réduit à une solution claire et homogène, on peut et l'on doit admettre que chaque molécule de cette liqueur est constituée par les atomes de tous les éléments qui y entrent, réunies dans des proportions définies. Ces atomes sont maintenus dans la molécule par les forces moléculaires connues et en outre par cette action remarquable de répulsion calorique, signalée plus haut. Aussi est ce dans les modifications des rapports mutuels de ces forces qu'il faut chercher l'explication de la différente solubilité d'un corps à des temperatures différentes, solubitité qui croit, en général, avec la température. En effet, plus on élève la température, plus la cohésion relative du corps diminue, plus la pression calorique dans la dissolution augmente, en sorte que les molécules de la dissolution acquièrent par là la double faculté et d'attirer plus énergiquement les particules de la substance à dissoudre, et de les maintenir avec plus de vigueur, dès qu'elles s'y sont incorporées. Cependant certaines substances présentent, à partir d'une certaine température, une diminution de solubilité. On peut attribuer ce phénomène à un surcroit de la répulsion interatomique (voir plus haut I.), ou bien au développement d'autres forces (résultant de la combinaison chimique, déshydratation etc.) à la faveur desquelles la cohésion se faisant prévaloir, il y a séparation d'une partie de la substance dissoute.

C'est ici le lieu de faire une remarque importante relativement aux dissolutions sursaturées, qui retiennent, après le refroidissement, des quantités de la substance dissoute plus considérables que celles correspondant à la température finale, et qui laissent ordinairement déposer cet excès dans des intervalles de temps plus ou moins longs et surtout, quand on introduit dans la dissolution de petites quantités de la substance elle même à l'état solide. Ne serait il pas permis d'admettre, pour expliquer ce phénomène, que l'éther calorique possède une force coërcitive qui sert à lui conserver l'élasticité considérable qu'il a acquise sous l'influence des températures élevèes et à la faveur desquelles la sursaturation s'est effectuée. Lorsque la solution se réfroidit, l'éther exerce encore, par suite de cette force coërcitive, sa pression calorique sur les molécules de la dissolution et maintient la saturation. Toutefois, cet état des choses n'étant pas naturel, ne peut se maintenir indéfiniment; les forces actives dans la dissolution tendent, au contraire, à ramener l'état normal, et ce retour est accéléré par différentes circonstances, p. ex. par l'accès brusque de l'air, par l'affinité (action de contact des sur-

faces) etc. Des phénomènes analogues se présentent dans d'autres circonstances encore, et le développement de chaleur dont ils sont ordinairement accompagnés montre bien que l'état provisoire dont il est question, n'est que le résultat du travail d'une certaine force, équivalent mécanique de la chaleur dégagée après le retour de l'état normal.

La solubilité d'une substance est encore modifiée par le dégré de concentration de la liqueur qu'on emploie comme dissolvant, lorsque cette liqueur contient elle-même en dissolution des substances autres que celles qu'on fait dissoudre. Certaines considérations théoriques me font penser que, pour des concentrations moyennes des dissolvants, la solubilité d'une substance est à peu près proportionnelle à cette concentration. Quelques expériences que j'ai faites avec l'acide arsénieux conduisent, du moins pour certains cas, à cette même conclusion. (Voir Erdmann, Journal für prakt. Chemie.)

L'élevation de température d'un corps qu'on échauffe est due à l'accroissement d'amplitude des oscillations de l'éther calorique renfermé dans ce corps. Cet accroissement de température dépend évidemment de la nature particulière, de l'élasticité de l'éther calorique appartenant à chaque substance, et d'ailleurs, la chaleur apportée de dehors n'est pas toute utilisée à cet effet; une partie en est perdue dans les chocs de l'éther contre les molécules matérielles de la substance, plus ou moins élastiques. De là, les différences si considérables dans les capacités calorifiques des différentes substances. Plus on élève la température d'un corps, plus la répulsion calorique de son éther s'accroît et sert à détruire en partie l'effet de la force de cohésion, et d'autant plus grande sera dans ce cas la portion de chaleur apportée de dehors qui fera équilibre à cette force et refusera de concourir à l'élévation de temperature. De là cette loi remarquable, que l'on n'a su établir jusqu'à ce jour que sur des expériences: la capacité calorifique d'une substance est d'autant plus grande que la température de cette substance est plus élevée. Mais, si pour des masses égales de diverses substances, les chaleurs spécifiques ne sont pas égales, on peut calculer des masses telles, que la quantité de chaleur qu'elles exigent, pour que leur température s'élève de la même quantité, soit la même. Les masses ainsi calculées, ou bien les poids correspondants, contiendront des quantités équivalentes d'éther calorique et seront par conséquent les équivalents pondérables de ce dernier. Si l'on effectue ces calculs, on trouve que les équivalents caloriques approchent plus ou moins des équivalents chimiques correspondants. Cepen-

dant, les divergences sont dans ce cas beaucoup plus considérables que celles qu'on obtient en comparant entre eux les produits des capacités calorifiques par les poids atomiques, ainsi que le montrent les exemples suivants:

	Capacités calorifiques c.	Poids atomiques p.	Produit $p.c.$	Equivalents caloriques.
Cuivre	0.0952	31.7	3.02	31.7
Platine	0.0324	98.7	3.20	93.2
Plomb	0.0314	103.7	3.26	96.2

Au lieu d'éluder ces divergences et de tâcher de les cacher sous la petitesse des produits 3.02, 3.20, 3.26, on n'a qu'à se rappeler de ce que j'ai dit plus haut, que les poids atomiques ne sont que les équivalents pondérables des forces qui se font équilibre dans les différents composés chimiques, pour se convaincre que ces divergences ne présentent rien de contraire à la nature des choses. En effet, outre les forces caloriques, il y en a d'autres encore qui sont actives dans les composés chimiques, et il est aisé de voir que les poids atomiques, qui doivent représenter l'ensemble de ces forces, ne peuvent être identiques avec les nombres qui représentent l'une d'elles, la force calorique seule, ce qui fait voir que la loi de Dulong n'est pas vraie, ou du moins, qu'elle n'est qu'approximative. On peut cependant déduire de ce fait, que les équivalents caloriques s'approchent si sensiblement des équivalents chimiques, une conséquence importante, à savoir que les forces caloriques prédominent dans les combinaisons chimiques et l'effet des autres forces est comparativement très petit, ou du moins, il est transporté en majeure partie sur l'éther calorique et se manifeste comme un effet calorique.

On voit par ce qui précède, comment ces nouveaux principes s'adaptent aux questions les plus importantes de-la chimie théorique et comment ils peuvent servir pour en donner une explication complètement rationelle. Je reviendrai dans un travail prochain sur ces théories pour les développer plus amplement et les appliquer aux combinaisons chimiques elles-mêmes.

XXVIII.

Einiges über die Richtung der Vertikale bei verschiedenen Höhen über dem Erdboden.

Von

Herrn *E. Bacaloglo*
in Bucarest.

Schon vor längerer Zeit habe ich Einiges über die Richtungsänderung der Vertikale und über die Gestalt der Atmosphäre mitgetheilt (siehe Schlömilch, Zeitschr. für Mathem. und Phys. 1860. p. 59. und Cosmos von Moigno 1862. p. 732.); ich möchte jedoch noch einmal in aller Kürze auf diesen Gegenstand zurückkommen, da sich manche Rechnung genauer ausführen lässt und da ich zu dem einfachen Beweise eines interessanten geometrischen Satzes gekommen bin, auf welchem hauptsächlich diese ganze Bemerkung beruht.

Es ist klar, dass die Richtung einer Vertikalen sowohl, als auch die Gestalt der Atmosphäre vom Gleichgewichte eines über dem Erdboden befindlichen materiellen Punktes abhängt, dass dieses Gleichgewicht selbst durch die Gestalt des anziehenden Körpers bedingt wird und, insofern keine fremden Kräfte mit einwirken, dem bekannten mechanischen Gesetze unterworfen ist, dass nämlich die Vertikale eines Punktes nach der Normale eines durch ihn gelegten Ellipsoides gerichtet ist, welches mit dem anziehenden Ellipsoide homofocal ist.

Betrachten wir nun Rotationsellipsoide und ihre Meridianellipsen (Taf. V. Fig. 2.). Der erwähnte Satz lautet: Wenn man an den Punkt M einer Ellipse die Normale MN legt und

dieselbe bis zum Punkte M' einer mit ersterer homofocalen Ellipse verlängert, so nähert sich die Normale dieses letzteren Punktes $M'N'$ dem Mittelpunkte C mehr, als die Normale MN.

Man ziehe, um dies nachzuweisen, die Leitstrahlen EM, FM, EM', FM'. Wenn man bemerkt, dass die Normale einer Ellipse den Winkel der beiden sie einschliessenden Leitstrahlen halbirt und auf dem längeren Leitstrahle EM das Stück $Mf = MF$ abschneidet, so erhält man die zwei congruenten Dreiecke $M'Mf$ und $M'MF$, woraus folgt $\angle MM'f = \angle MM'F$, folglich $\angle NM'E > \angle NM'F$; also wird die Halbirungslinie des Winkels $EM'F$, d. i. die Normale im Punkte M', in dem Raume $NM'E$, also dem Mittelpunkte C näher liegen. Es ist übrigens leicht zu zeigen, dass die Abplattung des äusseren Ellipsoides kleiner ist als die des inneren. Denn, bezeichnet man mit a, b; a', b' die Halbachsen der Meridianellipsen; mit c die gemeinschaftliche lineare Excentricität; mit e, e' die respectiven numerischen Excentricitäten; mit σ, σ' die entsprechenden Abplattungen; so findet man

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2 = c^2 = a^2 e^2 = a'^2 e'^2 \qquad (1)$$

und folglich:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}, \quad \frac{b'}{a'} = \sqrt{1 - e'^2}. \qquad (2)$$

Ist nun $a < a'$, so folgt $e > e'$, indem $ae = a'e'$, woraus ferner folgt:

$$1 - e^2 < 1 - e'^2 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} < \frac{b'}{a'},$$

also

$$1 - \frac{b}{a} > 1 - \frac{b'}{a'};$$

und zuletzt:

$$\frac{a - b}{a} > \frac{a' - b'}{a'} \quad \text{oder} \quad \sigma > \sigma'.$$

Nehmen wir nun (Taf. V. Fig. 3.) auf der Verlängerung der an das Ellipsoid AMB gezogenen Normale Mm in der Entfernung $MM' = \delta$ einen Punkt M', legen durch denselben ein mit dem ersteren homofocales Ellipsoid, ziehen die Normale an dasselbe $M_1 m_1$, und suchen den Winkel α_1 zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass der Winkel α der ersten Normale Mm bekannt ist. Wenn man die Leitstrahlen OM und OM_1 zieht, so erhält man:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\alpha = (1-\sigma)^2\operatorname{tang}\alpha\,, \tag{3}$$

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{b_1{}^2}{a_1{}^2}\operatorname{tang}\alpha_1 = (1-\sigma_1)^2\operatorname{tang}\alpha_1\,, \tag{4}$$

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{r\sin\varphi + \delta\sin\alpha}{r\cos\varphi + \delta\cos\alpha}\,,$$

$$r = \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}} = \frac{a}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tang}^2\varphi}}$$

$$= \frac{a}{\cos\varphi\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\varphi}} = a\sqrt{\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)}}\,;$$

und wenn man

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\delta\cos\alpha}{r\sin\varphi} = \frac{\delta}{a}\cdot\frac{\sqrt{\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)}}{\sin\varphi} \tag{5}$$

setzt, so folgt:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{\sin\varphi\cos(\alpha-\psi)}{\cos\alpha\cos(\varphi-\psi)}\,, \tag{6}$$

woraus man successive φ, ψ, φ_1 und α_1 bestimmen kann, wenn man zuvor σ_1 berechnet hat; dies kann durch die Formeln (1), (2) erzielt werden, denn es ist:

$$(1-\sigma)^2 = 1 - e^2\,,$$

woraus

$$e = \sqrt{\sigma(2-\sigma)} \tag{7}$$

und

$$(1-\sigma_1)^2 = 1 - e_1{}^2 = 1 - \frac{a^2e^2}{a_1{}^2}\,,$$

oder näherungsweise

$$(1-\sigma_1)^2 = 1 - \left(\frac{ae}{a+\delta}\right)^2 \tag{8}$$

folgt, indem man ohne merklichen Fehler $a+\delta$ für a_1 schreiben kann.

Führt man nun noch die Umdrehung der Erde ein, so ist noch auf die Kraft $F = \frac{v_1{}^2}{\varrho_1} - \frac{v^2}{\varrho}$ Rücksicht zu nehmen, welche die Differenz der Centrifugalkräfte in den Punkten M_1 und M ausdrückt. Daraus ergiebt sich zur Bestimmung des Winkels α_2,

oder der durch Homofocalität und Rotation bedingten Richtung der Normale, die Gleichung:

$$\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{\sin\alpha_2}=\frac{F}{G},$$

woraus

$$\operatorname{tang}\left(\alpha_2-\frac{\alpha_1}{2}\right)=\frac{1+\frac{F}{G}}{1-\frac{F}{G}}\operatorname{tang}\frac{\alpha_1}{2} \tag{9}$$

folgt. Es ist ferner

$$\frac{F}{G}=\frac{\omega^2(r_1\cos\varphi_1-r\cos\varphi)}{G}=\frac{\omega^2\delta\cos\alpha}{g}\cdot\frac{r_1^2}{r^2}$$

$$=\frac{\omega^2\delta\cos\alpha}{g}\cdot\frac{\sin^2(\alpha-\varphi)}{\sin^2(\alpha-\varphi_1)}=\frac{1}{289}\cdot\frac{\delta\cos\alpha}{a}\cdot\frac{\sin^2(\alpha-\varphi)}{\sin^2(\alpha-\varphi_1)}, \tag{10}$$

wo ω die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde und g die Intensität der Schwere in M bezeichnet, und noch zu bemerken ist, dass $\frac{\omega^2 a}{g}=\frac{1}{289}$.

Wendet man obige Formeln auf ein Beispiel an, wenn nämlich: $\alpha=45^0$, $\delta=1000$ Meter und $a=6377398$ Meter, $\sigma=\frac{1}{299.153}$ $=0.003343$ angenommen wird, so findet man:

$(1-\sigma)^2=0.993325$, $\varphi=44^0\,48'\,29''$, $\psi=0^0\,0'\,32''.5$,

$\varphi_1=44^0\,48'\,29''.1$, $(1-\sigma_1)^2=0.993327$, $\sigma_1=0.003342$,

$\alpha_1=44^0\,59'\,59''.6$, $\frac{F}{G}=0.000000378$, $\alpha_1=44^0\,59'\,59''.7$.

Hieraus ergiebt sich, dass in einer Breite von 45^0 die Vertikale eines 1000 Meter über dem Erdboden befindlichen Punktes mit derjenigen des entsprechenden Punktes auf dem Erdboden einen kleinen Winkel von ohngefähr $3''$ einschliesst, und zwar so, dass die Abweichung nach dem nächsten Erdpole hin stattfindet.

Dieselben Formeln können noch dazu dienen, die Gestalt und Abplattung der Atmosphäre zu bestimmen. Wird nämlich $\delta=185000$ Meter oder $=25$ geographische Meilen angenommen, was beinahe die von G. G. Schmidt berechnete Höhe der Atmosphäre ist, so ergiebt sich für diesen Fall:

$\psi=1^0\,40'\,13''$, $\varphi_1=44^0\,48'\,48''.5$, $(1-\sigma_1)^2=0{,}993696$,

$$\sigma_1 = 0.003157 = \frac{1}{317}, \quad \alpha_1 = 44^0 59' 40''.7, \quad \frac{F}{G} = 0.000075,$$
$$\alpha_2 = 44^0 59' 51''.5.$$

Die gesuchte Abplattung Σ wird nun durch die Formel

$$\text{tang}\, 44^0 48' 48''.5 = (1 - \Sigma)^2 \,\text{tang}\, 44^0 59' 51''.5$$

bestimmt; man findet $\Sigma = 0.003209 = \frac{1}{312}$, und dieser Werth weicht nur wenig von der Abplattung der Erde ab. Schmidt findet für die Abplattung der Atmosphäre den Werth $\frac{1}{254}$; es ist jedoch zu bemerken, dass im Obigen keine Rücksicht auf die Insolation genommen wurde, wodurch die Abplattung der Atmosphäre bedeutend vergrössert wird.

XXIX.

Problemata quaedam geometrica,

proposita a

Dre. *Christiano Fr. Lindman*,
Lect. Strengnesensi.

I. De parallelogrammis circa Ellipsin datam circumscriptis.

Aequatio Ellipsis sit

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

et coordinatae puncti cujusdam extra Ellipsin α, β; aequatio tangentis per punctum α, β ductae erit

$$a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2,$$

unde

$$x=\frac{a^2(b^2\alpha\pm\beta R)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2},\quad y=\frac{b^2(a^2\beta\mp\alpha R)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2};\quad\ldots\ldots(1)$$

ubi est

$$R=\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2}.$$

E quolibet igitur puncto duae tangentes duci possunt et coordinatae punctorum contactus sunt x et y. Coordinatae punctorum, ubi tangentes per punctum $-\alpha$, $-\beta$ ductae Ellipsin contingunt, inveniuntur, si in (1) $-\alpha$, $-\beta$ pro α, β substituuntur. Coordinatis illis per x_1, y_1 : x_2, y_2; cett. designatis, invenimus aequationes tangentium:

$$y-\beta=\frac{\beta-y_1}{\alpha-x_1}(x-\alpha),\quad y-\beta=\frac{\beta-y_2}{\alpha-x_2}(x-\alpha),$$

$$y+\beta=\frac{\beta-y_1}{\alpha-x_1}(x+\alpha),\quad y+\beta=\frac{\beta-y_2}{\alpha-x_2}(x+\alpha);$$

quae, ut liquet, parallelogrammum formant. Lineae prima et quarta conveniunt in puncto, cujus coordinatae sunt

$$x'=\frac{a^2\beta}{R},\quad y'=-\frac{b^2\alpha}{R};$$

secunda et tertia in puncto, cujus coordinatae sunt

$$x''=-\frac{a^2\beta}{R},\quad y''=\frac{b^2\alpha}{R}.$$

Facile patet, diagonales per originem transire et unam esse $=2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, alteram $=\frac{2}{R}\sqrt{a^4\beta^2+b^4\alpha^2}$. Si illa diagonalis et axis abscissarum angulum $=\varphi$, haec et axis angulum $=\psi$ constituunt, invenitur

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\beta}{\alpha},\quad \operatorname{tg}\psi=-\frac{b^2\alpha}{a^2\beta},\quad \operatorname{tg}(\psi-\varphi)=-\frac{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}{\alpha\beta(a^2-b^2)},$$

$$\operatorname{Sin}(\psi-\varphi)=\frac{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.\sqrt{a^4\beta^2+b^4\alpha^2}},$$

atque ideo, posito parallelogrammo circumscripto $=P$, invenitur

$$P=\frac{2(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)}{\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2}}.\quad\ldots\ldots\ldots(2)$$

Jam quaerendum, quodnam ex omnibus his parallelogrammis minimum sit vel per quod punctum (α,β) tangentes ducendae sint, ut P minimum fiat. Nihil prorsus impedit, quominus ponamus,

punctum (α, β) in diametro quadam situm esse, quo facto, patet, esse α et β variabiles, et rationem earum constantem. Posita igitur $\beta = \alpha k$, aequ. (2) transit in

$$P = \frac{2\alpha^2(a^2k^2+b^2)}{\sqrt{\alpha^2(a^2k^2+b^2)-a^2b^2}},$$

unde, posito minimo ipsius $P = p$, valoribus coordinatarum α, β minimo convenientibus $= \alpha'$, β', solito modo reperiemus

$$p = 4ab, \quad \alpha' = \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}, \quad \beta' = \frac{abk\sqrt{2}}{\sqrt{a^2k^2+b^2}} \ldots \quad (3)$$

Postquam invenimus, ex quo puncto diametri cujusdam tangentes ducendae sint, ut minimum parallelogrammum circumscriptum oriatur, restat, ut definiamus, quodnam ex omnibus his parallelogrammis minimum sit. Quum vero valor ipsius p neque ab α et β nec a k pendeat, conjici licet, ipsum p esse minimum. Ne quid tamen dubii relinquatur, in hanc rem ulterius inquiramus. Introductis valoribus α', β' in formulis ante inventis, habebimus

$$\frac{\beta'-y_1}{\alpha'-x_1} = -\frac{b(ak+b)}{a(ak-b)}, \quad \frac{\beta'-y_2}{\alpha'-x_2} = \frac{b(ak-b)}{a(ak+b)},$$

unde

$$\frac{\beta'-y_1}{\alpha'-x_1} \cdot \frac{\beta'-y_2}{\alpha'-x_2} = -\frac{b^2}{a^2},$$

quae est notissima illa correlatio inter tangentes eorum angulorum, quos diametri conjugatae cum axi abscissarum efficiunt. Sequitur, ut parallelogrammum minimum circumscribatur, si tangentes per puncta extrema ejusdem paris diametrorum conjugatarum ducuntur, et ut omnia haec parallelogramma inter se sint aequalia. Res illa minime est ignota *), sed demonstrationem analyticam nusquam inveni.

Exterminata k in (3) positisque x, y pro α', β', prodit aequatio

$$a^2y^2 + b^2x^2 = 2a^2b^2$$

vel

$$2a^2y^2 + 2b^2x^2 = 4a^2b^2,$$

quae est aequatio loci geometrici punctorum (α', β') et Ellipsin repraesentat datae similem et altero tanto majorem, cujus axes principales sunt $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. Tangentibus igitur e puncto quodam

---

*) Vide v. c. Bourdon, Application de l'Alg. a la Geom. Paris 1837. pag. 371.

hujus Ellipsis ad Ellipsin datam ductis parallelogrammum minimum invenitur.

Postquam inventum est minimum parallelogrammum circumscriptum, quaeratur, num P quadratum fieri possit. Diagonales tum aequales sint et angulus earum $=\frac{\pi}{2}$, necesse est, id quod usu venit, sive α sive $\beta=0$ est. Posita igitur $\beta=0$, evadit altera diagonalis $=2\alpha$, altera $=\frac{2b\alpha}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}$, unde, si inter se sunt aequales, invenitur

$$\alpha=\pm\sqrt{a^2+b^2}.$$

Superficie hujus parallelogrammi $=Q$ posita, habebimus

$$Q=2(a^2+b^2)$$

et coordinatas punctorum contactus

$$x_1=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y_1=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Si igitur Ellipsis et Hyperbola eosdem habent axes $2a$, $2b$, tangentes illae per focos Hyperbolae transibunt et quadratum Q erit aequale octies potestati *), quam vocant, Hyperbolae.

II. Duabus sectionibus conicis se intus in vertice axis majoris (principalis) contingentibus, geometricum invenire locum punctorum, ubi ea pars secantis per verticem transeuntis, quae inter curvas jacet, in duas partes aequales dividitur.

Aequatio alterius sectionis ad verticem et axin principalem relatae est

$$y_1^2=2p_1x_1+q_1x_1^2,$$

alterius

$$y_2^2=2p_2x_2+q_2x_2^2.$$

Positis $y_1=r_1\operatorname{Sin}\varphi$, $x_1=r_1\operatorname{Cos}\varphi$; $y_2=r_2\operatorname{Sin}\varphi$, $x_2=r_2\operatorname{Cos}\varphi$, invenientur aequationes

---

*) De vi „potestatis" Hyperbolae non bene consentiunt scriptores. Alii, ut Klügel, Montferrier, Francoeur, quantitati $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$, alii, ut Bourdon et Garnier, quantitati $2ab$ nomen „potestatis" dederunt.

$$r_1 = \frac{2p_1 \operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}^2\varphi - q_1 \operatorname{Cos}^2\varphi}, \quad r_2 = \frac{2p_2 \operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}^2\varphi - q_2 \operatorname{Cos}^2\varphi},$$

unde

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = r = \left[\frac{p_1}{\operatorname{Sin}^2\varphi - q_1 \operatorname{Cos}^2\varphi} + \frac{p_2}{\operatorname{Sin}^2\varphi - q_2 \operatorname{Cos}^2\varphi}\right] \operatorname{Cos}\varphi. \quad (1)$$

Haec est aequatio loci quaesiti et $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ est radius vector angulo φ respondens. Curva illa, si ad coordinatas orthogonales refertur, quarti ordinis esse reperitur; quod si sectiones datae similes sunt vel, quod idem est, si $q_1 = q_2$ ponitur, locus quaesitus evadit sectio conica datis similis, cujus parameter est = medio arithmetico parametrorum $= \frac{p_1 + p_2}{2}$, atque ideo est aequatio ejus

$$y^2 = (p_1 + p_2)x + q_1 x^2. \quad (2)$$

III. **Per punctum intra circulum datum duas rectas inter se orthogonales ita ducere, ut figura inter eas et arcum ab iis abscissum maxima aut minima fiat.**

Sint coordinatae puncti dati $x = a$, $y = 0$ et aequatio circuli

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Quum vero coordinatae polares huic problemati aptissimae videantur, polus in puncto dato collocetur vel ponatur

$$x = a + \varrho \operatorname{Cos}\varphi, \quad y = \varrho \operatorname{Sin}\varphi,$$

quo facto invenitur

$$\varrho = -a \operatorname{Cos}\varphi + \sqrt{r^2 - a^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}.$$

Superficie quaesita $= Y$ posita, habebimus

$$Y = \tfrac{1}{2}\int_{-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}^{\varphi} \varrho^2 d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_{-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}^{\varphi} d\varphi\left(r^2 + a^2 \operatorname{Cos}^2\varphi - 2a \operatorname{Cos}\varphi \sqrt{r^2 - a^2 \operatorname{Sin}^2\varphi}\right)$$

$$= \frac{\pi r^2}{4} + \frac{a^2}{2}\operatorname{Sin}2\varphi - \frac{a}{2}\operatorname{Sin}\varphi\sqrt{r^2 - a^2\operatorname{Sin}^2\varphi} - \frac{a}{2}\operatorname{Cos}\varphi\sqrt{r^2 - a^2\operatorname{Cos}^2\varphi}$$

$$- \frac{r^2}{2}\left(\operatorname{Arc\,Sin}\frac{a\operatorname{Sin}\varphi}{r} + \operatorname{Arc\,Sin}\frac{a\operatorname{Cos}\varphi}{r}\right).$$

Differentiando et reductionibus quibusdam factis, reperitur

$$\frac{dY}{d\varphi}=a^2\operatorname{Cos}2\varphi-a\operatorname{Cos}\varphi\sqrt{r^2-a^2\operatorname{Sin}^2\varphi}+a\operatorname{Sin}\varphi\sqrt{r^2-a^2\operatorname{Cos}^2\varphi},$$

$$\frac{d^2Y}{d\varphi^2}=-2a^2\operatorname{Sin}2\varphi+\frac{a(r^2+a^2\operatorname{Cos}2\varphi)\operatorname{Sin}\varphi}{\sqrt{r^2-a^2\operatorname{Sin}^2\varphi}}+\frac{a(r^2-a^2\operatorname{Cos}2\varphi)\operatorname{Cos}\varphi}{\sqrt{r^2-a^2\operatorname{Cos}^2\varphi}}.$$

Prima derivata $=0$ posita suppeditat aequationem

$$a\operatorname{Cos}2\varphi-\operatorname{Cos}\varphi\sqrt{r^2-a^2\operatorname{Sin}^2\varphi}+\operatorname{Sin}\varphi\sqrt{r^2-a^2\operatorname{Cos}^2\varphi}=0,$$

quae, substituto $\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Sin}^2\varphi$ pro $\operatorname{Cos}2\varphi$, transit in

$$\operatorname{Cos}\varphi(a\operatorname{Cos}\varphi-\sqrt{r^2-a^2\operatorname{Sin}^2\varphi})=\operatorname{Sin}\varphi(a\operatorname{Sin}\varphi-\sqrt{r^2-a^2\operatorname{Cos}^2\varphi}).$$

Facile patet huic aequationi satisfieri non posse, nisi est $\operatorname{Sin}\varphi=\operatorname{Cos}\varphi$ vel $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $\varphi=\frac{5\pi}{4}$, e quibus illud minimo, hoc maximo respondet, id quod derivata secunda consideranda cognoscere licet.

XXX.

Ueber den Schwerpunkt des Vierecks und der Vielecke überhaupt.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Für die Coordinaten des Schwerpunkts eines Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ kann man sehr einfache und bemerkenswerthe Ausdrücke durch die Coordinaten der Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 finden, und daraus auch leicht eine einfache, übrigens dem Wesentlichen nach schon bekannte Construction des Schwerpunkts des Vierecks ableiten, wie ich jetzt zunächst zeigen will.

Zu dem Ende bezeichnen wir die Coordinaten der Ecken

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4$$

in Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem respective durch:

$$x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \quad x_3, y_3; \quad x_4, y_4.$$

Denken wir uns die Diagonale $A_1 A_3$ gezogen, so ist deren Gleichung:

$$1) \ldots\ldots \quad y - y_1 = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}(x - x_1),$$

und die Coordinaten der Schwerpunkte der beiden Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $A_3 A_4 A_1$ sind bekanntlich:

$$\tfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad \tfrac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

und

$$\tfrac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1), \quad \tfrac{1}{3}(y_3 + y_4 + y_1);$$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$2) \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} s_x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ s_y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \end{array} \right.$$

setzen:

$$\tfrac{1}{3}(s_x - x_4), \quad \tfrac{1}{3}(s_y - y_4)$$

und

$$\tfrac{1}{3}(s_x - x_2), \quad \tfrac{1}{3}(s_y - y_2).$$

Die Gleichung der durch diese beiden Schwerpunkte gehenden Geraden, in welcher bekanntlich der Schwerpunkt des Vierecks jederzeit liegt, ist:

$$3) \ldots \quad y - \tfrac{1}{3}(s_y - y_2) = \frac{y_2 - y_4}{x_2 - x_4}\{x - \tfrac{1}{3}(s_x - x_2)\}.$$

Denken wir uns ferner die Diagonale $A_2 A_4$ gezogen, so ist deren Gleichung:

$$4) \ldots\ldots \quad y - y_2 = \frac{y_2 - y_4}{x_2 - x_4}(x - x_2),$$

und die Coordinaten der Schwerpunkte der beiden Dreiecke $A_2 A_3 A_4$ und $A_4 A_1 A_2$ sind bekanntlich:

$$\tfrac{1}{3}(x_2 + x_3 + x_4), \quad \tfrac{1}{3}(y_2 + y_3 + y_4)$$

und

$$\tfrac{1}{3}(x_4 + x_1 + x_2), \quad \tfrac{1}{3}(y_4 + y_1 + y_2);$$

oder:

$$\tfrac{1}{3}(s_x - x_1), \quad \tfrac{1}{3}(s_y - y_1)$$

und

$$\tfrac{1}{3}(s_x - x_3),\quad \tfrac{1}{3}(s_y - y_3).$$

Die Gleichung der durch diese beiden Schwerpunkte gehenden Geraden, in welcher bekanntlich der Schwerpunkt des Vierecks gleichfalls liegt, ist:

$$5)\ \ldots\ y - \tfrac{1}{3}(s_y - y_1) = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}\{x - \tfrac{1}{3}(s_x - x_1)\}.$$

Bezeichnen wir also die Coordinaten des Schwerpunkts des Vierecks durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$; so haben wir zu deren Bestimmung nach 3) und 5) die beiden folgenden Gleichungen:

$$6)\ \ldots \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{Y} - \tfrac{1}{3}(s_y - y_2) = \dfrac{y_2 - y_4}{x_2 - x_4}\{\mathfrak{X} - \tfrac{1}{3}(s_x - x_2)\}, \\[2ex] \mathfrak{Y} - \tfrac{1}{3}(s_y - y_1) = \dfrac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}\{\mathfrak{X} - \tfrac{1}{3}(s_x - x_1)\}. \end{array}\right.$$

Bezeichnet man ferner die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden Diagonalen durch X, Y; so hat man zu deren Bestimmung nach 1) und 4) die beiden folgenden Gleichungen:

$$7)\ \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} Y - y_2 = \dfrac{y_2 - y_4}{x_2 - x_4}(X - x_2), \\[2ex] Y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}(X - x_1). \end{array}\right.$$

Stellt man nun aber, was offenbar verstattet ist, die beiden Gleichungen 6) auf folgende Art:

$$(\tfrac{1}{3}s_y - \mathfrak{Y}) - \tfrac{1}{3}y_2 = \frac{y_2 - y_4}{x_2 - x_4}\{(\tfrac{1}{3}s_x - \mathfrak{X}) - \tfrac{1}{3}x_2\},$$

$$(\tfrac{1}{3}s_y - \mathfrak{Y}) - \tfrac{1}{3}y_1 = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}\{(\tfrac{1}{3}s_x - \mathfrak{X}) - \tfrac{1}{3}x_1\};$$

die beiden Gleichungen 7) auf folgende Art:

$$\tfrac{1}{3}Y - \tfrac{1}{3}y_2 = \frac{y_2 - y_4}{x_2 - x_4}(\tfrac{1}{3}X - \tfrac{1}{3}x_2),$$

$$\tfrac{1}{3}Y - \tfrac{1}{3}y_1 = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}(\tfrac{1}{3}X - \tfrac{1}{3}x_1)$$

dar; so überzeugt man sich ohne alle weitere Rechnung durch Vergleichung dieser beiden Systeme von Gleichungen auf der Stelle von der Richtigkeit der beiden folgenden einfachen und bemerkenswerthen Gleichungen:

$$\tfrac{1}{3}s_x - \mathfrak{X} = \tfrac{1}{3}X,\quad \tfrac{1}{3}s_y - \mathfrak{Y} = \tfrac{1}{3}Y;$$

aus denen sich die folgenden merkwürdigen Ausdrücke für die Coordinaten des Schwerpunkts des Vierecks ergeben:

$$8) \ldots\ldots \mathfrak{X} = \tfrac{1}{3}(s_x - X), \quad \mathfrak{Y} = \tfrac{1}{3}(s_y - Y).$$

§. 2.

Aus den vorstehenden einfachen Formeln lässt sich eine leichte Construction des Schwerpunkts des Vierecks ableiten, wie wir jetzt zeigen wollen, wobei es genügen wird, rechtwinklige Coordinaten zu Grunde zu legen.

Zunächst schicken wir die folgende allgemeine analytisch-geometrische Betrachtung voraus, deren Resultat auch anderweitig zweckmässig Anwendung finden kann. Wenn auf einer beliebigen geraden Linie im Raume zwei Punkte $(x_0 y_0 z_0)$, $(x_1 y_1 z_1)$ gegeben sind, und von diesen beiden Punkten aus auf der Geraden zwei Strecken abgeschnitten werden, die sich wie n_0, n_1 zu einander verhalten; so wollen wir die Endpunkte dieser beiden Strecken durch $(X_0 Y_0 Z_0)$, $(X_1 Y_1 Z_1)$, und deren Entfernungen von den Punkten $(x_0 y_0 z_0)$, $(x_1 y_1 z_1)$ durch $n_0\varrho$, $n_1\varrho$ bezeichnen. Die von der einen der beiden Richtungen der gegebenen Geraden mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel seien α, β, γ. Sind dann die beiden Strecken von den Punkten $(x_0 y_0 z_0)$, $(x_1 y_1 z_1)$ aus auf der Geraden nach denselben Seiten hin abgeschnitten worden, so gelten offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander die folgenden Gleichungen:

$$X_0 = x_0 \pm n_0\varrho\cos\alpha, \quad X_1 = x_1 \pm n_1\varrho\cos\alpha;$$
$$Y_0 = y_0 \pm n_0\varrho\cos\beta, \quad Y_1 = y_1 \pm n_1\varrho\cos\beta;$$
$$Z_0 = z_0 \pm n_0\varrho\cos\gamma, \quad Z_1 = z_1 \pm n_1\varrho\cos\gamma;$$

welche auf der Stelle zu den folgenden Relationen führen:

$$n_1(X_0 - x_0) = n_0(X_1 - x_1),$$
$$n_1(Y_0 - y_0) = n_0(Y_1 - y_1),$$
$$n_1(Z_0 - z_0) = n_0(Z_1 - z_1);$$

oder:

$$n_1(X_0 - x_0) - n_0(X_1 - x_1) = 0,$$
$$n_1(Y_0 - y_0) - n_0(Y_1 - y_1) = 0,$$
$$n_1(Z_0 - z_0) - n_0(Z_1 - z_1) = 0;$$

oder:

$$n_1X_0 - n_0X_1 = n_1x_0 - n_0x_1,$$
$$n_1Y_0 - n_0Y_1 = n_1y_0 - n_0y_1,$$
$$n_1Z_0 - n_0Z_1 = n_1z_0 - n_0z_1.$$

Wenn dagegen die beiden Strecken von den Punkten $(x_0y_0z_0)$, $(x_1y_1z_1)$ aus auf der Geraden nach entgegengesetzten Seiten hin abgeschnitten worden sind, so gelten offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander die folgenden Gleichungen:

$$X_0 = x_0 \pm n_0\varrho\cos\alpha,\quad X_1 = x_1 \mp n_1\varrho\cos\alpha;$$
$$Y_0 = y_0 \pm n_0\varrho\cos\beta,\quad Y_1 = y_1 \mp n_1\varrho\cos\beta;$$
$$Z_0 = z_0 \pm n_0\varrho\cos\gamma,\quad Z_1 = z_1 \mp n_1\varrho\cos\gamma;$$

aus denen sich auf der Stelle die folgenden Relationen ergeben:

$$n_1(X_0 - x_0) = -n_0(X_1 - x_1),$$
$$n_1(Y_0 - y_0) = -n_0(Y_1 - y_1),$$
$$n_1(Z_0 - z_0) = -n_0(Z_1 - z_1);$$

oder:

$$n_1(X_0 - x_0) + n_0(X_1 - x_1) = 0,$$
$$n_1(Y_0 - y_0) + n_0(Y_1 - y_1) = 0,$$
$$n_1(Z_0 - z_0) + n_0(Z_1 - z_1) = 0;$$

oder:

$$n_1X_0 + n_0X_1 = n_1x_0 + n_0x_1,$$
$$n_1Y_0 + n_0Y_1 = n_1y_0 + n_0y_1,$$
$$n_1Z_0 + n_0Z_1 = n_1z_0 + n_0z_1.$$

Es ist also:

$$n_1X_0 \mp n_0X_1 = n_1x_0 \mp n_0x_1,$$
$$n_1Y_0 \mp n_0Y_1 = n_1y_0 \mp n_0y_1,$$
$$n_1Z_0 \mp n_0Z_1 = n_1z_0 \mp n_0z_1;$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die beiden Strecken von den Punkten $(x_0y_0z_0)$, $(x_1y_1z_1)$ aus auf der gegebenen Geraden nach denselben oder nach entgegengesetzten Seiten hin abgeschnitten worden sind. Wenn die beiden Strecken einander gleich sind und also $n_0 = n_1$ ist, so werden die vorstehenden Relationen:

$$X_0 \mp X_1 = x_0 \mp x_1,$$
$$Y_0 \mp Y_1 = y_0 \mp y_1,$$
$$Z_0 \mp Z_1 = z_0 \mp z_1;$$

mit derselben Bestimmung wegen der Zeichen wie vorher.

Wenn nun O den Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen A_1A_3 und A_2A_4 des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ (Taf. V. Fig. 5.) bezeichnet, so schneide man von A_1 und A_2 aus auf den Diagonalen A_1A_3 und A_2A_4 zwei Strecken A_1O_1 und A_2O_2 so ab, dass $A_1O_1 = A_3O$, $A_2O_2 = A_4O$ ist, und die Strecken A_1O_1, A_3O auf der Diagonale A_1A_3 von A_1 und A_3 aus, die Strecken A_2O_2, A_4O auf der Diagonale A_2A_4 von A_2 und A_4 aus nach entgegengesetzten Seiten hin liegen; dann ist jederzeit der auf bekannte Weise leicht zu construirende Schwerpunkt des durch die Punkte O, O_1, O_2 bestimmten Dreiecks OO_1O_2 der gesuchte Schwerpunkt des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$.

Um dies zu beweisen, bezeichne man, übrigens alle in §. 1. gebrauchten Bezeichnungen auch hier beibehaltend, die Coordinaten der Punkte O_1 und O_2 respective durch X_1, Y_1 und X_2, Y_2. Dann ist nach den vorher bewiesenen allgemeinen Relationen, wenn man, wie hier erforderlich, die unteren Zeichen nimmt:

$$X + X_1 = x_1 + x_3, \quad Y + Y_1 = y_1 + y_3;$$
$$X + X_2 = x_2 + x_4, \quad Y + Y_2 = y_2 + y_4;$$

also:

$$2X + X_1 + X_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = s_x,$$
$$2Y + Y_1 + Y_2 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = s_y.$$

Weil nun nach §. 1. 8)

$$\mathfrak{X} = \tfrac{1}{3}(s_x - X), \quad \mathfrak{Y} = \tfrac{1}{3}(s_y - Y)$$

ist; so ist:

$$\mathfrak{X} = \tfrac{1}{3}\{(2X + X_1 + X_2) - X\} = \tfrac{1}{3}(X + X_1 + X_2),$$
$$\mathfrak{Y} = \tfrac{1}{3}\{(2Y + Y_1 + Y_2) - Y\} = \tfrac{1}{3}(Y + Y_1 + Y_2);$$

also nach der bekannten Bestimmung des Schwerpunkts des Dreiecks durch die Coordinaten seiner Ecken der Schwerpunkt $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ der Schwerpunkt des Dreiecks OO_1O_2, wie behauptet wurde.

Natürlich kann man die Construction auch so abändern, dass man, wie in Taf. V. Fig. 6., etwa nur $A_1O_1 = A_3O$ macht, dann A_2A_4 in M halbirt, MO_1 zieht, und $MS = \tfrac{1}{3}MO_1$ macht, wo dann S der gesuchte Schwerpunkt des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ ist. So findet sich die Construction u. A. in „Elemente der Mechanik und Maschinenlehre von W. Schrader. Thl. I. Halle. 1860. S. 62.“, wo aber die Darstellung eine ziemlich oberflächliche ist, indem die bei dieser Construction nothwendig zu neh-

menden Berücksichtigungen nicht mit gehöriger Deutlichkeit und Schärfe hervorgehoben worden sind, auch der hier vorzugsweise interessanten Beziehung zu dem Dreieck OO_1O_2 keine besondere Erwähnung gethan worden ist.

§. 3.

Wir denken uns jetzt ein beliebiges *n*eck

$$A_1A_2A_3A_4\ldots.A_n,$$

und bezeichnen dessen Inhalt durch J_n, die Coordinaten seines Schwerpunkts in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xy durch X_n, Y_n. Ziehen wir die Diagonale A_1A_{n-1}, so erhalten wir das $(n-1)$eck

$$A_1A_2A_3A_4\ldots.A_{n-1}$$

und das Dreieck $A_{n-1}A_nA_1$, welches letztere entweder ausserhalb oder innerhalb des ersteren liegt; den Flächeninhalt dieses Dreiecks bezeichnen wir durch

$$\underset{n-1,\,n,\,1}{D}$$

und die Coordinaten seines Schwerpunkts durch

$$\underset{n-1,\,n,\,1}{X},\quad \underset{n-1,\,n,\,1}{Y}.$$

Liegt das Dreieck $A_{n-1}A_nA_1$ ausserhalb des $(n-1)$ecks

$$A_1A_2A_3A_4\ldots.A_{n-1},$$

so hat man nach der Lehre vom Schwerpunkte die folgenden Gleichungen:

$$J_nX_n=J_{n-1}X_{n-1}+\underset{n-1,\,n,\,1}{D}\,.\,\underset{n-1,\,n,\,1}{X},$$

$$J_nY_n=J_{n-1}Y_{n-1}+\underset{n-1,\,n,\,1}{D}\,.\,\underset{n-1,\,n,\,1}{Y};$$

liegt dagegen das Dreieck $A_{n-1}A_nA_1$ innerhalb des $(n-1)$ecks

$$A_1A_2A_3A_4\ldots.A_{n-1},$$

so haben wir nach der Lehre vom Schwerpunkte die folgenden Gleichungen:

$$J_{n-1}X_{n-1}=J_nX_n+\underset{n-1,\,n,\,1}{D}\,.\,\underset{n-1,\,n,\,1}{X},$$

$$J_{n-1}Y_{n-1}=J_nY_n+\underset{n-1.\,n,\,1}{D}\,.\,\underset{n-1,\,n,\,1}{Y};$$

oder:

$$J_n X_n = J_{n-1} X_{n-1} - \underset{n-1,\,n,\,1}{D} \cdot \underset{n-1,\,n,\,1}{X},$$

$$J_n Y_n = J_{n-1} Y_{n-1} - \underset{n-1,\,n,\,1}{D} \cdot \underset{n-1,\,n,\,1}{Y};$$

also ist:

$$1)\ \ldots\ \begin{cases} J_n X_n = J_{n-1} X_{n-1} \pm \underset{n-1,\,n,\,1}{D} \cdot \underset{n-1,\,n,\,1}{X}, \\ J_n Y_n = J_{n-1} Y_{n-1} \pm \underset{n-1,\,n,\,1}{D} \cdot \underset{n-1,\,n,\,1}{Y}; \end{cases}$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem das Dreieck $A_{n-1} A_n A_1$, dessen Flächeninhalt

$$\underset{n-1,\,n,\,1}{D}$$

ist, ausserhalb oder innerhalb des $(n-1)$ecks

$$A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots . A_{n-1}$$

liegt.

Der Kürze wegen wollen wir jetzt:

$$2)\ \ldots\ J_n' = \begin{array}{ll} x_1(y_n - y_2) & = -y_1(x_n - x_2) \\ + x_2(y_1 - y_3) & \quad -y_2(x_1 - x_3) \\ + x_3(y_2 - y_4) & \quad -y_3(x_2 - x_4) \\ \text{u. s. w.} & \quad \text{u. s. w.} \\ + x_{n-1}(y_{n-2} - y_n) & \quad -y_{n-1}(x_{n-2} - x_n) \\ + x_n(y_{n-1} - y_1) & \quad -y_n(x_{n-1} - x_1) \end{array}$$

und

$$3)\ \ldots\ \underset{n-1,\,n,\,1}{D'} = \begin{array}{ll} x_{n-1}(y_1 - y_n) & = -y_{n-1}(x_1 - x_n) \\ + x_n(y_{n-1} - y_1) & \quad -y_n(x_{n-1} - x_1) \\ + x_1(y_n - y_{n-1}) & \quad -y_1(x_n - x_{n-1}) \end{array}$$

setzen.

Wenn das Dreieck $A_{n-1} A_n A_1$ ausserhalb des $(n-1)$ecks

$$A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots . A_{n-1}$$

liegt, so ist *) mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

---

*) Hierbei ist überall die Abhandlung Thl. XXXVIII. Nr. XII. zu vergleichen.

$$2J_n = \mp J_n', \quad 2J_{n-1} = \mp J_{n-1}', \quad 2.\underset{n-1,\,n,\,1}{D} = \mp \underset{n-1,\,n,\,1}{D'};$$

wenn aber das Dreieck $A_{n-1}A_nA_1$ innerhalb des $(n-1)$ecks

$$A_1A_2A_3A_4 \ldots . A_{n-1}$$

liegt, so ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$2J_n = \mp J_n', \quad 2J_{n-1} = \mp J_{n-1}', \quad 2.\underset{n-1,\,n,\,1}{D} = \pm \underset{n-1,\,n,\,1}{D'};$$

also ist nach 1) offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$4) \ldots . \left\{\begin{array}{l} J_n' X_n = J_{n-1}' X_{n-1} + \underset{n-1,\,n,\,1}{D'} . \underset{n-1,\,n,\,1}{X}, \\ J_n' Y_n = J_{n-1}' Y_{n-1} + \underset{n-1,\,n,\,1}{D'} . \underset{n-1,\,n,\,1}{Y}. \end{array}\right.$$

§. 4.

Die vorstehenden allgemeinen Formeln (§. 3. 4)) wollen wir zuerst wieder auf das Viereck anwenden. In diesem Falle ist $n=4$, also nach §. 3. 2) und §. 3. 3):

$$\begin{aligned} J_4' = \quad & x_1(y_4-y_2) = -y_1(x_4-x_2) \\ & +x_2(y_1-y_3) \quad -y_2(x_1-x_3) \\ & +x_3(y_2-y_4) \quad -y_3(x_2-x_4) \\ & +x_4(y_3-y_1) \quad -y_4(x_3-x_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3' = \quad & x_1(y_3-y_2) = -y_1(x_3-x_2) \\ & +x_2(y_1-y_3) \quad -y_2(x_1-x_3) \\ & +x_3(y_2-y_1) \quad -y_3(x_2-x_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underset{3,\,4,\,1}{D'} = \quad & x_3(y_1-y_4) = -y_3(x_1-x_4) \\ & +x_4(y_3-y_1) \quad -y_4(x_3-x_1) \\ & +x_1(y_4-y_3) \quad -y_1(x_4-x_3). \end{aligned}$$

Ferner ist nach den bekannten Formeln für die Coordinaten des Schwerpunkts des Dreiecks durch die Coordinaten der Ecken:

$$X_3 = \tfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \quad Y_3 = \tfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$$

und

$$\underset{3,\,4,\,1}{X} = \tfrac{1}{3}(x_3+x_4+x_1), \quad \underset{3,\,4,\,1}{Y} = \tfrac{1}{3}(y_3+y_4+y_1).$$

Also ist nach §. 3. 4):

$$\{y_1(x_4-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_4)+y_4(x_3-x_1)\}X_4$$
$$=\tfrac{1}{3}\{y_1(x_3-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_1)\}(x_1+x_2+x_3)$$
$$+\tfrac{1}{3}\{y_3(x_1-x_4)+y_4(x_3-x_1)+y_1(x_4-x_3)\}(x_3+x_4+x_1),$$

$$\{x_1(y_4-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_4)+x_4(y_3-y_1)\}Y_4$$
$$=\tfrac{1}{3}\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\}(y_1+y_2+y_3)$$
$$+\tfrac{1}{3}\{x_3(y_1-y_4)+x_4(y_3-y_1)+x_1(y_4-y_3)\}(y_3+y_4+y_1);$$

woraus sich mittelst leichter Rechnung die folgenden Formeln ergeben:

5)

$$\{y_1(x_4-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_4)+y_4(x_3-x_1)\}X_4$$
$$=\tfrac{1}{3}y_1(x_4x_4-x_2x_2+x_1x_4-x_1x_2)$$
$$+\tfrac{1}{3}y_2(x_1x_1-x_3x_3+x_2x_1-x_2x_3)$$
$$+\tfrac{1}{3}y_3(x_2x_2-x_4x_4+x_3x_2-x_3x_4)$$
$$+\tfrac{1}{3}y_4(x_3x_3-x_1x_1+x_4x_3-x_4x_1),$$

$$\{x_1(y_4-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_4)+x_4(y_3-y_1)\}Y_4$$
$$=\tfrac{1}{3}x_1(y_4y_4-y_2y_2+y_1y_4-y_1y_2)$$
$$+\tfrac{1}{3}x_2(y_1y_1-y_3y_3+y_2y_1-y_2y_3)$$
$$+\tfrac{1}{3}x_3(y_2y_2-y_4y_4+y_3y_2-y_3y_4)$$
$$+\tfrac{1}{3}x_4(y_3y_3-y_1y_1+y_4y_3-y_4y_1)$$

oder:

6)

$$\{y_1(x_4-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_4)+y_4(x_3-x_1)\}X_4$$
$$=\tfrac{1}{3}y_1(x_4-x_2)(x_4+x_2+x_1)$$
$$+\tfrac{1}{3}y_2(x_1-x_3)(x_1+x_3+x_2)$$
$$+\tfrac{1}{3}y_3(x_2-x_4)(x_2+x_4+x_3)$$
$$+\tfrac{1}{3}y_4(x_3-x_1)(x_3+x_1+x_4),$$

$$\{x_1(y_4-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_4)+x_4(y_3-y_1)\}Y_4$$
$$=\tfrac{1}{3}x_1(y_4-y_2)(y_4+y_2+y_1)$$
$$+\tfrac{1}{3}x_2(y_1-y_3)(y_1+y_3+y_2)$$
$$+\tfrac{1}{3}x_3(y_2-y_4)(y_2+y_4+y_3)$$
$$+\tfrac{1}{3}x_4(y_3-y_1)(y_3+y_1+y_4).$$

Diese beiden Formeln lassen sich auch auf folgende Art darstellen:

7)

$$\{y_1(x_4-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_4)+y_4(x_3-x_1)\}X_4$$
$$=\tfrac{1}{3}\{y_1(x_4-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_4)+y_4(x_3-x_1)\}s_x$$
$$-\tfrac{1}{3}y_1(x_4-x_2)x_3$$
$$-\tfrac{1}{3}y_2(x_1-x_3)x_4$$
$$-\tfrac{1}{3}y_3(x_2-x_4)x_1$$
$$-\tfrac{1}{3}y_4(x_3-x_1)x_2,$$

$$\{x_1(y_4-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_4)+x_4(y_3-y_1)\}Y_4$$
$$=\tfrac{1}{3}\{x_1(y_4-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_4)+x_4(y_3-y_1)\}s_y$$
$$-\tfrac{1}{3}x_1(y_4-y_2)y_3$$
$$-\tfrac{1}{3}x_2(y_1-y_3)y_4$$
$$-\tfrac{1}{3}x_3(y_2-y_4)y_1$$
$$-\tfrac{1}{3}x_4(y_3-y_1)y_2.$$

Nach §. 1. 7) müssen die Coordinaten X, Y des Durchschnittspunktes der Diagonalen des Vierecks mittelst der beiden folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$Y-y_2=\frac{y_2-y_4}{x_2-x_4}(X-x_2),$$

$$Y-y_1=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(X-x_1).$$

Löst man diese Gleichungen auf gewöhnliche Weise auf, so erhält man:

$$X=\frac{y_1(x_4-x_2)x_3+y_2(x_1-x_3)x_4+y_3(x_2-x_4)x_1+y_4(x_3-x_1)x_2}{y_1(x_4-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_4)+y_4(x_3-x_1)},$$

$$Y=\frac{x_1(y_4-y_2)y_3+x_2(y_1-y_3)y_4+x_3(y_2-y_4)y_1+x_4(y_3-y_1)y_2}{x_1(y_4-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_4)+x_4(y_3-y_1)};$$

also ist nach dem Obigen offenbar:

$$X_4=\tfrac{1}{3}s_x-\tfrac{1}{3}X=\tfrac{1}{3}(s_x-X),$$
$$Y_4=\tfrac{1}{3}s_y-\tfrac{1}{3}Y=\tfrac{1}{3}(s_y-Y);$$

folglich nach §. 1. 8):

$$\mathfrak{X}=X_4,\quad \mathfrak{Y}=Y_4;$$

wie es sein muss.

Offenbar ist nach Vorstehendem auch:

$$X=\frac{(x_4-x_2)(y_1x_3-x_1y_3)+(x_1-x_3)(y_2x_4-x_2y_4)}{(x_4-x_2)(y_1-y_3)+(x_1-x_3)(y_2-y_4)},$$

$$Y=\frac{(y_4-y_2)(x_1y_3-y_1x_3)+(y_1-y_3)(x_2y_4-y_2x_4)}{(y_4-y_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_3)(x_2-x_4)}$$

oder:

$$X=-\frac{(x_2-x_4)(x_1y_3-y_1x_3)-(x_1-x_3)(x_2y_4-y_2x_4)}{(x_2-x_4)(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y_2-y_4)},$$

$$Y=-\frac{(y_2-y_4)(x_1y_3-y_1x_3)-(y_1-y_3)(x_2y_4-y_2x_4)}{(x_2-x_4)(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y_2-y_4)};$$

also, vollständig entwickelt dargestellt:

8)

$$X_4=\tfrac{1}{3}\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+x_3+x_4 \\ +\dfrac{(x_1-x_3)(x_2y_4-y_2x_4)-(x_2-x_4)(x_1y_3-y_1x_3)}{(x_1-x_3)(y_2-y_4)-(x_2-x_4)(y_1-y_3)} \end{array}\right\},$$

$$Y_4=\tfrac{1}{3}\left\{\begin{array}{c} y_1+y_2+y_3+y_4 \\ +\dfrac{(y_1-y_3)(x_2y_4-y_2x_4)-(y_2-y_4)(x_1y_3-y_1x_3)}{(x_1-x_3)(y_2-y_4)-(x_2-x_4)(y_1-y_3)} \end{array}\right\};$$

wo in den Zählern und Nennern der obigen Ausdrücke von X, Y die Zeichen umgekehrt worden sind.

§. 5.

Nach diesen besonderen Betrachtungen über den Schwerpunkt des Vierecks wollen wir nun noch, unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, allgemeine Formeln für die Coordinaten des Schwerpunkts jedes $n$ecks entwickeln, zu denen wir mittelst der Relationen §. 3. 4) ohne Schwierigkeit gelangen können. Zu dem Ende wollen wir aber zuvörderst den genannten Relationen einen etwas veränderten Ausdruck geben. Setzen wir nämlich:

$$1)\qquad \begin{array}{ll} J_n'=\;\; x_1(y_n-y_2), & J_n''=\;\; y_1(x_n-x_2) \\ \quad +x_2(y_1-y_3) & \quad +y_2(x_1-x_3) \\ \quad +x_3(y_2-y_4) & \quad +y_3(x_2-x_4) \\ \quad \text{u. s. w.} & \quad \text{u. s. w.} \\ \quad +x_{n-1}(y_{n-2}-y_n) & \quad +y_{n-1}(x_{n-2}-x_n) \\ \quad +x_n(y_{n-1}-y_1) & \quad +y_n(x_{n-1}-x_1) \end{array}$$

und

$$2)\quad \underset{n-1,\,n,\,1}{D'} = x_{n-1}(y_1 - y_n) + x_n(y_{n-1} - y_1) + x_1(y_n - y_{n-1}), \quad \underset{n-1,\,n,\,1}{D''} = y_{n-1}(x_1 - x_n) + y_n(x_{n-1} - x_1) + y_1(x_n - x_{n-1}),$$

wo

$$J_n' + J_n'' = 0, \quad \underset{n-1,\,n,\,1}{D'} + \underset{n-1,\,n,\,1}{D''} = 0$$

ist, so können wir die Relationen §. 3. 4) offenbar auch auf folgende Art schreiben:

$$3) \ldots \begin{cases} J_n'' X_n = J_{n-1}'' X_{n-1} + \underset{n-1,\,n,\,1}{D''} \cdot \underset{n-1,\,n,\,1}{X}, \\ J_n' Y_n = J_{n-1}' Y_{n-1} + \underset{n-1,\,n,\,1}{D'} \cdot \underset{n-1,\,n,\,1}{Y}. \end{cases}$$

Setzen wir nun zuerst wieder $n = 4$, so ist:

$$J_4'' X_4 = J_3'' X_3 + \underset{3,\,4,\,1}{D''} \cdot \underset{3,\,4,\,1}{X},$$

$$J_4' Y_4 = J_3' Y_3 + \underset{3,\,4,\,1}{D'} \cdot \underset{3,\,4,\,1}{Y};$$

also nach 1) und 2):

$$J_4'' X_4 = \left\{\begin{array}{l} y_1(x_3 - x_2) \\ + y_2(x_1 - x_3) \\ + y_3(x_2 - x_1) \end{array}\right\} \cdot \tfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + \left\{\begin{array}{l} y_3(x_1 - x_4) \\ + y_4(x_3 - x_1) \\ + y_1(x_4 - x_3) \end{array}\right\} \cdot \tfrac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_1),$$

$$J_4' Y_4 = \left\{\begin{array}{l} x_1(y_3 - y_2) \\ + x_2(y_1 - y_3) \\ + x_3(y_2 - y_1) \end{array}\right\} \cdot \tfrac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) + \left\{\begin{array}{l} x_3(y_1 - y_4) \\ + x_4(y_3 - y_1) \\ + x_1(y_4 - y_3) \end{array}\right\} \cdot \tfrac{1}{3}(y_3 + y_4 + y_1).$$

Nun findet aber, wie eine leichte Rechnung sogleich zeigt, zwischen vier Grössen a, b, c, d immer die Relation:

4) $(a-b)(a+b+d)+(b-c)(b+c+d)+(c-a)(c+a+d)=0$

Statt *); also ist:

$$\left.\begin{array}{r}(x_2-x_3)(x_2+x_3+x_1)\\+(x_3-x_4)(x_3+x_4+x_1)\\+(x_4-x_2)(x_4+x_2+x_1)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}(x_1-x_2)(x_1+x_2+x_3)\\+(x_2-x_4)(x_2+x_4+x_3)\\+(x_4-x_1)(x_4+x_1+x_3)\end{array}\right\}=0;$$

also:

$$(x_3-x_2)(x_1+x_2+x_3)+(x_4-x_3)(x_3+x_4+x_1)$$
$$=(x_4-x_2)(x_4+x_2+x_1),$$

$$(x_2-x_1)(x_1+x_2+x_3)+(x_1-x_4)(x_3+x_4+x_1)$$
$$=(x_2-x_4)(x_2+x_4+x_3);$$

und eben so, wenn man y für x schreibt; folglich nach dem Obigen:

5)

$$\begin{aligned}J_4'' X_4 = \ & \tfrac{1}{3}y_1(x_4-x_2)(x_4+x_2+x_1)\\&+\tfrac{1}{3}y_2(x_1-x_3)(x_1+x_3+x_2)\\&+\tfrac{1}{3}y_3(x_2-x_4)(x_2+x_4+x_3)\\&+\tfrac{1}{3}y_4(x_3-x_1)(x_3+x_1+x_4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_4' Y_4 = \ & \tfrac{1}{3}x_1(y_4-y_2)(y_4+y_2+y_1)\\&+\tfrac{1}{3}x_2(y_1-y_3)(y_1+y_3+y_2)\\&+\tfrac{1}{3}x_3(y_2-y_4)(y_2+y_4+y_3)\\&+\tfrac{1}{3}x_4(y_3-y_1)(y_3+y_1+y_4);\end{aligned}$$

welche Ausdrücke ganz mit den in §. 4. gefundenen Formeln übereinstimmen.

Für $n=5$ ist nach 3):

$$J_5'' X_5 = J_4'' X_4 + \underset{4,5,1}{D''} \,.\, \underset{4,5,1}{X},$$

$$J_5' Y_5 = J_4' Y_4 + \underset{4,5,1}{D'} \,.\, \underset{4,5,1}{Y};$$

---

*) Die Richtigkeit dieser Relation erhellet auf der Stelle, wenn man die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens unter der Form

$$(a^2-b^2)+(b^2-c^2)+(c^2-d^2)+\{(a-b)+(b-c)+(c-a)\}d$$

schreibt.

also nach dem Vorhergehenden:

$$J_5'' X_5 = \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{3}y_1(x_4-x_2)(x_4+x_2+x_1) \\ +\tfrac{1}{3}y_2(x_1-x_3)(x_1+x_3+x_2) \\ +\tfrac{1}{3}y_3(x_2-x_4)(x_2+x_4+x_3) \\ +\tfrac{1}{3}y_4(x_3-x_1)(x_3+x_1+x_4) \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} y_4(x_1-x_5) \\ +y_5(x_4-x_1) \\ +y_1(x_5-x_4) \end{array}\right\}\cdot\tfrac{1}{3}(x_4+x_5+x_1),$$

$$J_5' Y_5 = \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{3}x_1(y_4-y_2)(y_4+y_2+y_1) \\ +\tfrac{1}{3}x_2(y_1-y_3)(y_1+y_3+y_2) \\ +\tfrac{1}{3}x_3(y_2-y_4)(y_2+y_4+y_3) \\ +\tfrac{1}{3}x_4(y_3-y_1)(y_3+y_1+y_4) \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} x_4(y_1-y_5) \\ +x_5(y_4-y_1) \\ +x_1(y_5-y_4) \end{array}\right\}\cdot\tfrac{1}{3}(y_4+y_5+y_1).$$

Nach der Relation 4) ist aber:

$$\left.\begin{array}{l} (x_2-x_4)(x_2+x_4+x_1) \\ +(x_4-x_5)(x_4+x_5+x_1) \\ +(x_5-x_2)(x_5+x_2+x_1) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} (x_1-x_3)(x_1+x_3+x_4) \\ +(x_3-x_5)(x_3+x_5+x_4) \\ +(x_5-x_1)(x_5+x_1+x_4) \end{array}\right\} = 0;$$

also:

$$\begin{array}{c} (x_4-x_2)(x_4+x_2+x_1)+(x_5-x_4)(x_4+x_5+x_1) \\ =(x_5-x_2)(x_5+x_2+x_1), \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (x_3-x_1)(x_3+x_1+x_4)+(x_1-x_5)(x_4+x_5+x_1) \\ =(x_3-x_5)(x_3+x_5+x_4); \end{array}$$

und eben so, wenn man y für x setzt; folglich nach dem Obigen:

6)

$$\begin{array}{rl} J_5'' X_5 = & \tfrac{1}{3}y_1(x_5-x_2)(x_5+x_2+x_1) \\ & +\tfrac{1}{3}y_2(x_1-x_3)(x_1+x_3+x_2) \\ & +\tfrac{1}{3}y_3(x_2-x_4)(x_2+x_4+x_3) \\ & +\tfrac{1}{3}y_4(x_3-x_5)(x_3+x_5+x_4) \\ & +\tfrac{1}{3}y_5(x_4-x_1)(x_4+x_1+x_5), \end{array}$$

$$J_5' Y_5 = \tfrac{1}{3}x_1(y_5-y_2)(y_5+y_2+y_1) + \tfrac{1}{3}x_2(y_1-y_3)(y_1+y_3+y_2) + \tfrac{1}{3}x_3(y_2-y_4)(y_2+y_4+y_3) + \tfrac{1}{3}x_4(y_3-y_5)(y_3+y_5+y_4) + \tfrac{1}{3}x_5(y_4-y_1)(y_4+y_1+y_5).$$

Für $n=6$ ist nach 3):

$$J_6'' X_6 = J_5'' X_5 + \underset{5,6,1}{D''} \cdot \underset{5,6,1}{X},$$

$$J_6' Y_6 = J_5' Y_5 + \underset{5,6,1}{D'} \cdot \underset{5,6,1}{Y};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$J_6'' X_6 = \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{3}y_1(x_5-x_2)(x_5+x_2+x_1) \\ +\tfrac{1}{3}y_2(x_1-x_3)(x_1+x_3+x_2) \\ +\tfrac{1}{3}y_3(x_2-x_4)(x_2+x_4+x_3) \\ +\tfrac{1}{3}y_4(x_3-x_5)(x_3+x_5+x_4) \\ +\tfrac{1}{3}y_5(x_4-x_1)(x_4+x_1+x_5) \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} y_5(x_1-x_6) \\ +y_6(x_5-x_1) \\ +y_1(x_6-x_5) \end{array}\right\} \cdot \tfrac{1}{3}(x_5+x_6+x_1),$$

$$J_6' Y_6 = \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{3}x_1(y_5-y_2)(y_5+y_2+y_1) \\ +\tfrac{1}{3}x_2(y_1-y_3)(y_1+y_3+y_2) \\ +\tfrac{1}{3}x_3(y_2-y_4)(y_2+y_4+y_3) \\ +\tfrac{1}{3}x_4(y_3-y_5)(y_3+y_5+y_4) \\ +\tfrac{1}{3}x_5(y_4-y_1)(y_4+y_1+y_5) \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} x_5(y_1-y_6) \\ +x_6(y_5-y_1) \\ +x_1(y_6-y_5) \end{array}\right\} \cdot \tfrac{1}{3}(y_5+y_6+y_1).$$

Nach der Relation 4) ist aber:

$$\left.\begin{array}{l} (x_2-x_5)(x_2+x_5+x_1) \\ +(x_5-x_6)(x_5+x_6+x_1) \\ +(x_6-x_2)(x_6+x_2+x_1) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} (x_1-x_4)(x_1+x_4+x_5) \\ +(x_4-x_6)(x_4+x_6+x_5) \\ +(x_6-x_1)(x_6+x_1+x_5) \end{array}\right\} = 0;$$

also:

$$(x_5-x_2)(x_5+x_2+x_1)+(x_6-x_5)(x_5+x_6+x_1)=(x_6-x_2)(x_6+x_2+x_1),$$

$$(x_4-x_1)(x_4+x_1+x_5)+(x_1-x_6)(x_5+x_6+x_1)=(x_4-x_6)(x_4+x_6+x_5);$$

und eben so, wenn man y für x setzt; folglich nach dem Obigen:

7)

$$\begin{aligned}
J_6'' X_6 = \; & \tfrac{1}{3}y_1(x_6-x_2)(x_6+x_2+x_1)\\
&+\tfrac{1}{3}y_2(x_1-x_3)(x_1+x_3+x_2)\\
&+\tfrac{1}{3}y_3(x_2-x_4)(x_2+x_4+x_3)\\
&+\tfrac{1}{3}y_4(x_3-x_5)(x_3+x_5+x_4)\\
&+\tfrac{1}{3}y_5(x_4-x_6)(x_4+x_6+x_5)\\
&+\tfrac{1}{3}y_6(x_5-x_1)(x_5+x_1+x_6),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_6' Y_6 = \; & \tfrac{1}{3}x_1(y_6-y_2)(y_6+y_2+y_1)\\
&+\tfrac{1}{3}x_2(y_1-y_3)(y_1+y_3+y_2)\\
&+\tfrac{1}{3}x_3(y_2-y_4)(y_2+y_4+y_3)\\
&+\tfrac{1}{3}x_4(y_3-y_5)(y_3+y_5+y_4)\\
&+\tfrac{1}{3}x_5(y_4-y_6)(y_4+y_6+y_5)\\
&+\tfrac{1}{3}x_6(y_5-y_1)(y_5+y_1+y_5).
\end{aligned}$$

Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel. Allgemein ist:

8)

$$\begin{aligned}
J_n'' X_n = \; & \tfrac{1}{3}y_1(x_n-x_2)(x_n+x_2+x_1)\\
&+\tfrac{1}{3}y_2(x_1-x_3)(x_1+x_3+x_2)\\
&+\tfrac{1}{3}y_3(x_2-x_4)(x_2+x_4+x_3)\\
&+\tfrac{1}{3}y_4(x_3-x_5)(x_3+x_5+x_4)\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&+\tfrac{1}{3}y_{n-2}(x_{n-3}-x_{n-1})(x_{n-3}+x_{n-1}+x_{n-2})\\
&+\tfrac{1}{3}y_{n-1}(x_{n-2}-x_n)(x_{n-2}+x_n+x_{n-1})\\
&+\tfrac{1}{3}y_n(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}+x_1+x_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_n' Y_n = \; & \tfrac{1}{3}x_1(y_n-y_2)(y_n+y_2+y_1)\\
&+\tfrac{1}{3}x_2(y_1-y_3)(y_1+y_3+y_2)\\
&+\tfrac{1}{3}x_3(y_2-y_4)(y_2+y_4+y_3)\\
&+\tfrac{1}{3}x_4(y_3-y_4)(y_3+y_5+y_4)\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&+\tfrac{1}{3}x_{n-2}(y_{n-3}-y_{n-1})(y_{n-3}+y_{n-1}+y_{n-2})\\
&+\tfrac{1}{3}x_{n-1}(y_{n-2}-y_n)(y_{n-2}+y_n+y_{n-1})\\
&+\tfrac{1}{3}x_n(y_{n-1}-y_1)(y_{n-1}+y_1+y_n);
\end{aligned}$$

wie man durch den Schluss von n auf $n+1$ leicht beweisen kann, was aber hier nicht weiter ausgeführt zu werden braucht. Für J_n' und J_n'' hat man die Ausdrücke 1) zu setzen.

Für $n=3$ erhält man aus den Formeln 1) und 8):

$$\begin{aligned}\{y_1(x_3-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_1)\}X_3 \\ = \tfrac{1}{3}y_1(x_3-x_2)(x_3+x_2+x_1) \\ +\tfrac{1}{3}y_2(x_1-x_3)(x_1+x_3+x_2) \\ +\tfrac{1}{3}y_3(x_2-x_1)(x_2+x_1+x_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\}Y_3 \\ = \tfrac{1}{3}x_1(y_3-y_2)(y_3+y_2+y_1) \\ +\tfrac{1}{3}x_2(y_1-y_3)(y_1+y_3+y_2) \\ +\tfrac{1}{3}x_3(y_2-y_1)(y_2+y_1+y_3);\end{aligned}$$

folglich:

$$X_3=\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \qquad Y_3=\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3);$$

so dass also die allgemeinen Formeln 5) selbst noch für das Dreieck gelten.

Die Form, welche ich den allgemeinen Formeln 8) gegeben habe, unterscheidet sich von der Form, welche man wohl sonst den Formeln für den Schwerpunkt eines beliebigen Vielecks gegeben hat *); ich halte aber die von mir oben gewählte Form für die bequemste zum Behufe der Rechnung. Jedoch habe ich nicht hauptsächlich deshalb diese Entwickelungen hier mitgetheilt, sondern hauptsächlich der von mir gegebenen Beweise wegen, weil dieselben nach meiner Meinung meistens nicht mit erforderlicher Strenge und Evidenz geführt werden.

Die Nenner J_n'', J_n' von X_n, Y_n werden nach 1) auf folgende Art gebildet:

$$\begin{aligned}&y_1(x_n-x_2) && \text{und} \quad && x_1(y_n-y_2)\\ &+y_2(x_1-x_3) && && +x_2(y_1-y_3)\\ &+y_3(x_2-x_4) && && +x_3(y_2-y_4)\\ &+y_4(x_3-x_5) && && +x_4(y_3-y_5)\\ &\quad\text{u. s. w.} && && \quad\text{u. s. w.}\\ &+y_{n-2}(x_{n-3}-x_{n-1}) && && +x_{n-2}(y_{n-3}-y_{n-1})\\ &+y_{n-1}(x_{n-2}-x_n) && && +x_{n-1}(y_{n-2}-y_n)\\ &+y_n(x_{n-1}-x_1) && && +x_n(y_{n-1}-y_1),\end{aligned}$$

) M. s. z. B. Mathematische Tabellen, Formeln u. s. w. von H. Hertzer. Berlin. 1864. S. 293. Nr. 16.

und die entsprechenden Zähler erhält man, wenn man die einzelnen Glieder der vorstehenden Nenner nach der Reihe mit

$$\begin{array}{lcl} x_n+x_2+x_1, & \text{und} & y_n+y_2+y_1, \\ x_1+x_3+x_2, & & y_1+y_3+y_2, \\ x_2+x_4+x_3, & & y_2+y_4+y_3, \\ x_3+x_5+x_4, & & y_3+y_5+y_4, \\ \text{u. s. w.} & & \text{u. s. w.} \\ x_{n-3}+x_{n-1}+x_{n-2}, & & y_{n-3}+y_{n-1}+y_{n-2}, \\ x_{n-2}+x_n+x_{n-1}, & & y_{n-2}+y_n+y_{n-1}, \\ x_{n-1}+x_1+x_n & & y_{n-1}+y_1+y_n \end{array}$$

multiplicirt; die auf diese Art erhaltenen Brüche aber zuletzt noch durch 3 dividirt.

Bei der Berechnung von X_n, und natürlich eben so bei der Berechnung von Y_n, verfährt man am Besten nach folgendem Rechnungs-Schema:

$$\begin{array}{lllllll} x_n, & x_1, & x_2, & x_3, \ldots, & x_{n-3}, & x_{n-2}, & x_{n-1} \\ x_2, & x_3, & x_4, & x_5, \ldots, & x_{n-1}, & x_n, & x_1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \ldots, & x_{n-2}, & x_{n-1}, & x_n \end{array}$$

woraus man durch Subtraction und Addition, unter Beifügung der Reihe der y sogleich die folgenden Reihen ableitet:

$$\begin{array}{lllll} x_n-x_2, & x_1-x_3, & x_2-x_4, \ldots, & x_{n-2}-x_n, & x_{n-1}-x_1 \\ x_n+x_2+x_1, & x_1+x_3+x_2, & x_2+x_4+x_3, \ldots, & x_{n-2}+x_n+x_{n-1}, & x_{n-1}+x_1+x_n \\ y_1, & y_2, & y_3, \ldots, & y_{n-1}, & y_n; \end{array}$$

woraus man dann durch Multiplication der gleichstelligen Glieder der ersten und dritten Reihe und aller drei Reihen leicht Nenner und Zähler der gesuchten Brüche ableitet, worauf man noch durch 3 dividiren muss, um X_n selbst zu erhalten.

Anmerkung. Dass die hier ursprünglich nur für rechtwinklige Coordinaten bewiesenen Formeln auch ganz allgemein für jedes beliebige schiefwinklige Coordinatensystem gelten, ist mittelst der bekannten einfachen Formeln der Coordinatenverwandlung in der Ebene leicht nachzuweisen, was dem Leser überlassen bleiben mag.

Als Nachtrag zu diesem Aufsatze theile ich in der folgenden Abhandlung noch einige einfache Constructionen des Schwerpunkts des Vierecks mit, die ich von einem meiner liebsten Zuhörer, Herrn Endemann aus der Lausitz, erhalten habe.

XXXI.

Einige Constructionen des Schwerpunkts des Vierecks.

Von

Herrn *Endemann*,

Studirendem der Mathematik in Greifswald.

Aufgabe.

Den Schwerpunkt eines Vierecks zu construiren.

Erste Construction.

Man ziehe die beiden Diagonalen des Vierecks, halbire dieselben, verbinde diese Halbirungspunkte durch eine gerade Linie und theile diese Verbindungslinie in drei gleiche Theile. Durch jeden der beiden Theilpunkte ziehe man eine Parallele zu der ihm nicht zunächst liegenden Diagonale des Vierecks; der Durchschnittspunkt dieser beiden Linien ist der Schwerpunkt des Vierecks.

Beweis. Es seien O_1 und O_2 (Taf. V. Fig. 7.) die Halbirungspunkte der Diagonalen DB und AC, und die Linie $O_1 O_2$ sei durch a und b in drei gleiche Theile getheilt.

Es verhält sich:

$$O_2 b : O_1 b = 1:2.$$

Da nun Sb parallel zu DB gezogen ist, so wird sich auch

$$\left.\begin{matrix} O_2 S_1 : S_1 B \\ O_2 S_2 : S_2 D \end{matrix}\right\} = 1:2$$

verhalten, d. h. S_1 und S_2 sind die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und ADC, in welche das Viereck $ABCD$ durch die Dia-

gonale AC zerlegt ist. Die Linie bS geht also durch die Schwerpunkte der beiden Dreiecke; auf ihr muss folglich der Schwerpunkt des ganzen Vierecks liegen. Aehnlich lässt sich zeigen, dass der Schwerpunkt des Vierecks auch auf der Linie aS liegen muss; er kann also nur im Durchschnitt der beiden Linien aS und bS, d. h. im Punkte S liegen.

Zweite Construction.

Man kann die vorhergehende Construction auch in folgender Weise abändern:

Man halbire in Taf. V. Fig. 8. wieder die Diagonalen AC und BD in O_2 und O_1, und nenne den Durchschnittspunkt beider Diagonalen O. Dann theile man OO_1 und OO_2 in drei gleiche Theile und ziehe durch die dem O_1 und O_2 anliegenden Theilpunkte Parallelen zu den Diagonalen, so ist der Durchschnittspunkt dieser Parallelen der Schwerpunkt des ganzen Vierecks.

Der Beweis ist aus dem Vorigen von selbst ersichtlich.

Dritte Construction.

Durch O_1 und O_2 (Taf. V. Fig. 9.) ziehe man Parallelen zu den Diagonalen AC und BD, welche sich in O_3 schneiden, so haben wir das Parallelogramm $OO_1O_3O_2$. Man ziehe in diesem Parallelogramm die Diagonale OO_3, theile sie in drei gleiche Theile, so ist der Theilpunkt, welcher dem Punkte O_3 am nächsten liegt, der Schwerpunkt des Vierecks. Beweis ebenfalls klar. Es verhält sich ja $Oc : OO_2 = OS : OO_3 = 2:3$, d. h. S liegt auf dem zweiten Theilpunkte der Linie OO_3.

Vierte Construction.

Man sieht leicht ein, dass der Schwerpunkt des ganzen Vierecks mit dem Schwerpunkte des Dreiecks $O_1O_2O_3$ (Taf. V. Fig. 10.) zusammenfällt. Dies lässt sich auch analytisch leicht nachweisen.

Seien die Coordinaten von

$$\begin{matrix} A & B & C & D & O \\ xy & x'y' & x''y'' & x'''y''' & XY, \end{matrix}$$

so sind die Coordinaten

$$\text{von } O_1: \ \tfrac{1}{2}(x'+x''') \text{ und } \tfrac{1}{2}(y'+y'''),$$
$$\text{„} \ O_2: \ \tfrac{1}{2}(x+x'') \ \text{„} \ \tfrac{1}{2}(y+y'')$$

und

$$\text{von } O_3: \ \tfrac{1}{2}(x+x'+x''+x''')-X \text{ und } \tfrac{1}{2}(y+y'+y''+y''')-Y.$$

Bekanntlich sind nun die Coordinaten des Schwerpunktes eines Dreiecks, dessen Spitzen die Coordinaten $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ haben, folgende:

$$\tfrac{1}{3}(x'+x''+x''') \text{ und } \tfrac{1}{3}(y'+y''+y''').$$

Es sind also die Coordinaten des Schwerpunktes unseres Dreiecks $O_1 O_2 O_3$ folgende:

$$\tfrac{1}{3}(x+x'+x''+x'''-X) \text{ und } \tfrac{1}{3}(y+y'+y''+y'''-Y),$$

welches nach der vorhergehenden Abhandlung auch zugleich die Coordinaten des Schwerpunktes des Vierecks sind.

XXXII.

Lösung einer Aufgabe der Variations-Rechnung.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Man soll jene Linie von gegebener Länge bestimmen, welche durch *A* und *B* (Taf. V. Fig. 4.) geht, und woselbst die Fläche, welche begrenzt ist durch diese Linie, durch die beiden Ordinaten der Punkte *A* und *B* und durch die Abscissenaxe, ein Maximum oder Minimum wird.

Es ist also, wenn man die Fläche *ABab* mit *F*, die Länge *AB* mit *s* und die Abscissen der beiden Punkte *A* und *B* mit x_1 und x_2 bezeichnet:

$$(1) \quad F=\int_{x_1}^{x_2} y dx$$

und

$$(2) \quad s=\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

und nun soll y so als Function von x bestimmt werden, auf dass F ein Maximum oder Minimum wird, während zugleich s constant bleibt.

Auflösung. Nach den bekannten Regeln der Variations-Rechnung hat man jenen Werth von y zu suchen, für welchen das Integral

$$(3) \quad U=\int_{x_1}^{x_2} (y+\lambda\sqrt{1+y'^2})\,dx$$

ein Maximum oder Minimum wird, hiebei unter λ eine constante Zahl verstanden. Wäre

$$U=\int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

woselbst V eine Function von $x, y, y', y'', \ldots$ ist, so hätte man y aus folgender Differentialgleichung zu ermitteln:

$$\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\left[\frac{dV}{dy'}\right]+\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{dV}{dy''}\right]-\ldots=0.$$

Für den vorliegenden Fall ist:

$$(4) \quad V=y+\lambda\sqrt{1+y'^2},$$

folglich:

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{dV}{dy}=1, \\ \dfrac{dV}{dy'}=\dfrac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}; \end{cases}$$

und somit die aufzulösende Differential-Gleichung:

$$(6) \quad 1-\frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]=0.$$

Integrirt man selbe, so erhält man:

$$(7) \quad \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=x-\alpha,$$

unter α eine willkürliche Constante verstanden. Hieraus folgt:

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y' = \frac{x-\alpha}{\sqrt{\lambda^2-(x-\alpha)^2}},$$

und integrirt man diese Gleichung abermals, so erhält man:

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = -\sqrt{\lambda^2-(x-\alpha)^2}+\beta,$$

woselbst β wieder eine willkürliche Constante vorstellt. Diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda^2,$$

und ist bekanntlich die Gleichung des Kreises.

Die Linie AB muss somit eine Kreislinie sein, α, β und λ werden durch die Bedingungen bestimmt, dass die genannte Linie durch A und B gehen und eine bestimmte Länge haben soll.

Es bleibt uns noch übrig, genauer zu ermitteln, ob und unter welchen Umständen diese Lösung wirklich zu einem Maximum oder Minimum führt. Setzen wir demnach in (1) und (2) statt y $y+\delta y$; ferner statt y' $y'+\frac{d\delta y}{dx}$, d. h. gehen wir von der Linie AB zu einer anderen Linie über, welche äusserst wenig von der AB verschieden ist, dieselbe Länge hat und auch durch die Punkte A und B geht, so muss, wenn man das Resultat der Substitution in (1) und (2) mit $F+\delta F$ und $s+\delta s$ bezeichnet,

$$F+\delta F=\int_{x_1}^{x_2}(y+\delta y)\,dx, \qquad s+\delta s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+[y'+\frac{d\delta y}{dx}]^2}\,dx$$

sein. Die erste dieser Gleichungen geht über in:

$$(11) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \delta F=\int_{x_1}^{x_2}\delta y\,dx;$$

entwickelt man sodann die zweite Gleichung in eine Reihe, so erhält man, wenn man der Kürze halber $\frac{d\delta y}{dx}$ mit $\delta y'$ bezeichnet,

$$s+\delta s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{y'\delta y'\,dx}{\sqrt{1+y'^2}}+\tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{(\delta y')^2\,dx}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}+\ldots$$

Da nun $s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ ist und δs vermöge der Voraussetzung gleich Null sein soll, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$(12)\quad 0=\int_{x_1}^{x_2}\frac{y'\,\delta y'\,dx}{\sqrt{1+y'^2}}+\tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{(\delta y')^2dx}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}+\ldots$$

Man hat demnach, wenn man diese Gleichung mit λ multiplicirt und zu (11) addirt:

$$(13)\quad \delta F=\int_{x_1}^{x_2}\Big[\delta y+\frac{\lambda y'\,\delta y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Big]dx+\frac{\lambda}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{(\delta y')^2dx}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}+\ldots$$

Das erste dieser Integrale ist, wie leicht zu sehen, gleich Null. Denn es ist vermöge der Gleichung (7): $\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=x-\alpha$, folglich ist der erste Theil von δF von folgender Gestalt:

$$\int_{x_1}^{x_2}\Big[\delta y+(x-\alpha)\frac{d\delta y}{dx}\Big]dx.$$

Behandelt man den zweiten Theil dieses Ausdruckes mittelst der Methode des theilweisen Integrirens, so hat man:

$$\int_{x_1}^{x_2}(x-\alpha)\frac{d\delta y}{dx}dx=\Big[(x-\alpha)\,\delta y\Big]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\delta y\,dx.$$

Nun ist $(x-\alpha)\delta y$ Null, sowohl für $x=x_1$, als auch für $x=x_2$, weil A und B auch Punkte der geänderten Linie sind, somit verschwindet δy sowohl für $x=x_1$, als auch für $x=x_2$, folglich hat man:

$$\delta F=\frac{\lambda}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{(\delta y')^2dx}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}+\ldots$$

Nun folgt aus (10):

$$1+y'^2=\frac{\lambda^2}{\lambda^2-(x-\alpha)^2}\quad\text{oder}\quad 1+y'^2=\frac{\lambda^2}{(y-\beta)^2},$$

folglich ist: $\delta F=\frac{1}{2\lambda^2}\int_{x_1}^{x_2}(y-\beta)^3\Big(\frac{d\delta y}{dx}\Big)^2dx+\ldots$

Dieser Ausdruck bleibt stets positiv, wenn $y-\beta$ innerhalb der Integrations-Grenzen stets positiv bleibt, und bleibt stets negativ, wenn $y-\beta$ innerhalb der Integrations-Grenzen stets negativ bleibt.

Sucht man diess geometrisch zu deuten, so findet man, dass, soll ein Maximum sein, der Mittelpunkt des Kreises tiefer als alle Punkte des Kreisbogens AB liegen müsse, und soll ein Minimum sein, so muss der Mittelpunkt des Kreises höher liegen als alle Punkte des Kreisbogens AB.

Es ist ersichtlich, dass ein Maximum oder Minimum auch dann sein kann, wenn einer oder beide Punkte A, B mit dem Mittelpunkte gleiche Höhe haben.

XXXIII.

Anwendung der Sekanten zur Auffindung der Sinus, Tangenten und Bogen kleiner Winkel aus Tafeln von fünf Stellen.

Von

Herrn Grafen *L. v. Pfeil*
auf Hausdorf bei Neurode in Schlesien.

---

§. 1.

Betrachtet man die trigonometrischen Logarithmen einer fünfstelligen Tafel (z. B. de la Lande's Tafeln, herausgegeben von Köhler, Leipzig bei Karl Tauchnitz), wie diese Logarithmen von Minute zu Minute verzeichnet sind, so findet man, dass bei kleinen Winkeln die Differenzen sehr gross werden und ein Auffinden der Logarithmen für Bruchtheile der Minuten aus diesen Differenzen ungenau machen. So würde z. B. bei einem halben Grade aus den Tafeln gefunden werden:

$$\begin{aligned} \log\sin 30' &= 7{,}94084 \\ \text{Diff. für } 30'' &= \phantom{7{,}9}712 \\ \log\sin 30'\,30'' &= 7{,}94796 \end{aligned}$$

während richtiger $\log\sin 30'\,30'' = 7{,}94802$ ist.

Je kleiner der Winkel, um so grösser würde der erhaltene Fehler sein. Erst bei $1^0 44'$ beträgt der Fehler, welcher durch Anwendung der Minutendifferenz entsteht, weniger als eine halbe Einheit der fünften Ziffer, denn es ist:

$$\begin{aligned} \log\tan 1^0 45' &= 8{,}4850505 \\ \log\tan 1^0 44' &= 8{,}4808920 \\ \text{Diff.} &= \phantom{8{,}48}41585 \\ \text{Halbe Diff.} &= \phantom{8{,}48}20792{,}5 \\ \log\tan 1^0 44' + \text{halbe Diff.} &= 8{,}4829712{,}5 \\ \log\tan 1^0 44'\,30'' &= 8{,}4829762 \\ \text{Fehler} & \phantom{8{,}48297}49{,}5 \text{ *)} \end{aligned}$$

---

*) Genauer 49,6.

Ist die Zahl der Sekunden nahe an der vollen Minute, so wird der durch Anwendung der Differenzen zu begehende Fehler kleiner. So fällt dieser Fehler für 10″ und 50″ schon bei 1°20′ unter eine halbe Einheit der fünften Ziffer.

§. 2.

Bei sehr kleinen Winkeln sind die Sinus, Tangenten und Bogen einander gleich. Bei grösseren Winkeln liegen die Bogen zwischen den Sinus und Tangenten, und zwar findet bei Winkeln, welche wenige Grade nicht übersteigen, folgendes Gesetz statt:

> Die logarithmische Differenz des Bogens und Sinus ist halb so gross als die logarithmische Differenz der Tangente und des Bogens, und ein Drittheil so gross, als die logarithmische Differenz der Tangente und des Sinus; welche Letztere gleich ist der logarithmischen decadischen Ergänzung des Cosinus, also gleich dem Logarithmus der Sekante.

In Formeln ausgedrückt lautet das Gesetz:

$$\begin{aligned}\log \operatorname{arc} x - \log \sin x &= \tfrac{1}{2}.(\log \operatorname{tang} x - \log \operatorname{arc} x)\\ &= \tfrac{1}{3}.(\log \operatorname{tang} x - \log \sin x)\\ &= \frac{-\log \cos x}{3}\\ &= \frac{\log \sec x}{3}\ ^{*}).\end{aligned}$$

---

*) Diese wichtigen Formeln finden sich wahrscheinlich zuerst in Maskelynes Einleitung zu Taylor's logarithmischen Tafeln, in des letzteren Treasury of the Mathematics, und werden daher die Maskelyn'schen Regeln genannt. (J. H. T. Müller in seinem Handbuch der Trigonometrie, Halle 1852, S. 170. des Anhangs.) Vergl. auch dessen vierstellige Logarithmen S. XI. u. f., wo diese Formeln unter dem Namen der Maskelyn'schen Regelnan geführt werden.

Jene Bezeichnung ist auch in Frankreich bekannt. In den Nouvelles Annales de Mathematiques Bd. 17. S. 19. des Anhangs (Bulletin de bibliographie etc.) heisst es bei Gelegenheit einer Recension der sechsstelligen Tafeln von Bremiker:

.... Pour les arcs plus grands (grösser als 5 Minuten) jusqu'à un degré environ, on corrige cette valeur (den Logarithmus des Bogens, ausgedrückt in Theilen des Radius) au moyen de la formule de Maskelyne:

$$\sin x = x\sqrt[3]{\cos x}, \quad \operatorname{tang} x = \frac{x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}.$$

Es lässt sich mit Hülfe dieses Gesetzes, sobald der Winkel eine gewisse Grösse nicht übersteigt, der Logarithmus des Bogens jederzeit aus dem Logarithmus des Sinus oder der Tangente, und aus dem Logarithmus des Cosinus finden, indem man dessen decadische Ergänzung nimmt und ein Drittheil davon zum Logarithmus des Sinus addirt, oder aber zwei Drittheile davon vom Logarithmus der Tangente abzieht. So ist:

$$\log\sin 2^0 6' = 8{,}5639994$$
$$\frac{-\log\cos}{3} = 0{,}0000972{,}6$$
$$\log\text{arc}\, 2^0 6' = 8{,}5640967.$$

Desgleichen:

$$\log\text{tang}\, 2^0 6' = 8{,}5642912$$
$$-2.\frac{-\log\cos}{3} = \quad 1945{,}2$$
$$\log\text{arc}\, 2^0 6' = 8{,}5640967.$$

Ebenso direct gefunden:

$$\log\text{arc}\, 1'' = 4{,}6855749$$
$$\log 7560'' = 3{,}8785218$$
$$\log\text{arc}\, 2^0 6' = 8{,}5640967.$$

In demselben Journal T. 15. auf S. 108. werden die Logarithmic tables to seven places of decimes by Robert Shortrede. Edinburg 1849. besprochen, und zwar heisst es unter Andern:

Pour le premier degré, ou les differences varient sensiblement d'une seconde à la suivante, l'auteur se sert d'un coefficient pour corriger les secondes differences, ou bien encore de ces deux formules de Maskelyne:

$$\log\sin x = \log\sin 1'' + \log x'' - \tfrac{1}{3}\log\sec x,$$
$$\log\text{tang}\, x = \log\text{tang}\, 1'' + \log x'' + \tfrac{2}{3}\log\sec x,$$

x étant un três petit arc.

In den deutschen Tafeln, in denen die Formeln vorkommen, z. B. in den Tafeln von Stampfer, vierte Aufl., 1852, so wie in den Augustschen, werden sie ohne Namen angegeben.

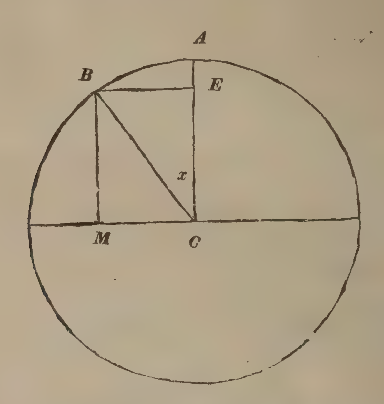
Ich verdanke die vorstehenden Notizen der Güte des Herrn Professor Dr. Gent in Liegnitz. Bemerkt sei bei dieser Gelegenheit, dass die Benutzung der gedachten Formeln für mehrstellige Logarithmen wohl weniger von Bedeutung ist, als für fünf- und vierstellige. Auch scheint die von mir vorgeschlagene Art der Anwendung etwas abweichend, da ich die Elemente $\log\sin 1''$ ($=\log\text{tang}\, 1''$) und $\log x''$ gar nicht benutze, wie dieses aus der folgenden Darstellung hervorgehen wird.

Die Maskelyn'schen Regeln reichen übrigens um sehr vieles weiter als in den obigen Citaten angenommen wird. (Vergl. §. 6.)

§. 3.

Die Richtigkeit des vorstehenden Gesetzes erhellt aus folgenden Gründen.

Setzt man (m. s. nachstehende Figur):



in einem Kreise den Halbmesser $AC = a$, die Abscisse $CM = v$, die Ordinate $BM = y$, den Winkel $ACB = x$ und den Bogen $AB = z$, so erhält man aus der Gleichung für den Kreis $y = \sqrt{a^2 - v^2}$, wenn man dieselbe differenzirt:

$$\partial y = - v \partial v \, (a^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$\partial y^2 = v^2 \partial v^2 (a^2 - y^2)^{-1}.$$

Substituirt man den Werth für ∂y^2 in die allgemeine Gleichung für die Rectification krummer Linien mit senkrechten Ordinaten:

$$\partial z = \partial v \left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial v^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

so erhält man:

$$\partial z = a \partial v \, (a^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}},$$

und wenn man den Werth $(a^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ in einer Reihe entwickelt und den Ausdruck integrirt, so ergiebt sich:

$$z = v + \frac{1.v^3}{2.3a^2} + \frac{1.3v^5}{2.4.5a^4} + \frac{1.3.5v^7}{2.4.6.7a^6} + \dots.$$

Diese Entwickelung findet sich in den bezüglichen Lehrbüchern.

Setzt man in der vorstehenden Reihe den Halbmesser $a = 1$ und $v = CM = BE = \frac{BE}{BC} . BC = \sin x . a = \sin x$, endlich $z = \text{arc} x$, so ist:

$$\operatorname{arc} x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{2.3} + \frac{3\sin^5 x}{2.4.5} + \frac{3.5\sin^7 x}{2.4.6.7} + \dots$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\operatorname{arc} x}{\sin x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{2.3} + \frac{3\sin^4 x}{2.4.5} + \frac{3.5\sin^6 x}{2.4.6.7} + \dots$$

Es sei der Winkel x so klein, dass neben der zweiten Potenz von $\sin x$ mit ihrem Coeffizienten die vierte und die folgenden Potenzen mit ihren Coeffizienten für die Rechnung keine Bedeutung mehr haben. Alsdann wird:

$$\frac{\operatorname{arc} x}{\sin x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{2.3}$$

und

$$\left(\frac{\operatorname{arc} x}{\sin x}\right)^3 = 1 + \frac{3\sin^2 x}{2.3} + \frac{3\sin^4 x}{4.9} + \frac{\sin^6 x}{8.27} = 1 + \frac{\sin^2 x}{2},$$

weil die folgenden Glieder verschwinden.

Ebenso wird der Werth

$$\frac{\operatorname{tang} x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{\sin^4 x}{2.4} - \frac{3\sin 6x}{2.4.6} - \dots} = \frac{1}{1 - \frac{\sin^2 x}{2}},$$

weil die übrigen Glieder der Reihe verschwinden, und auch

$$\frac{\operatorname{tang} x}{\sin x} = \frac{1}{1 - \frac{\sin^2 x}{2}} = 1 + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^4 x}{4} + \frac{\sin^6 x}{8} + \dots = 1 + \frac{\sin^2 x}{2}$$

aus demselben Grunde.

Da nun

$$\left(\frac{\operatorname{arc} x}{\sin x}\right)^3 = 1 + \frac{\sin^2 x}{2} \quad \text{und auch} \quad \frac{\operatorname{tang} x}{\sin x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{2}$$

ist, so folgt auch:

$$\left(\frac{\operatorname{arc} x}{\sin x}\right)^3 = \frac{\operatorname{tang} x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

und endlich:

$$3.(\log \operatorname{arc} x - \log \sin x) = \log \operatorname{tang} x - \log \sin x$$
$$= -\log \cos x = \log \sec x,$$

woraus wieder folgt:

$$\begin{aligned}\log \operatorname{arc} x - \log \sin x &= \tfrac{1}{3}(\log \operatorname{tang} x - \log \sin x)\\ &= \tfrac{1}{3}. - \log \cos x\\ &= \tfrac{1}{3}\log \sec x\\ &= \tfrac{1}{2}(\log \operatorname{tang} x - \log \operatorname{arc} x),\end{aligned}$$

oder auch:

$$\log \operatorname{tang} x - \log \operatorname{arc} x = \tfrac{2}{3}(\log \operatorname{tang} x - \log \sin x).$$

Folgende Herleitung hat Herr Professor Dr. Galle in Breslau die Güte gehabt, mir mitzutheilen. Es sind von mir nur die Bezeichnungen mit der vorstehenden Darstellung übereinstimmend gemacht.

In den grösseren Handbüchern der Trigonometrie oder der niederen Analysis finden sich für die trigonometrischen Functionen folgende Reihen:

$$\begin{aligned}\sin x &= \operatorname{arc} x - \tfrac{1}{6}\operatorname{arc}^3 x + \tfrac{1}{120}\operatorname{arc}^5 x + \ldots,\\ \cos x &= 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc}^2 x + \tfrac{1}{24}\operatorname{arc}^4 x - \ldots,\\ \operatorname{tang} x &= \operatorname{arc} x + \tfrac{1}{3}\operatorname{arc}^3 x + \tfrac{2}{15}\operatorname{arc}^5 x + \ldots\end{aligned}$$

Sind hier die Bogen $\operatorname{arc} x$ (in Theilen des Radius ausgedrückt) klein, so kann man die höheren Potenzen von arc^4 ab vernachlässigen, und hat daher:

$$\begin{aligned}\operatorname{arc} x - \sin x &= \tfrac{1}{6}\operatorname{arc}^3 x,\\ \operatorname{tang} x - \operatorname{arc} x &= \tfrac{2}{6}\operatorname{arc}^3 x,\\ \operatorname{tang} x - \sin x &= \tfrac{3}{6}\operatorname{arc}^3 x,\end{aligned}$$

und somit das Verhältniss wie $1:2:3$.

Ferner folgt, wenn man von diesen Gleichungen die ersteren beiden mit $\operatorname{arc} x$ dividirt:

$$1 - \frac{\sin x}{\operatorname{arc} x} = \tfrac{1}{6}\operatorname{arc}^2 x \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{arc} x} - 1 = \tfrac{1}{3}\operatorname{arc}^2 x$$

oder

$$\frac{\sin x}{\operatorname{arc} x} = 1 - \tfrac{1}{6}\operatorname{arc}^2 x \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{arc} x} = 1 + \tfrac{1}{3}\operatorname{arc}^2 x.$$

Bei Vernachlässigung der vierten Potenzen von $\operatorname{arc} x$ wird aber:

$$\begin{aligned}1 - \tfrac{1}{6}\operatorname{arc}^2 x &= (1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc}^2 x)^{\frac{1}{3}} = \cos^{\frac{1}{3}} x,\\ 1 + \tfrac{1}{3}\operatorname{arc}^2 x &= (1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc}^2)^{-\frac{2}{3}} = \cos^{-\frac{2}{3}} x,\end{aligned}$$

und somit:

$$\frac{\sin x}{\operatorname{arc} x} = \cos^{\frac{1}{3}} x \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{arc} x} = \cos^{-\frac{2}{3}} x,$$

oder endlich:

$$\sin x = \operatorname{arc} x \cos^{\frac{1}{3}} x = \operatorname{arc} x \sec^{-\frac{1}{3}} x,$$
$$\operatorname{tang} x = \operatorname{arc} x \cos^{-\frac{2}{3}} x = \operatorname{arc} x \sec^{\frac{2}{3}} x,$$

und logarithmisch:

$$\log \sin x = \log \operatorname{arc} x - \tfrac{1}{3} \log \sec x,$$
$$\log \operatorname{tang} x = \log \operatorname{arc} x + \tfrac{2}{3} \log \sec x,$$

oder aber:

$$\log \operatorname{arc} x - \log \sin x = \tfrac{1}{3} \log \sec x,$$
$$\log \operatorname{tang} x - \log \operatorname{arc} x = \tfrac{2}{3} \log \sec x,$$
$$\log \operatorname{tang} x - \log \sin x = \tfrac{3}{3} \log \sec x,$$

mithin das logarithmische Verhältniss ebenfalls wie 1 : 2 : 3.

Die Logarithmen der trigonometrischen Functionen lassen sich durch folgende unendliche Reihen ausdrücken:

$$\log \sin x = \log \operatorname{arc} x - \frac{M}{6} \operatorname{arc}^2 x - \frac{M}{180} \operatorname{arc}^4 x - \ldots,$$

$$\log \cos x = -\frac{M}{2} \operatorname{arc}^2 x - \frac{M}{12} \operatorname{arc}^4 x - \ldots,$$

$$\log \operatorname{tang} x = \log \operatorname{arc} x + \frac{M}{3} \operatorname{arc}^2 x + \frac{7M}{90} \operatorname{arc}^4 x + \ldots,$$

wo M den Modul des betreffenden logarithmischen Systems bezeichnet. Man hat also hierbei, unter Vernachlässigung von $\operatorname{arc}^4 x$:

$$\log \operatorname{arc} x - \log \sin x = \frac{M}{6} \operatorname{arc}^2 x,$$

$$\log \operatorname{tang} x - \log \operatorname{arc} x = \frac{M}{3} \operatorname{arc}^2 x,$$

$$\log \operatorname{tang} x - \log \sin x = \frac{M}{2} \operatorname{arc}^2 x,$$

und somit für kleine Winkel wieder das Verhältniss wie 1:2:3.

§. 4.

Das in §. 3. entwickelte Gesetz gilt nicht nur für die dort vorausgesetzte Grösse des Winkels, sondern es reicht noch etwas weiter, so weit nehmlich, als der Unterschied der dritten Glieder der bezüglichen Reihen für die Rechnung keine Bedeutung hat.

Es würde indess zwecklos sein, dieses auf theoretischem Wege zu untersuchen.

Um jedoch die Grenze zu ermitteln, in denen das Gesetz Geltung hat, vergleiche man eine trigonometrische Tafel zu sieben Stellen, bezüglich zu zehn Stellen.

Man findet daraus, dass die Anwendung des in §. 3. entwickelten Gesetzes bei einem Winkel, welcher kleiner ist als $10\frac{1}{4}^0$, einen Fehler im Logarithmus von weniger als einer Einheit der fünften Decimalstelle giebt. Je kleiner der Winkel ist, um so kleiner wird der Fehler. Unter $8\frac{1}{2}^0$ wird der Fehler schon kleiner als eine halbe Einheit der fünften Stelle. Unter $5\frac{3}{4}^0$ wird derselbe kleiner als eine Einheit der sechsten, unter $4\frac{3}{4}^0$ kleiner als eine halbe Einheit der sechsten Stelle; unter $3\frac{1}{4}^0$ wird der Fehler kleiner als eine Einheit der siebenten, unter $2\frac{3}{4}^0$ kleiner als eine halbe Einheit der siebenten Stelle. Gegen 30′ verschwindet der Fehler schon in der zehnten Stelle. In Beziehung auf vierstellige Tafeln sei noch bemerkt, dass unter 18^0 der Fehler weniger beträgt als eine Einheit der vierten, und unter $15\frac{1}{4}^0$ weniger als eine halbe Einheit der vierten Stelle.

Die folgende Tabelle giebt die genauere Zusammenstellung.

Es ist $\log\sin x + \frac{\log\sec x}{3}$ grösser als $\log\operatorname{arc} x$.

Bei einem Winkel °	′	″	Einheiten der fünften Stelle
2	44	10	00,0050
3	15	0	00,0100
. .	. .	. .	. . . .
4	51	31	00,0500
5	46	34	00,1000
6	23	28	00,1500
6	52	0	00,2000
7	15	35	00,2500
7	35	49	00,3000
7	53	41	00,3500
8	9	43	00,4000
8	24	18	00,4500
8	37	43	00,5000
8	50	9	00,5500

Bei einem Winkel °	′	″	Einheiten der fünften Stelle
8	50	9	00,5500
9	1	46	00,6000
9	12	40	00,6500
9	22	58	00,7000
9	32	43	00,7500
9	41	59	00,8000
9	50	50	00,8500
9	59	18	00,9000
10	7	25	00,9500
10	15	12	01,0000
10	22	43	01,0500
. .	. .	. .	. . . .
15	17	3	05,0000
18	7	59	10,0000

Weil sich die Ziffer für $\log\sin x + \frac{\log\sec x}{3} - \log\operatorname{arc} x$ sehr langsam ändert, so musste die Rechnung mit zehn Decimalstellen geführt werden. Ich gebe als Probe:

$$\begin{aligned}
\log\sin 10^0\,15'\,12'' &= 9{,}2504219403\\
\tfrac{1}{3}\log\sec &= 0{,}0023305031\\
\log\sin + \tfrac{1}{3}\log\sec &= 9{,}2527524434\\
\log\operatorname{arc} 36912'' &= 9{,}2527424440\\
\text{Diff.} &= 0{,}0000099994
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\sin 10^0\,15'\,13'' &= 9{,}2504335800\\
\tfrac{1}{3}\log\sec &= 0{,}0023306301\\
\log\sin + \tfrac{1}{3}\log\sec &= 9{,}2527642101\\
\log\operatorname{arc} 36913'' &= 9{,}2527542092\\
\text{Diff.} &= 0{,}0000100009.
\end{aligned}$$

§. 5.

Das mehrerwähnte Gesetz lässt sich anwenden, um innerhalb gewisser Grenzen die Logarithmen der Sinus oder Tangenten in Logarithmen der Bogen zu verwandeln, und umgekehrt diese in jene; insbesondere aber um durch eine solche Verwandlung die Logarithmen der Sinus und Tangenten kleiner Winkel und diese Winkel selbst zu finden, indem man den Bogen des mit zehn oder mit einer ganzen Potenz von zehn multiplicirten Winkels sucht und den Logarithmus in der Kennziffer entsprechend ändert.

Wäre z. B. gesucht $\log\operatorname{arc} 1'\,4'',8 = \log\sin = \log\operatorname{tang}$, so kann man setzen:

$$1'\,4'',8 = 64'',8 = \frac{6480''}{100} = \frac{1^0\,48'}{100}.$$

$$\begin{aligned}
\log\sin 1^0\,48' &= \quad 8{,}4970784\\
\frac{-\log\cos}{3} = \frac{\log\sec}{3} &= \qquad\quad 715\\
\log 0{,}01 &= -2\\
\log\operatorname{arc} 1'\,48'' &= \quad 6{,}4971499\\
&= \log\pi - 4.
\end{aligned}$$

Wäre ein andermal gegeben $\log\sin x = 4{,}6855749$, so könnte der zugehörige Winkel auf folgende Weise gefunden werden:

$$\log \operatorname{arc} 10000x = \log \operatorname{arc} x + 4 = 8{,}6855749.$$

Es fällt dieser Logarithmus zwischen

$$\log \sin 2^0 46' 40'' \quad \text{und} \quad \log \operatorname{tang} 2^0 46' 40''.$$

Also

$$-\frac{-\log \cos 2^0 46' 40''}{3} = -\frac{\log \sec}{3} = \quad -1702$$

also $\log \sin 10000x = 8{,}6854047$

oder bequemer $+2.\frac{\log \sec 2^0 46' 40''}{3} = \quad +3404$

$$\log \operatorname{tang} 10000x = 8{,}6859153.$$

Aus $\log \sin 10000x$ und $\log \operatorname{tang} 10000x$ findet man übereinstimmend $10000x = 2^0 46' 40'' = 10000''$ und also $x = 1'',0$.

§. 6.

Um für **fünfstellige Tafeln** die Rechnung zu erleichtern und auch genauer zu machen, ist die beifolgende Tabelle, Tafel I. berechnet. Dieselbe giebt von $0^0 0'$ bis 10^0 in der mit $\frac{\sec}{3}$ überschriebenen Spalte, in Einheiten der fünften und sechsten Decimalstelle, die Drittheile der logarithmischen decadischen Ergänzung der Cosinus oder, was dasselbe ist, die Drittheile der Logarithmen der Sekanten *).

Bis zu $4^0 51' 30''$ stimmt für die Rechnung dieses Drittheil mit der logarithmischen Differenz des Bogens und Sinus überein, nehmlich so weit ist die Ziffer $\frac{\sec}{3}$ von $\log \operatorname{arc} x - \log \sin x$ um weniger verschieden, als eine halbe Einheit der sechsten Decimalstelle. Ueber $4^0 51' 30''$ hinaus kann jene Differenz für die Rechnung in Betracht kommen, und man muss unter Umständen in der sechsten Stelle eine Correctur vornehmen, wenn man den Logarithmus eines Bogens durch Anwendung der Tabelle für $\frac{\log \sec}{3}$ bis in die fünfte Ziffer richtig erhalten will. Es ist für diese Correctur Tafel II. berechnet, deren Anwendung später gezeigt werden soll.

---

*) Die letztere Bezeichnung, welche fortan vorzugsweise gebraucht werden soll, scheint passender, als die negative Bezeichnung einer positiven Grösse.

Es kann hiernach die Tabelle für $\frac{\log\sec}{3}$, Tafel I., angewendet werden, um den Logarithmus des Sinus oder der Tangente in den Logarithmus des Bogens, oder umgekehrt, durch Addition oder Subtraction, meist einer einzigen Ziffer, zu verwandeln; und so bietet die Tabelle zugleich ein bequemes Mittel dar, um die Logarithmen der Sinus und Tangenten kleiner Winkel und diese Winkel selbst mit einer Genauigkeit zu bestimmen, welche fünfstelligen Tafeln entspricht.

Wäre in den Logarithmentafeln neben den Winkeln eine besondere Spalte für $\frac{\log\sec}{3}$ abgedruckt, so würde man das Resultat der Rechnung meistens durch ein einziges Nachschlagen finden.

§. 7.

Ist der Logarithmus des Sinus oder der Tangente gegeben und der des Bogens gesucht, so geht man in der bezüglichen Spalte fort, bis man darin den Logarithmus selbst findet oder bis der gegebene Logarithmus zwischen zwei auf einander folgende trifft.

An dieser Stelle addirt man, wenn der Logarithmus des Sinus gegeben war, zu diesem die entsprechende Ziffer der Spalte $\frac{\sec}{3}$, oder aber, wenn der Tangentenlogarithmus gegeben war, so subtrahirt man die doppelte Ziffer von $\frac{\sec}{3}$.

Die Minuten bedürfen bei dieser Rechnung keiner wesentlichen Berücksichtigung, weil die Ziffer $\frac{\sec}{3}$ sich nur langsam ändert.

Wäre, wie bereits erwähnt wurde, bis 10^0 in den Tafeln eine Spalte für $\frac{\sec}{3}$ beigedruckt, so würde man $\frac{\sec}{3}$ unmittelbar neben sin und tang finden. Da dieses jedoch zur Zeit nicht der Fall ist, so muss man den Winkel selbst in Betracht ziehen und jene Ziffer aus einer besonderen Tabelle, Tafel I., entnehmen.

Beispiel 1). Gegeben $\log\sin x = 8{,}21831$, gesucht $\log\operatorname{arc} x$. Man findet bei $\log\sin = 8{,}21831$ ohngefähr $57'$, dabei in Tafel I. für $\frac{\sec}{3}$ die Ziffer 2,0. Man setze also:

$$\log \sin x = 8{,}21831$$
$$\frac{\sec}{3} = \phantom{8{,}2183}2{,}0$$
$$\log \operatorname{arc} x = 8{,}21833.$$

Beispiel 2). Ebendaselbst gegeben:

$$\log \operatorname{tang} x = 8{,}21837$$
$$-2.\frac{\sec}{3} = \phantom{8{,}218}-4{,}0$$
$$\log \operatorname{arc} x = 8{,}21833.$$

Ist $\frac{\sec}{3}$ gleich oder kleiner als 0,5, so ist der Bogen gleich dem Sinus zu setzen, so in

Beispiel 3). Gegeben $\log \sin x = 7{,}87309$. Man findet bei 26′ die Ziffer $\frac{\sec}{3} = 0{,}4$, also setze man:

$$\log \sin x = 7{,}87309$$
$$\frac{\sec}{3} = \phantom{7{,}8730}0{,}4$$
$$\log \operatorname{arc} x = 7{,}87309.$$

Dagegen

Beispiel 4).
$$\log \operatorname{tang} x = 7{,}87310$$
$$-2.\frac{\sec}{3} = \phantom{7{,}873}-0{,}8$$
$$\log \operatorname{arc} x = 7{,}87309$$

wie in Beispiel 3).

§. 8.

Soll zu dem gegebenen Logarithmus des Bogens der Logarithmus des Sinus oder der Tangente gefunden werden, so geht man mit dem Bogenlogarithmus in der Sinusspalte fort, bis derselbe einen Sinuslogarithmus übertrifft.

Will man nun $\log \sin x$ finden, so zieht man von dem Bogenlogarithmus den ohngefähren Werth, den $\frac{\sec}{3}$ an dieser Stelle hat, in Gedanken ab, und prüft, ob die Differenz mit einem der Sinuslogarithmen übereinkommt oder zwischen zwei auf einander

folgende fällt. An dieser so berichtigten Stelle wählt man $\frac{\sec}{3}$ und zieht dessen Ziffer von dem Bogenlogarithmus ab *).

Beispiel 5). Gegeben $\log \operatorname{arc} x = 8{,}83108$, gesucht $\log \sin x$. Man findet, dass $\log \operatorname{arc} x$ zwischen $\log \sin 3^0 53'$ und $\log \sin 3^0 54'$ liegt. An dieser Stelle ist $\frac{\sec}{3}$ ohngefähr 33. Zieht man 33,4 von $\log \operatorname{arc} x$ ab, so erhält man $\log \sin x = 8{,}83075$.

Will man $\log \operatorname{tang} x$ finden, so gehe man zunächst mit $\log \operatorname{arc} x$ ebenfalls in der Sinusspalte fort, bis $\log \operatorname{arc} x$ zwischen zwei auf einander folgende Sinuslogarithmen fällt. An dieser Stelle addire man zu $\log \operatorname{arc} x$ den ohngefähren doppelten Werth von $\frac{\sec}{3}$ und sehe zu, ob die Summe auf einen oder zwischen zwei auf einander folgende Tangentenlogarithmen trifft. Das Zusammentreffen wird entweder gegenüber, oder eine bis drei Minuten zurück sein **). An der so gefundenen richtigen Stelle wähle man $\frac{\sec}{3}$ und addire $2.\frac{\sec}{3}$ zu $\log \operatorname{arc} x$.

Beispiel 6). Gegeben $\log \operatorname{arc} x = 8{,}65219$, gesucht $\log \operatorname{tang} x$. Man findet, dass $\log \operatorname{arc} x$ zwischen $\log \sin 2^0 34'$ und $\log \sin 2^0 35'$ liegt. An dieser Stelle ist $\frac{\sec}{3} = 14{,}6$, also $2.\frac{\sec}{3}$ etwa $=29$. Fügt man in Gedanken 30 zu $\log \operatorname{arc} x$, so fällt die Summe zwischen $\log \operatorname{tang} 2^0 34'$ und $\log \operatorname{tang} 2^0 35'$. Man setze:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{arc} x &= 8{,}65219 \\ 2.\frac{\sec}{3} &= \quad +29{,}2 \\ \hline \log \operatorname{tang} x &= 8{,}65248. \end{aligned}$$

---

*) Es sei bemerkt, dass, je nach der Grösse des Winkels, der Bogenlogarithmus den Sinuslogarithmus um weniger als eine Minutendifferenz bis zu drei M. D. überschreiten kann. Es ist nehmlich:

unter $6^0 52'$ der Werth $\frac{\sec}{3} < \text{M. D.}$,

„ $8^0 39'$ „ „ $\frac{\sec}{3} < 2\ \text{M. D.}$,

„ $9^0 52'$ „ „ $\frac{\sec}{3} < 3\ \text{M. D.}$,

wie man leicht einsieht, wenn man die Werthe nach den Logarithmentafeln vergleicht.

**) Vergl. die letzte Anmerkung.

§. 9.

Das angezeigte Verfahren genügt nicht in allen Fällen, wo es auf eine vorzügliche Genauigkeit der fünften Decimalstelle ankommt. Denn wie in §. 6. bereits gezeigt wurde, werden zwischen 5^0 und 10^0 die Logarithmen der Bogen in der sechsten Stelle durch Anwendung von $\log\sin + \frac{\sec}{3}$ ein wenig zu gross gefunden *).

Es muss darum in solchen Fällen der gefundene Logarithmus entsprechend aus Tafel II. corrigirt werden.

Beispiel 7). Gegeben $\log\sin x = 9{,}23607$, gesucht $\log\text{arc}\, x$. Es ist bei $9^0 55'$:

$$\begin{aligned} \log\sin &= 9{,}23607 \\ \frac{\sec}{3} &= \quad\ 217{,}9 \\ \text{Aus Tafel II. Corr.} &= \quad -0{,}9 \\ \hline \log\text{arc}\, x &= 9{,}23824. \end{aligned}$$

Es macht hierbei keinen Unterschied, ob $\log\sin x$ oder $\log\text{tang}\, x$ gegeben war, so

Beispiel 8). Gegeben:

$$\begin{aligned} \log\text{tang}\, x &= 9{,}24261 \\ 2.\frac{\sec}{3} &= -435{,}8 \\ \text{Corr.} &= \quad -0{,}9 \\ \hline \log\text{arc}\, x &= 9{,}23824 \end{aligned}$$

ebenso, wie in Beispiel 7).

Die Vernachlässigung der Correctur würde den Logarithmus des Bogens um eine Einheit der fünften Ziffer zu gross gegeben haben.

Wird aus dem Logarithmus des Bogens der des Sinus oder der Tangente gefunden, so muss die Correctur addirt werden.

Beispiel 9). Gegeben $\log\text{arc} = 9{,}15481$, gesucht $\log\text{tang}\, x$.

---

*) Die Bezeichnung 5^0 anstatt $4^0 51' 30''$, wie §. 6. angiebt, ist zulässig, weil die Correctur sich so langsam ändert, dass sie bei $4^0 51' 30''$ und bei 5^0 fast gleich ist. Sie beträgt nehmlich bei $4^0 51' 30''$ genau 00,04999, bei 5^0 aber 00,05611 der fünften Decimale.

Es liegt 9,15481 zwischen $\log \sin 8^0 12'$ und $\log \sin 8^0 13'$. Hier ist $\frac{\text{sec}}{3}$ ohngefähr gleich 150. Es liegt 9,15481 + 300 nahe bei $8^0 11'$. Man setze also:

$$\begin{aligned} \log \text{arc}\, x &= 9{,}15481 \\ 2 \cdot \frac{\text{sec}}{3} &= \quad 296{,}4 \\ \text{Corr.} &= \quad +0{,}4 \\ \hline \log \text{tang}\, x &= 9{,}15778. \end{aligned}$$

Der richtigere Logarithmus ist $\log \text{tang}\, 8^0 11' = 9{,}15777{,}48$. Der Fehler beträgt also drei Einheiten der siebenten Stelle.

Da Tafel II. die Correctur bis $10^0 22' 43''$ angiebt, so wird es dadurch möglich, den Bogenlogarithmus etwas weiter zu bestimmen als Tafel I. reicht.

Beispiel 10). Gegeben (bei $10^0 20'$):

$$\begin{aligned} \log \sin &= 9{,}25376 \\ -\log \cos = 710; \quad \frac{-\log \cos}{3} &= \quad 236{,}7 \\ \text{Corr.} &= \quad -1{,}0 \\ \hline \log \text{arc}\, 10^0 20' &= 9{,}25612. \end{aligned}$$

§. 10.

Soll zu einem gegebenen Winkel der Logarithmus des Bogens gefunden werden, so verfährt man auf folgende Art.

Fällt der Winkel nicht schon von selbst zwischen 1^0 und 10^0, so multiplicirt (oder dividirt) man ihn so oft mit 10, bis er zwischen 1^0 und 10^0 fällt.

Man sucht zu dem so vervielfachten Winkel den Logarithmus des Sinus und addirt die entsprechende Ziffer $\frac{\text{sec}}{3}$. Die Summe giebt den Logarithmus des Bogens, den man in der Kennziffer entsprechend verändert.

Beispiel 11). Gesucht $\log \text{arc}\, 27' 30'' = \log \text{arc} \frac{4^0 35'}{10}$. Man setze:

$$\begin{aligned} \log \sin 4^0 35' &= 8{,}90260 \\ \frac{\text{sec}}{3} &= \quad 46{,}4 \\ \hline \log \text{arc}\, 27' 30'' &= 7{,}90306. \end{aligned}$$

§. 11.

Soll zu einem gegebenen Bogenlogarithmus der dazu gehörige Winkel gesucht werden, so verändert man den Logarithmus in der Kennziffer, bis er zwischen 8,24 und 9,24 fällt *), wenn er nehmlich nicht schon vorher zwischen diese Grenzen fiel. Man erhält dadurch den Logarithmus des mit irgend einer ganzen Potenz von 10 multiplicirten (oder dividirten) Bogens. Aus diesem Bogenlogarithmus findet man, wie §. 8. gezeigt wurde, den Logarithmus der Tangente (um die Subtraction zu vermeiden). Den erhaltenen Winkel dividirt (bezüglich multiplicirt) man entsprechend durch 10.

Beispiel 12). Gegeben $\log \text{arc} = 5{,}80615$, gesucht x Es ist $8{,}80615 > \log\sin 3^0 40'$. Bei $3^0 40'$ ist $\frac{\text{sec}}{3} = 29{,}6$ und $2 . \frac{\text{sec}}{3}$ etwa 60. Fügt man 60 dem obigen Logarithmus hinzu, so erkennt man sogleich, dass die entsprechende Tangente dem Sinus gegenüber liegt. Man setze also:

$$\log \text{arc}\, 1000x = 8{,}80615$$

$$2 . \frac{\text{sec}}{3} = \qquad 59{,}2$$

$$\log \text{tang}\, 1000x = 8{,}80674$$

$$= \log \text{tang}\, 3^0 40' \quad \text{und} \quad x = \frac{3^0\, 40'}{1000} = 13'',2.$$

Beispiel 13). Gegeben $\log \text{arc} = 7{,}86247$, gesucht x. Man setze:

$$\log \text{arc}\, 10x = 8{,}86247$$

$$\text{(zwischen } 4^0 10' \text{ und } 4^0 11'\text{)} \quad 2 . \frac{\text{sec}}{3} = \qquad 76{,}9$$

$$\log \text{tang}\, 10x = 8{,}86324 = \log \text{tang}\, 4^0\, 10'\, 28'',$$

$$\text{also} \quad x = \frac{4^0\, 10'\, 28''}{10} = 25'\, 2'',8.$$

§. 12.

Es wurde bereits in §. 1. bemerkt, dass die Anwendung der Differenzen für Secunden bei Winkeln, welche kleiner sind als

*) Genauer 8,24136 und 9,23967, die Logarithmen der Sinus von 1° und 10°.

$1\frac{3}{4}^0$, Fehler ergeben könne, die eine halbe Einheit der fünften Decimalstelle übersteigen. Sind die Tafeln auch innerhalb der ersten beiden Grade nur von Minute zu Minute eingetheilt und will man diese Fehler vermeiden, so müssen alle Winkel, welche an sich oder in ihrem Product mit 10 innerhalb jener Grenze, also zwischen 1^0 und $1^0 44'$ fallen, verdoppelt werden, wodurch der Fehler verschwindet.

Beispiel 14). Gesucht $\log \operatorname{arc} 36'',9 = \frac{2^0 3'}{200}$. Man setze:

$$\log \sin 2^0 3' = 8{,}55354$$
$$\frac{\sec}{3} = \quad 9{,}3$$
$$\log 0{,}005 = 7{,}69897$$
$$\log \operatorname{arc} \frac{2^0 3'}{200} = \log \operatorname{arc} 36'',9 = 6{,}25260.$$

Die Rechnung ohne Verdoppelung des Winkels wäre folgende gewesen:

Beispiel 15).

$$\log \sin 1^0 1' = 8{,}24903$$
$$\text{Diff. } 30'' = \quad 353{,}0$$
$$\frac{\sec}{3} = \quad 2{,}3$$
$$\log \operatorname{arc} \frac{1^0 1' 30''}{100} = 6{,}25258.$$

Das Resultat hätte sich mithin um zwei Einheiten der fünften Ziffer zu klein ergeben.

Es sei hier bemerkt, dass die Correctur aus Tafel II. bei Winkeln zwischen 5^0 und 10^0 Anwendung findet, während eine Verdoppelung der Winkel nur zwischen 1^0 und $1\frac{3}{4}^0$ nöthig ist, so dass die verdoppelten Winkel zwischen 2^0 und $3\frac{1}{2}^0$ fallen. Es trägt vielleicht zur Bequemlichkeit der Rechnung bei, dass beide Correcturen in Einer Winkelbestimmung niemals zugleich vorkommen können *).

*) Die Verdoppelung des Winkels, um die Sekundendifferenz richtig zu bestimmen, ist eine kleine Unbequemlichkeit für die Rechnung. Sie würde zu vermeiden sein, wenn in den fünfstelligen Tafeln bis zu $1^0 60'$ die Logarithmen von $10''$ zu $10''$ angegeben wären. Es beträgt nehmlich schon zwischen $17'30''$ und $17'40''$ der Fehler bei einer Sekundenbestimmung aus der logarithmischen Differenz von $10''$ weniger als eine

§. 13.

Die wichtigste Anwendung der Tabelle für $\frac{\sec}{3}$ bietet sich dar bei Auffindung der Sinus- und Tangentenlogarithmen kleiner Winkel und dieser Winkel selbst. Die Rechnung vollendet sich häufig durch Addition einer einzigen Zahl und (wäre eine Spalte für $\frac{\log\sec}{3}$ neben den übrigen Functionen gedruckt) durch einmaliges Nachschlagen. In einzelnen Fällen sind noch eine, höchstens zwei kleine Ziffern als Correctur anzubringen; und selbst diese Correctur würde, gemäss der Anmerkung zu §. 12., zu vermeiden sein.

Wird zu einem kleinen Winkel der Sinus- oder Tangentenlogarithmus gesucht, so multiplicirt man den Winkel nach Befinden mit 10 und verfährt im Uebrigen, wie §. 10. gezeigt wurde, indem man vorläufig den Bogenlogarithmus des einfachen Winkels sucht. Ist dieser Winkel kleiner als 10′, so giebt der Bogenlogarithmus zugleich den des Sinus und der Tangente, weil diese einander gleich sind.

Beispiel 16). Gesucht $\log\sin 13'',243 = \log\text{arc} = \log\text{tang}$. Es sind $13'',243 = \frac{3^0\,40'\,43''}{1000}$. Man setze:

---

halbe Einheit der fünften Decimalstelle des Logarithmus. Zwischen $\frac{4^0\,50'}{10} = 29'$ und $29'\,10''$ beträgt der Fehler nur 0,18 der fünften Decimalstelle, zwischen $54'\,50''$ und $55'$ nur eine halbe Einheit der sechsten Stelle.

Wären mithin die Logarithmen bis zu $1^0\,60'$ von $10''$ zu $10''$ in der Tafel angegeben, so würde nicht nur die Verdoppelung des Winkels in allen Fällen wegbleiben können, sondern es wäre sogar zulässig, auch die Tafel für $\frac{\sec}{3}$ nur bis zu 5^0 auszudehnen und die Correcturtafel II. ganz wegzulassen, weil deren Anwendung erst über 5^0 hinaus Bedeutung gewinnt.

Auch das Auffinden der Sinus und Tangenten aus den Bogenlogarithmen, so wie das Auffinden der Winkel aus den Logarithmen überhaupt, würde dadurch bequemer, weil die Logarithmen der Sinus, Tangenten und Bogen in diesen Grenzen neben einander liegen. Vergl. §. 8. und insbesondere die Anmerkung dazu.

Enthielte eine solche Tafel bis zu 5^0 noch unmittelbar neben den Winkeln eine Nebenspalte mit der Verwandlung der Winkel in Sekunden, so würde dadurch die Multiplication und Division mit 10 wesentlich erleichtert und die Bequemlichkeit für das Nachschlagen erhöht.

$$\begin{aligned}
\log\sin 3^0 40' &= 8{,}80585 \\
\text{Diff. } 43'' &= \quad 141{,}2 \\
\frac{\text{sec}}{3} &= \quad 29{,}8 \\
\log\sin 13'',243 &= 5{,}80756.
\end{aligned}$$

Ist für den einfachen Winkel in der Tabelle ein Werth für $\frac{\text{sec}}{3}$ angezeigt, was bei Winkeln über 10′ der Fall ist, so wird er entsprechend in Rechnung gebracht.

Beispiel 17). Gesucht $\log\sin 24'5''$ und $\log\operatorname{tang} 24'5''$. Es sind $24'5'' = \frac{4^0 0' 50''}{10}$.

$$\begin{aligned}
\log\sin 4^0 &= 8{,}84358 \\
\text{Diff. } 50'' &= \quad 150{,}8 \\
\text{bei } 4^0 0' 50'' \ldots \frac{\text{sec}}{3} &= \quad 35{,}6 \\
\text{bei } 24' \ldots \frac{\text{sec}}{3} &= \quad -0{,}3 \\
\log\sin 24'5'' &= 7{,}84544 \\
\text{bei } 24' \text{ ebenso } 2.\frac{\text{sec}}{3} &= \quad +0{,}6 \\
\log\operatorname{tang} 24'5'' &= 7{,}84545.
\end{aligned}$$

Fällt der Winkel, nachdem er mit 10 multiplicirt worden, zwischen 1^0 und $1\frac{3}{4}{}^0$, so wird er verdoppelt *).

Beispiel 18). Gesucht $\log\sin 8'6'',3 = \log\operatorname{tang} 8'6'',3$. Es ist $8'6'',3 = \frac{1^0 21' 3''}{10} = \frac{2^0 42' 6''}{20}$. Man setze:

$$\begin{aligned}
\log\sin 2^0 42' &= 8{,}67308 \\
\text{Diff. } 6'' &= \quad 26{,}7 \\
\frac{\text{sec}}{3} &= \quad 16{,}1 \\
\log 0{,}05 &= 8{,}69897 \\
\log\sin 8'6'',3 &= 7{,}37248.
\end{aligned}$$

Das Resultat der Rechnung wäre hier, auch ohne Verdoppelung, sich gleich geblieben:

---

*) Vergl. Anmerkung zu §. 12.

$$\log \sin 1^0 21' = 8{,}37217$$
$$\text{Diff. } 3'' = \quad 26{,}6$$
$$\frac{\sec}{3} = \quad 4{,}0$$
$$\log \sin 8' 6'',3 = 8{,}37248.$$

Fällt der Winkel nach der Multiplication mit 10 zwischen 5^0 und 10^0, so wird die Correctur aus Tafel II. anzuwenden sein.

Beispiel 19). Gesucht $\log\sin 47' 13'',8$ und $\log \tan g\, 47' 13'',8$. Es ist $47' 13'',8 = \frac{7^0 52' 18''}{10}$. Man setze:

$$\log \sin 7^0 52' = 9{,}13630$$
$$\text{Diff. } 18'' = \quad 27{,}6$$
$$\text{bei } 7^0 52',3 \ldots\ldots \frac{\sec}{3} = \quad 137{,}1$$
$$\text{bei } 47' \ldots\ldots \frac{\sec}{3} = \quad -1{,}3$$
$$\text{Corr. aus Tafel II.} = \quad -0{,}3$$
$$\log \sin 47' 13'',8 = 8{,}13793$$
$$\text{bei } 47' \ldots\ldots 2.\frac{\sec}{3} = \quad +2{,}6$$
$$\log \tan g\, 47' 13'',8 = 8{,}13797.$$

In der Praxis ist es in der Regel bequemer, anstatt der beiden Ziffern $\frac{\sec}{3}$ nur ihre Summe oder Differenz aufzuschreiben, da $\frac{\sec}{3}$ für den einfachen Winkel immer nur eine sehr kleine Zahl ist, welche bei Winkeln unter 10′ sogar ganz verschwindet, wie bereits erwähnt wurde.

§. 14.

Soll zu einem gegebenen kleinen Sinus- oder Tangentenlogarithmus der Winkel gefunden werden, so betrachtet man denselben vorläufig als Bogenlogarithmus und verfährt im Uebrigen nach §. 11.

Beispiel 20). Gegeben $\log \sin x = 5{,}81268$, gesucht x. Man setze:

$$\log \mathrm{arc}\, 1000x = 8{,}81268$$

$$\text{bei } 3^0 43' \ldots . 2.\frac{\sec}{3} = 2.30{,}5 = \qquad 61$$

$$\log \mathrm{tang}\, 1000x = 8{,}81329,$$

also $1000x = 3^0 43' 20''$ und $x = \frac{3^0 43' 20''}{1000} = 13'',4.$

Fällt der in der Kennziffer vergrösserte oder der ursprüngliche Logarithmus zwischen 8,24 und 8,48, wo also der Winkel zwischen 1^0 und $1\frac{3}{4}{}^0$ liegt, so addirt man nach $\log 2 = 0{,}30103$ *).

Beispiel 21). Gegeben $\log \mathrm{tang}\, x = 7{,}32804$. Man setze:

$$\log \mathrm{arc}\, 10x = 8{,}32804$$

$$\log 2 = 0{,}30103$$

$$\text{zwischen } 2^0 26' \text{ und } 2^0 27' \ldots . 2.\frac{\sec}{3} = \qquad 26{,}3$$

$$\log \mathrm{tang}\, 20x = 8{,}62933,$$

also $20x = 2^0 26' 20''$ und $x = 7' 19'',0.$

In den beiden Beispielen 20) und 21) fehlte das Element $\frac{\sec}{3}$ für den einfachen Winkel. Ob dieses Element anzuwenden sei, kann man sogleich erkennen, weil die logarithmischen Tafeln die Functionen von Minute zu Minute enthalten. So in

Beispiel 22). Gegeben $\log \sin x = 7{,}92910$, gesucht x. Man setze:

$$\log \mathrm{arc}\, 10x = 8{,}92910 \text{ **)}$$

$$\text{bei } 4^0 52' \text{ und } 29' \ldots . 2.\frac{\sec}{3} = 2.52{,}3 + 0{,}5 = \qquad 105{,}1$$

$$\log \mathrm{tang}\, 10x = 8{,}93015 \text{ ***)},$$

also $10x = 4^0 52' 0''$ und $x = 29' 12'',0.$

Beispiel 23). Gegeben $\log \mathrm{tang}\, x = 7{,}92912$, gesucht x. Man setze:

---

*) Vergl. Anmerkung zu §. 12.

**) Die Bezeichnung $\log \mathrm{arc}\, x$ in Beispiel 22) und 23) ist nicht streng correct, weil das Element $\frac{\sec}{3}$ fehlt; jene Bezeichnung soll nur die Behandlungsweise von $\log \sin x$ und $\log \mathrm{tang}\, x$ als $\log \mathrm{arc}\, x$ bedeuten.

***) Der genauere Logarithmus lautet $\log \mathrm{tang}\, 4^0 52' = 8{,}9301552$, der Fehler beträgt also zwei Einheiten der siebenten Decimalstelle.

$$\log \operatorname{arc} 10x = 8{,}92912$$

bei $4^0 52'$ und $29' \ldots . 2.\frac{\sec}{3} = 2.52{,}3 - 1{,}0 = \quad 103{,}6$

$$\log \operatorname{tang} 10x = 8{,}93016.$$

Uebrigens wie in Beispiel 22).

Fällt der vervielfachte Winkel zwischen 5^0 und 10^0, was man während der Rechnung erkennt, so wendet man die Correctur aus Tafel II. an, welche addirt wird.

Beispiel 24). Gegeben $\log \sin x = 6{,}07775$. Man setze:

$$\log \operatorname{arc} 1000x = 9{,}07775$$

zwischen $6^0 51'$ und $6^0 52' \ldots . 2.\frac{\sec}{3} = \quad 207{,}6$

$$\text{Corr.} = \quad +0{,}2$$

$$\log \operatorname{tang} 1000x = 9{,}07980,$$

also $x = \frac{6^0 51' 10''}{1000} = 24'',670.$

§. 15.

Der Fehler, welcher durch die in dem vorstehenden Aufsatz entwickelte Rechnungsweise entstehen kann, ermittelt sich auf folgende Art.

Es kann $\frac{\log \sec}{3}$ um 0,05 der fünften Stelle fehlerhaft sein. Dieser Fehler kann in Einer Winkelbestimmung zweimal vorkommen, einmal beim einfachen und einmal beim vervielfachten Winkel. Ferner kann die Correctur Tafel II. um 0,05 fehlerhaft sein. Bei der Wahl der Ziffer $\frac{\sec}{3}$ für den vervielfachten Winkel kann ebenfalls um 0,05 gefehlt sein. Fallen alle diese Fehler auf Eine Seite, so kann, je nachdem die verschiedenen Elemente vorkommen, der Fehler steigen auf 2.0,05 oder 3.0,05, oder 4.0,05 der fünften Ziffer, also auf 0,1 bis 0,2.

Erwägt man, dass der ursprüngliche Logarithmus in den Tafeln um 0,5 der fünften Ziffer unrichtig sein kann, so ist in Einer Winkelbestimmung ein Fehler von $0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$ der fünften Ziffer des Logarithmus möglich.

Ein solcher Fehler würde in der Nähe von 10^0, wo er die grösste Bedeutung hat, der Differenz von $0{,}7.\frac{60}{72} = 0'',6$ entspre-

chen, bei kleineren Winkeln einem verhältnissmässig geringeren Sekundenbruch.

Die Anwendung der Tabelle für $\frac{\log\sec}{3}$, wie sie Tafel I. darstellt, gewährt also eine Schärfe der Rechnung, wie sie von fünfstelligen Tafeln erwartet werden kann.

§. 16.

Da der Logarithmus der Cotangente gleich der decadischen Ergänzung des Tangentenlogarithmus ist, so lässt sich auch die Cotangente sehr kleiner Winkel mit derselben Genauigkeit bestimmen, wie die Tangente.

Beispiel 25). Gesucht cotg 1′23″,496. Es sind 1′ 23″,496 $= \frac{8349'',6}{100} = \frac{2^0\,19'\,9'',6}{100}$. Man setze:

$$\begin{aligned} \log\sin 2^0\,19' &= 8,60662 \\ \text{Diff. } 9'',6 &= \quad\;\; 49,8 \\ \frac{\sec}{3} &= \quad\;\; 11,8 \\ \hline \log\text{tang}\, 1'\,23'',496 &= 6,60724 \\ \log\text{cotg} &= 3,39276 \end{aligned}$$

also $\text{cotg}\, 1'\,23'',496 = 2470,4$.

Zu sieben Stellen findet man:

$$\begin{aligned} \log\text{arc}\, 1'' &= 4,6855749 \\ \log 83,496 &= 1,9216657 \\ \hline \log\text{tang}\, 1'\,23'',496 &= 6,6072406. \end{aligned}$$

Auch der Cosinus sehr kleiner Winkel lässt sich durch eine leichte Rechnung bestimmen. Es ist nehmlich $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, und da x nur sehr klein ist, so ist $\cos x = 1 - \frac{\sin^2 x}{2}$.

Beispiel 26). Es wird gesucht cos 24′5″. Nach Beispiel 17) ist $\log\sin 24'5'' = 7,84544$. Man setze:

$$\begin{aligned} 2\log\sin 24'5'' &= 5,69088 \\ \log 0,5 &= 9,69897 \\ \hline \log\left(\frac{\sin^2 x}{2}\right) &= 5,38985-10, \end{aligned}$$

also $\frac{\sin^2 x}{2} = 0,000024539$.

Es ist also $\cos 24'5'' = 1 - 0{,}000024539 = 0{,}999975461$.

Um die Schärfe der Rechnung zu zeigen, sei zum Vergleich hier:

Beispiel 27). Gesucht $\cos 24'5'',1$. Es ist $24'5'',1 = \frac{4^0 0' 51''}{10}$. Man setze:

$$
\begin{aligned}
\log\sin 4^0 0' &= 8{,}84358 \\
\text{Diff. } 51'' &= \phantom{8{,}}153{,}8 \\
\frac{\sec}{3} = 35{,}6 - 0{,}3 &= \phantom{8{,}1}35{,}3 \\
\hline
\log\sin 24'5'',1 &= 7{,}84547 \\
\hline
2\log\sin &= 5{,}69094 \\
\log 0{,}5 &= 9{,}69897 \\
\hline
\log\left(\frac{\sin^2 x}{2}\right) &= 5{,}38991 - 10
\end{aligned}
$$

also $\frac{\sin^2 x}{2} = 0{,}000024542$ und $\cos 24'5'',1 = 0{,}999975458$.

XXXIV.

Integration der Gleichung $x^m \frac{d^{2m}y}{dx^{2m}} = y$ für den Fall, wo m eine ganze negative Zahl ist.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

In meinen Studien über Integration linearer Differential-Gleichungen habe ich gefunden, dass in dem Falle, wo m eine ganze positive Zahl ist, obige Differential-Gleichung im innigsten Zusammenhange mit der Differential-Gleichung

$$xy'' + (1-m)y' - \mu y = 0$$

stehe, woselbst $\mu^m = 1$ ist.

Dieser Satz, den ich für positive Werthe von m bewiesen habe, lässt sich auch für negative Werthe von m beweisen. Setzt man nämlich:

$$m = -n,$$

so erhält man:

$$x^{-n}\frac{d^{-2n}y}{dx^{-2n}} = y \quad \text{oder} \quad \frac{d^{-2n}y}{dx^{-2n}} = x^n y \quad \text{oder endlich} \quad \frac{d^{2n}(x^n y)}{dx^{2n}} = y,$$

und diese Gleichung steht im innigsten Zusammenhange mit der Gleichung

$$xy'' + (n+1)y' - \mu y = 0,$$

woselbst

$$\mu^n = 1$$

ist. So hat man z. B. für $n=2$ die Gleichung:

$$\frac{d^4(x^2 y)}{dx^4} = y,$$

oder in entwickelter Form:

$$x^2 y'''' + 8xy''' + 12y'' - y = 0,$$

und diese Gleichung gestattet folgende Schreibweise:

$$x^2 y'''' + 8xy''' + 12y'' - y = x(xy'' + 3y' - \mu y)''$$
$$+ 3(xy'' + 3y' - \mu y)' + \mu(xy'' + 3y' - \mu y) = 0,$$

und wird daher erfüllt für jene Werthe von y, welche die Gleichung

$$xy'' + 3y' - \mu y = 0$$

identificiren.

So ist ferner für $n=3$:

$$\frac{d^6(x^3 y)}{dx^6} = y,$$

oder in entwickelter Form:

$$x^3 y^{(6)} + 18x^2 y^{(5)} + 90xy'''' + 120y''' - y = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich so schreiben:

$$x^3 y^{(6)} + 18x^2 y^{(5)} + 90xy'''' + 120y''' - y = x^2(xy'' + 4y' - \mu y)''''$$
$$+ 10x(xy''+4y'-\mu y)''' + (20+\mu x)(xy''+4y'-\mu y)'' + 4\mu(xy''+4y'-\mu y)'$$
$$+ \mu^2(xy'' + 4y' - \mu y) = 0,$$

und wird erfüllt für jene Werthe von y, welche die Gleichung

$$xy'' + 4y' - \mu y = 0$$

identificiren, u. s. w.

XXXV.

Integration der Differential-Gleichung

$$(a + bx + cx^2)(b + 2cx)y'' + A(a + bx + cx^2)y' + B(b + 2cx)y = 0.$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Ich setze, um obige Gleichung zu integriren:

$$a + bx + cx^2 = m + \xi,$$

und erhalte, da

$$\frac{dy}{dx} = y' = (b + 2cx)\frac{dy}{d\xi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = (b + 2cx)^2\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2c\frac{dy}{d\xi}$$

ist,

$$(m + \xi)[(b + 2cx)^3\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2c(b + 2cx)\frac{dy}{d\xi}] + A(m + \xi)(b + 2cx)\frac{dy}{d\xi}$$
$$+ B(b + 2cx)y = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $b + 2cx$ und ordnet sie sodann, so erhält man:

$$(m+\xi)(b+2cx)^2\frac{d^2y}{d\xi^2}+(m+\xi)(2c+A)\frac{dy}{d\xi}+By=0,$$

und setzt man hierin statt $(b+2cx)^2$ seinen Werth $4c(m+\xi)+b^2-4ac$, so hat man:

$$(m+\xi)[4c(m+\xi)+b^2-4ac]\frac{d^2y}{d\xi^2}+(2c+A)(m+\xi)\frac{dy}{d\xi}+By=0,$$

welche Gleichung leicht zu integriren ist.

XXVI.

Integration der Differential-Gleichung

$$(b+2cx)y''+A(a+bx+cx^2)y'+B(b+2cx)(a+bx+cx^2)y=0.$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Ich setze, um diese Gleichung zu integriren, ebenfalls:

$$a+bx+cx^2=m+\xi,$$

und erhalte sodann:

$$(b+2cx)^3\frac{d^2y}{d\xi^2}+2c(b+2cx)\frac{dy}{d\xi}+A(m+\xi)(b+2cx)\frac{dy}{d\xi}$$
$$+B(b+2cx)(m+\xi)y=0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $b+2cx$, setzt zugleich statt $(b+2cx)^2$ seinen Werth $4c(m+\xi)+b^2-4ac$, und ordnet schliesslich, so erhält man die Gleichung:

$$[4c(m+\xi)+b^2-4ac]\frac{d^2y}{d\xi^2}+[2c+A(m+\xi)]\frac{dy}{d\xi}+B(m+\xi)y=0,$$

welche äusserst leicht zu integriren ist.

XXXVII.

Integration der Gleichung

(1) $(b+2cx)y''+A(a+bx+cx^2)y'+B(b+2cx)y=0$, in welcher a, b, c, A und B beliebige constante Zahlen bedeuten.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Um die Gleichung (1) zu integriren, setze ich:

(2) . . . . $a+bx+cx^2=m+\xi$,

unter ξ eine neue Variable und unter m eine constante Zahl verstanden. Nun ist:

$$(3)\quad \frac{dy}{dx}=(b+2cx)\frac{dy}{d\xi},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=(b+2cx)^2\frac{d^2y}{d\xi^2}+2c\frac{dy}{d\xi};$$

folglich hat man, diese Werthe in (1) einführend und zugleich durch $b+2cx$ wegdividirend:

$$(4)\quad (b+2cx)^2\frac{d^2y}{d\xi^2}+[2c+A(a+bx+cx^2)]\frac{dy}{d\xi}+By=0.$$

Nun ist:

$$(b+2cx)^2=4c(a+bx+cx^2)+b^2-4ac,$$

folglich hat man, die Gleichung (2) berücksichtigend:

$$(5)\quad [4c(m+\xi)+b^2-4ac]\frac{d^2y}{d\xi^2}+[2c+A(m+\xi)]\frac{dy}{d\xi}+By=0,$$

und diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man m so wählt, auf dass $4cm+b^2-4ac=0$ wird; dann hat man:

$$4c\xi\frac{d^2y}{d\xi^2}+\left[2c+A\left(\frac{4ac-b^2}{4c}+\xi\right)\right]\frac{dy}{d\xi}+By=0,$$

was leicht zu integriren ist.

XXXVIII.

Berechnung der jährlichen Prämie bei Aussteuerkapitalien, mit Rückvergütung der Prämie im Falle des Todes.

Von

Herrn Professor Dr. *Dienger*

an der polytechnischen Schule in Carlsruhe.

Für die hiesige Versorgungsanstalt habe ich für diese und andere Aufgaben die Formeln aufzustellen und die Berechnung der Tabellen zu leiten gehabt. Da dabei eine Reihe verwickelter Fälle vorgekommen sind, die zum Theil — meines Wissens — noch nicht öffentlich erledigt wurden, oder doch noch nicht in der hier behandelten Form, so will ich einen oder den andern den Lesern des Archivs vorlegen, wobei ich zugleich auch jeweils die Berechnung der Deckungskapitalien angeben werde. Die hier zuerst betrachtete Aufgabe ist übrigens in einer andern Zeitschrift auch schon in Angriff genommen worden; trotzdem werde ich sie nochmals behandeln dürfen, da meine Endformeln eine ganz andere Gestalt haben.

I.

Bezeichnungen. i und j (ganze Zahlen) bezeichnen das Alter zweier versicherten Personen, und zwar i das des Einlegers (Versorgers), j das der Person, zu deren Gunsten eingelegt wird (Versorgten); N_i ist die in der Sterblichkeitstabelle neben i stehende Zahl; eben so ist die Bedeutung von N_j; p ist der Zinsfuss, d. h. wenn die Versicherungs Gesellschaft die Verzinsung zu q% annimmt, so ist $p=\frac{100+q}{100}$;

$$k_i \text{ ist der Werth des Bruches } \frac{N_i}{p^i}; \quad k_j=\frac{N_j}{p^j};$$

ΣS_i ist $= S_i + S_{i+1} + S_{i+2} + \ldots$ bis zu Ende der Sterblichkeitstafel; also z. B. $\Sigma N_i = N_i + N_{i+1} + \ldots$, $\Sigma k_j = k_j + k_{j+1} + k_{j+2} + \ldots$, $\Sigma(N_i \Sigma k_j) = N_i \Sigma k_j + N_{i+1} \Sigma k_{j+1} + N_{i+2} \Sigma k_{j+2} + \ldots$, wo wieder $\Sigma k_{j+1} = k_{j+1} + k_{j+2} + \ldots$, $\Sigma k_{j+2} = k_{j+2} + k_{j+3} + \ldots, \ldots$ also allgemein $\Sigma k_{j+n} = \Sigma k_j - (k_j + k_{j+1} + \ldots + k_{j+n-1})$.

II.

Die hier zu behandelnde Aufgabe ist nun folgende: An einen Versorgten, dessen Alter jetzt j ist, soll ein Kapital K ausbezahlt werden, wenn er das Alter $j+h$ erreicht. Dieses Recht soll dadurch erkauft werden, dass ein Versorger, dessen Alter jetzt i ist, alljährlich eine Summe P bezahlt und zwar zum ersten Male sofort und dann, so lange beide Personen zusammen leben, längstens aber jedenfalls nur bis zu dem Jahre, das der Kapitalauszahlung vorangeht. Stirbt der Versorgte vor dieser Zeit, so werden die eingezahlten „Prämien“ ohne Zins dem Versorger (oder dessen Rechtsnachfolger) zurückbezahlt.

Wir setzen hiebei alle Ein- und Auszahlungen auf den 31. Dezember des betreffenden Jahres an, und i, j sind die Altersjahre, welche die beiden Versicherten eben in dem betreffenden Kalenderjahre erreicht haben.

1) Einzahlungen. Angenommen es treten $N_i N_j$ versicherte Paare unter den eben angegebenen Bedingungen in die Versicherungs-Gesellschaft ein, so leben von denselben am Schlusse des 1sten Jahres (das Eintrittsjahr als 0tes angesehen) noch $N_{i+1} N_{j+1}$ Paare ungetrennt; am Schlusse des 2ten Jahres noch $N_{i+2} N_{j+2}$, u. s. w. Die letzten Einzahlungen geschehen am Schlusse des $h-1$ten Jahres, wo noch $N_{i+h-1} N_{j+h-1}$ Paare (von den eingetretenen) ungetrennt leben. Hieraus ergiebt sich sofort für den baaren Werth aller Einzahlungen:

(1)

$$N_i N_j P + N_{i+1} N_{j+1} \frac{P}{p} + N_{i+2} N_{j+2} \frac{P}{p^2} + \ldots + N_{i+h-1} N_{j+h-1} \frac{P}{p^{h-1}}.$$

2) Auszahlungen. Diese sind doppelter Art: Auszahlung des versicherten Kapitals (Aussteuer) und Rückzahlung der eingelegten Prämien.

Von den eingetretenen $N_i N_j$ Paaren sind $N_i N_{j+h}$ in der Lage, das Aussteuerkapital zu erhalten, da diese Auszahlung bloss vom Leben des Versorgten abhängt, und von $N_i N_j$ jetzt eingetretenen

Versorgten noch $N_i N_{j+h}$ am Schlusse des $h$ten Jahres leben. Der baare Werth aller Aussteuern ist also:

$$N_i N_{j+h} \frac{K}{p^h} \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Was die Rückzahlungen betrifft, so hängen sie auch nur vom Tode des Versorgten ab, und zwar werden im $r$ten Jahre (31. Dezember) die eingezahlten Prämien zurückbezahlt an diejenigen Paare, von denen der Versorgte im Laufe dieses Jahres gestorben ist, gleichviel, ob der Versorger noch lebt oder nicht. Doch muss darauf geachtet werden, dass die Prämien-Einzahlung eben auch schon früher aufgehört hat, wenn der Versorger bereits todt war. Untersuchen wir nun die Rückzahlungen am Schlusse des $r$ten Jahres.

Von den beim Eintritt hinterlegten Prämien werden zurückbezahlt diejenigen, die von Paaren herrühren, deren Versorgter im Laufe des $r$ten Jahres starb. Der Anzahl nach sind dies $N_i(N_{j+r-1} - N_{j+r})$. Von den am Schlusse des ersten Jahres eingelegten Prämien werden zurückbezahlt diejenigen, welche von Paaren herrühren, deren Versorger am Schlusse dieses ersten Jahres noch lebte, und deren Versorgter im Laufe des $r$ten Jahres starb. Der Zahl nach sind es $N_{i+1}(N_{j+r-1} - N_{j+r})$.

Ebenso wegen der im 2ten Jahre bezahlten Prämien:

$$N_{i+2}(N_{j+r-1} - N_{j+r}); \quad \text{u. s. w.}$$

Endlich wegen der am Schlusse des $r$ten Jahres bezahlten:

$$N_{i+r-1}(N_{j+r-1} - N_{j+r}).$$

Demnach ist die Gesammtsumme aller am Schlusse des $r$ten Jahres zurückzuzahlenden Prämien:

$$P(N_{j+r-1} - N_{j+r})(N_i + N_{i+1} + \ldots + N_{i+r-1})$$
$$= P(N_{j+r-1} - N_{j+r})(\Sigma N_i - \Sigma N_{i+r}).$$

Der baare Werth dieser Summe ist:

$$\frac{P}{p^r} N_{j+r-1} - N_{j+r})(\Sigma N_i - \Sigma N_{i+r}).$$

Da

$$\frac{N_{j+r-1}}{p^r} = \frac{N_{j+r+1} p^j}{p\, p^{j+r-1}} = \frac{p^j k_j}{p}, \quad \frac{N_{j+r}}{p^r} = \frac{N_{j+r} p^j}{p^{j+r}} = k_{j+r} p^j,$$

so ist dies auch:

$$\frac{P}{p}p^j(k_{j+r-1}-pk_{j+r})(\Sigma N_i-\Sigma N_{i+r}).$$

Die Zahl r hat die Werthe 1, 2..., h, so dass die Summe aller baaren Werthe der Rückzahlungen:

$$\frac{P}{p}p^j[(k_j-pk_{j+1})(\Sigma N_i-\Sigma N_{i+1})+(k_{j+1}-pk_{j+2})(\Sigma N_i-\Sigma N_{i+2})+\ldots$$
$$\ldots.+(k_{j+h-1}-pk_{j+n})(\Sigma N_i-\Sigma N_{i+h})].$$

Die eingeklammerte Grösse ist:

$$(k_j-pk_{j+1})N_i+(k_{j+1}-pk_{j+2})(N_i+N_{i+1})+\ldots.$$
$$\ldots.+(k_{j+h-1}-pk_{j+h})(N_i+N_{i+1}+\ldots.+N_{i+h-1})$$
$$=N_i[k_j-pk_{j+1}+k_{j+1}-pk_{j+2}+k_{j+2}-pk_{j+3}+\ldots+k_{j+h-1}-pk_{j+h}]$$
$$+N_{i+1}[k_{j+1}-pk_{j+2}+k_{j+2}-pk_{j+3}+\ldots.+k_{j+h-1}-pk_{j+h}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+N_{i+h-1}[k_{j+h-1}-pk_{j+h}].$$

Aber

$$k_{j+n}-pk_{j+n+1}+k_{j+n+1}-pk_{j+n+2}+\ldots.+k_{j+h-1}-pk_{j+h}$$
$$=pk_{j+n}-pk_{j+n}+k_{j+n}-pk_{j+n+1}+k_{j+n+1}-\ldots.$$
$$\ldots.-pk_{j+h-1}+k_{j+h-1}-pk_{j+h}$$
$$=p(k_{j+n}-k_{j+h})-(p-1)(k_{j+n}+k_{j+n+1}+\ldots.+k_{j+h-1})$$
$$=p(k_{j+n}-k_{j+h})-(p-1)(\Sigma k_{j+n}-\Sigma k_{j+h}).$$

Also ist jene eingeklammerte Grösse:

$$N_i[p(k_j-k_{j+h})-(p-1)(\Sigma k_j-\Sigma k_{j+h})]$$
$$+N_{i+1}[p(k_{j+1}-k_{j+h})-(p-1)(\Sigma k_{j+1}-\Sigma k_{j+h})]$$
$$+N_{i+2}[p(k_{j+2}-k_{j+h})-(p-1)\Sigma k_{j+2}-\Sigma k_{j+h})]+\ldots.$$
$$\ldots.+N_{i+h-1}[p(k_{j+h-1}-k_{j+h})-(p-1)(\Sigma k_{j+h-1}-\Sigma k_{j+h})]$$
$$=p[N_ik_j+N_{i+1}k_{j+1}+..+N_{i+h-1}k_{j+h-1}-k_{j+h}(N_i+N_{i+1}+..+N_{i+h-1})]$$
$$-(p-1)[N_i\Sigma k_j+N_{i+1}\Sigma k_{j+1}+\ldots.$$
$$\ldots.+N_{i+h-1}\Sigma k_{j+h-1}-\Sigma k_{j+h}(N_i+N_{i+1}+\ldots N_{i+h-1})]$$
$$=p[\Sigma(N_ik_j)-\Sigma(N_{i+h}k_{j+h})-k_{j+h}(\Sigma N_i-\Sigma N_{i+h})]$$
$$-(p-1)[\Sigma(N_i\Sigma k_j)-\Sigma(N_{i+h}\Sigma k_{j+h})-\Sigma k_{j+h}(\Sigma N_i-\Sigma N_{i+h})].$$

Also ist der baare Werth aller Rückzahlungen:

(3)

$$Pp^j\left\{\begin{array}{l}\Sigma(N_ik_j)-\Sigma(N_{i+h}k_{j+h}-\frac{p-1}{p}[\Sigma(N_i\Sigma k_j)-\Sigma(N_{i+h}\Sigma k_{j+h})]\\ \qquad -(\Sigma N_i-\Sigma N_{i+h})(k_{j+h}-\frac{p-1}{p}\Sigma k_{j+1})\end{array}\right\}.$$

Da (1) gleich der Summe von (2) und (3) sein muss, so ist:

$$P(N_iN_j + \frac{N_{i+1}N_{j+1}}{p} + \ldots + \frac{N_{i+h-1}N_{j+h-1}}{p^{h-1}})$$

$$= N_iN_{j+h}\frac{K}{p^h} + Pp^j[\Sigma N_ik_j - \Sigma N_{i+h}k_{j+h} - \frac{p-1}{p}(\Sigma N_i\Sigma k_j - \Sigma N_{i+h}\Sigma k_{j+h})$$

$$-(\Sigma N_i - \Sigma N_{i+h})(k_{j+h} - \frac{p-1}{p}\Sigma k_{j+h})].$$

Dividirt man beiderseitig durch p^j und beachtet, dass $\frac{N_{i+n}N_{j+n}}{p^{j+n}} = N_{i+n}k_{j+n}$, so hat man:

$$P[\Sigma(N_ik_j) - \Sigma(N_{i+h}k_{j+h})] = N_ik_{j+h}K$$

$$+P\left\{\begin{array}{c}\Sigma(N_ik_j) - \Sigma(N_{i+h}k_{j+h}) - \frac{p-1}{p}[\Sigma(N_i\Sigma k_j) - \Sigma(N_{i+h}\Sigma k_{j+h})] \\ -(\Sigma N_i - \Sigma N_{i+h})(k_{j+h} - \frac{p-1}{p}\Sigma k_{j+h})\end{array}\right\}.$$

Daraus folgt:

(4)

$$\frac{K}{P} = \frac{\Sigma N_i - \Sigma N_{i+h}}{N_i}(1 - \frac{p-1}{p}\frac{\Sigma k_{j+h}}{k_{j+h}})$$

$$+ \frac{p-1}{p}\frac{\Sigma(N_i\Sigma k_j) - \Sigma(N_{i+h}\Sigma k_{j+h})}{N_jk_{j+h}},$$

welche Formel die Aufgabe löst und auch zur Berechnung sehr bequem ist.

III.

Das Deckungskapital eines Vertrags ist diejenige Summe, welche die Lebensversicherungsgesellschaft baar zu Handen haben muss, um allen aus dem Vertrage künftig fliessenden Verpflichtungen genügen zu können. Dasselbe ist somit gleich dem baaren Werthe aller künftigen Auszahlungen, vermindert um den baaren Werth aller künftigen Einzahlungen.

Um dasselbe für unseren Fall, und zwar für das Alter μ des Versorgers und ν des Versorgten (wo also $\mu - i = \nu - j$) d. h. für den 31. Dezember des betreffenden Kalenderjahres, zu berechnen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1) Versorger und Versorgter leben noch.

Wir setzen voraus, dass Ein- und Auszahlungen, welche am fraglichen 31. Dezember zu geschehen haben, bereits vollzogen sind, nehmen also darauf keine Rücksicht.

Baarer Werth aller künftigen Einzahlungen:

$$N_{\mu+1}N_{\nu+1}\frac{P}{p}+N_{\mu+2}N_{\nu+2}\frac{P}{p^2}+\ldots+N_{i+h-1}N_{j+h-1}\frac{P}{p^{j+h-1-\nu}}.$$

Baarer Werth der Aussteuerkapitalien für die am betreffenden 31. Dezember noch ungetrennt lebenden $N_\mu N_\nu$ Paare:

$$N_\mu N_{j+n}\frac{K}{p^{j+h-\nu}}.$$

Was die Zurückzahlung der Prämien betrifft, so geschieht sie für die $N_\mu N_\nu$ Paare nach

einem Jahre an	$N_\mu(N_\nu-N_{\nu+1})$,	von denen jedes die Prämie	$\nu-j+1$ mal zahlte,
zwei Jahren -	$N_\mu(N_{\nu+1}-N_{\nu+2})$,		$\nu-j+1$ - -
-	$N_{\mu+1}(N_{\nu+1}-N_{\nu+2})$,		1 - -
drei Jahren -	$N_\mu(N_{\nu+2}-N_{\nu+3})$,		$\nu-j+1$ - -
-	$N_{\mu+1}(N_{\nu+2}-N_{\nu+3})$,		1 - -
-	$N_{\mu+2}(N_{\nu+2}-N_{\nu+3})$,		1 - -

u. s. w.

Demnach ist der baare Werth aller Rückzahlungen:

$$(\nu-j)P\left[\frac{N_\mu(N_\nu-N_{\nu+1})}{p}+\frac{N_\mu(N_{\nu+1}-N_{\nu+2})}{p}+\ldots+\frac{N_\mu(N_{j+h-1}-N_{j+h})}{p_{j+h-\nu}}\right]$$

$$+P\left[\frac{N_\nu-N_{\nu+1}}{p}N_\mu+\frac{N_{\nu+1}-N_{\nu+2}}{p^2}(N_\mu+N_{\mu+1})+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{N_{j+h-1}-N_{j+h}}{p^{j+h-\nu}}(N_\mu+N_{\mu+1}+\ldots+N_{i+h-1})\right]$$

$$=(\nu-j)\frac{P}{p}p^\nu N_\mu[k_\nu-pk_{\nu+1}+k_{\nu+1}-pk_{\nu+2}+\ldots+k_{j+h-1}-pk_{j+h}]$$

$$+\frac{P}{p}p^\nu[(k_\nu-pk_{\nu+1})(\Sigma N_\mu-\Sigma N_{\mu+1})+(k_{\nu+1}-pk_{\nu+2})(\Sigma N_\mu-\Sigma N_{\mu+2})+\ldots$$

$$\ldots+(k_{j+h-1}-pk_{j+h})(\Sigma N_\mu-\Sigma N_{i+h})]$$

$$=(\nu-j)\frac{P}{p}p^\nu N_\mu[p(k_\nu-k_{j+h})-(p-1)(\Sigma k_\nu-\Sigma k_{j+h})]$$

$$+Pp^\nu\{\Sigma(N_\mu k_\nu)-\Sigma(N_{i+h}k_{j+h})-\frac{p-1}{p}[\Sigma(N_\mu\Sigma k_\nu)-\Sigma(N_{i+h}\Sigma k_{j+h})]$$

$$-(\Sigma N_\mu-\Sigma N_{i+h})(k_{j+h}-\frac{p-1}{p}\Sigma k_{j+h})\},$$

wie aus II. sich sofort ergibt. Da der baare Werth aller Einzahlungen $= Pp^v[\Sigma(N_{\mu+1}k_{v+1}) - \Sigma(N_{i+h}k_{j+h})]$, so ist, wenn D das Deckungskapital für einen Vertrag:

$$N_\mu N_v D = N_\mu N_{j+h} \frac{K}{p^{j+h-v}}$$
$$+ (v-j) P N_\mu p^v [k_v - k_{j+h} - \frac{p-1}{p}(\Sigma k_v - \Sigma k_{j+h})]$$
$$+ Pp^v \{ \Sigma(N_\mu k_v) - \Sigma(N_{i+h}k_{j+h}) - \frac{p-1}{p}[\Sigma(N_\mu \Sigma k_v) - \Sigma(N_{i+h}\Sigma k_{j+h})]$$
$$- (\Sigma N_\mu - \Sigma N_{i+h})(k_{j+h} - \frac{p-1}{p}\Sigma k_{j+h}) \}$$
$$- Pp^v[\Sigma(N_{\mu+1}k_{v+1}) - \Sigma(N_{i+h}k_{j+h})].$$

Da $\Sigma(N_\mu k_v) - \Sigma(N_{\mu+1}k_{v+1}) = N_\mu k_v$, so ergibt sich hieraus:

(5)

$$D = \frac{k_{j+h}}{k_v} K + \frac{(v-j)P}{k_v}[k_v - k_{j+h} - \frac{p-1}{p}(\Sigma k_v - \Sigma k_{j+h})]$$
$$+ P[1 - \frac{\Sigma N_\mu - \Sigma N_{i+h}}{N_\mu k_v}(k_{j+h} - \frac{p-1}{p}\Sigma k_{j+h})]$$
$$- P\frac{p-1}{p}\frac{\Sigma(N_\mu \Sigma k_v) - \Sigma(N_{i+h}\Sigma k_{j+h})}{N_\mu k_v}.$$

2) Der Versorger ist todt, der Versorgte lebt noch.
Der Versorger starb im Jahre, da der Versorgte $j+r$ Jahre alt wurde.

Von den eingetretenen Paaren sind in dieser Lage $(N_{i+r-1} - N_{i+r})N_v$. Von Prämienzahlungen ist jetzt keine Rede mehr; die Aussteuerauszahlung geschieht an $(N_{i+r-1} - N_{i+r})N_{j+h}$ Paare. Was die Rückvergütung betrifft, so ist die Prämienzahlung $r$mal geschehen und wird rückvergütet nach

einem Jahre an $(N_{i+r-1} - N_{i+r})(N_v - N_{v+1})$ Paare von den hier
zwei Jahren - $(N_{i+r-1} - N_{i+r})(N_{v+1} - N_{v+2})$ - in Betracht
drei - - $(N_{i+r-1} - N_{i+r})(N_{v+2} - N_{v+3})$ - kommenden.
u. s. w.

Daraus ergibt sich, wenn D das Deckungskapital:

$$(N_{i+r-1} - N_{i+r})N_v D = (N_{i+r-1} - N_{i+r})N_{j+h}\frac{K}{p^{j+h-v}}$$
$$+ rP(N_{i+r-1} - N_{i+r})[\frac{N_v - N_{v+1}}{p} + \frac{N_{v+1} - N_{v+2}}{p^2} + \ldots + \frac{N_{j+h-1} - N_{j+h}}{p^{j+h-v}}],$$

$$(6)\qquad D=\frac{k_{j+h}}{k_\nu}K+\frac{\nu P}{k_\nu}\left[k_\nu-k_{j+h}-\frac{p-1}{p}(\Sigma k_\nu-\Sigma k_{j+h})\right].$$

Hier ist übrigens $\nu=1, 2, \ldots, \mu-i$.

Zur ganzen Rechnung ist zu bemerken, dass es sich überall nur um die sogenannten Nettoprämien handelt, die z. B. bei der badischen Versorgungsanstalt 95 % der Bruttoprämien betragen.

Mittelst der Formel (4) habe ich die in den Statuten abgedruckten Tabellen berechnen lassen; es gehört selbstverständlich die Anfertigung einiger Hilfstafeln dazu, die aber auch noch in den meisten anderen Fällen zu verwenden sind.

IV.

Die gestellte Aufgabe ist hiermit vollständig erledigt. Doch ist es immer von Wichtigkeit, die gefundenen Formeln zu kontroliren. Für die Deckungskapitalien geschieht dies durch den Grundsatz, dass die eingegangenen Prämien, nach Abzug der gemachten Auszahlungen, bis zu dem betreffenden Zeitpunkte zu dem Betrage des Deckungskapitals angewachsen sein müssen.

Betrachten wir wieder die N_iN_j eingetretenen Paare, so werden ihre Einlagen bis zum Schlusse des Jahres, da der Versorger μ Jahre alt war, (mit Einschluss der letzten Prämie) angewachsen sein auf

$$P(N_iN_jp^{\nu-j}+N_{i+1}N_{j+1}p^{\nu-j-1}+\ldots+N_\mu N_\nu)$$
$$=Pp^\nu[\Sigma(N_ik_j)-\Sigma(N_{\mu+1}k_{\nu+1})].$$

Die Auszahlungen (Rückerstattungen) würden, als Kapitalien betrachtet (nach II), angewachsen sein auf

$$\begin{aligned}&P[(N_j-N_{j+1})(\Sigma N_i-\Sigma N_{i+1})p^{\nu-j-1}\\&+(N_{j+1}-N_{j+2})(\Sigma N_i-\Sigma N_{i+2})p^{\nu-j-2}+\ldots\\&\ldots+(N_{\nu-1}-N_\nu)(\Sigma N_i-\Sigma N_\mu)]\\&=\frac{P}{p}p^\nu[(k_j-pk_{j+1})(\Sigma N_i-\Sigma N_{i+1})+(k_{j+1}-pk_{j+2})(\Sigma N_i-\Sigma N_{i+2})+\ldots\\&\ldots+(k_{\nu-1}-pk_\nu)(\Sigma N_i-\Sigma N_\mu)]\\&=Pp^\nu\{\Sigma(N_ik_j)-\Sigma(N_\mu k_\nu)-\frac{p-1}{p}[\Sigma(N_i\Sigma k_j)-\Sigma(N_\mu\Sigma k_\nu)]\\&-(\Sigma N_i-\Sigma N_\mu)(k_\nu-\frac{p-1}{p}\Sigma k_\nu)\}.\end{aligned}$$

Also ist der fragliche gesammte Betrag:

(7)

$$Pp^\nu\{\Sigma(N_ik_j)-\Sigma(k_{\nu+1}N_{\mu+1})-[\Sigma(N_ik_j)-\Sigma(N_\mu k_\nu)]$$
$$+\frac{p-1}{p}[\Sigma(N_i\Sigma k_j)-\Sigma(N_\mu\Sigma k_\nu)]+(\Sigma N_i-\Sigma N_\mu)(k_\nu-\frac{p-1}{p}\Sigma k_\nu)\}$$
$$=Pp^\nu\{N_\mu k_\nu+\frac{p-1}{p}[\Sigma(N_i\Sigma k_j)-\Sigma(N_\mu\Sigma k_\nu)]$$
$$+(\Sigma N_i-\Sigma N_\mu)(k_\nu-\frac{p-1}{p}\Sigma k_\nu)\}.$$

Was nun den Gesammtbetrag der Deckungskapitalien betrifft, so sind $N_\mu N_\nu$ Verträge vorhanden, für welche das Deckungskapital nach (5) zu rechnen ist, und $(N_{i+r-1}-N_{i+r})N_\nu$, für die (6) gilt, wo aber $\nu=1, 2, \ldots, \mu-i$ zu setzen ist.

Daraus folgt, dass dieser Gesammtbetrag ist:

$$N_\mu N_\nu\left\{\frac{k_{j+h}}{k_\nu}K+\frac{(\nu-j)P}{k_\nu}[k_\nu-k_{j+h}-\frac{p-1}{p}(\Sigma k_\nu-\Sigma k_{j+h})]\right.$$
$$+P[1-\frac{\Sigma N_\mu-\Sigma N_{i+h}}{N_\mu k_\nu}(k_{j+h}-\frac{p-1}{p}\Sigma k_{j+h})]$$
$$\left.-P\frac{p-1}{p}\frac{\Sigma(N_\mu\Sigma k_\nu)-\Sigma(N_{i+h}\Sigma k_{j+h})}{N_\mu k_\nu}\right\}$$
$$+(N_i-N_{i+1})N_\nu\left\{\frac{k_{j+h}}{k_\nu}K+\frac{P}{k_\nu}[k_\nu-k_{j+h}-\frac{p-1}{p}(\Sigma k_\nu-\Sigma k_{j+h})]\right\}$$
$$+(N_{i+1}-N_{i+2})N_\nu\left\{\frac{k_{j+h}}{k_\nu}K+2\frac{P}{k_\nu}[k_\nu-k_{j+h}-\frac{p-1}{p}(\Sigma k_\nu-\Sigma k_{j+h})]\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(N_{\mu-1}-N_\mu)N_\nu\left\{\frac{k_{j+h}}{k_\nu}K+\frac{(\mu-i)P}{k_\nu}[k_\nu-k_{j+h}-\frac{p-1}{p}(\Sigma k_\nu-\Sigma k_{j+h})]\right\},$$
$$(\mu-i=\nu-j)$$
$$=N_iN_\nu\frac{k_{j+h}}{k_\nu}K+N_\nu(\Sigma N_i-\Sigma N_\mu)\frac{P}{k_\nu}[k_\nu-k_{j+h}-\frac{p-1}{p}(\Sigma k_\nu-\Sigma k_{j+h})]$$
$$+N_\mu N_\nu P[1-\frac{\Sigma N_\mu-\Sigma N_{i+h}}{N_\mu k_\nu}(k_{j+h}-\frac{p-1}{p}\Sigma k_{j+h})]$$
$$-N_\mu N_\nu P\frac{p-1}{p}\frac{\Sigma(N_\mu\Sigma k_\nu)-\Sigma(N_{i+h}\Sigma k_{j+h})}{N_\mu k_\nu}.$$

Führt man den Werth von K aus (4) ein und beachtet, dass $N_\nu=p^\nu k_\nu$, so hat man:

$$Pp^v\{k_{j+h}(\Sigma N_i - \Sigma N_{i+h})(1 - \frac{p-1}{p}\frac{\Sigma k_{j+h}}{k_{j+h}}) + \frac{p-1}{p}[\Sigma(N_i \Sigma k_j)$$

$$- \Sigma(N_{i+h}\Sigma k_{j+h})] + (\Sigma N_i - \Sigma N_\mu)[k_v - k_{j+h} - \frac{p-1}{p}(\Sigma k_v - \Sigma k_{j+h})]$$

$$+ N_\mu k_v - (\Sigma N_\mu - \Sigma N_{i+h})(k_{j+h} - \frac{p-1}{p}\Sigma k_{j+h})$$

$$- \frac{p-1}{p}[\Sigma(N_\mu \Sigma k_v) - \Sigma(N_{i+h}\Sigma k_{j+h})]\}$$

$$= Pp^v\{N_\mu k_v + \frac{p-1}{p}[\Sigma(N_i \Sigma k_j) - \Sigma(N_\mu \Sigma k_v)]$$

$$+ (\Sigma N_i - \Sigma N_\mu)[k_v - \frac{p-1}{p}\Sigma k_v]\},$$

welches genau der Ausdruck (7) ist. Damit ist auch die Richtigkeit unserer Formeln erwiesen.

XXXIX.

Ueber die *n*ten Näherungswerthe der periodischen Kettenbrüche

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ldots}} \quad \text{und} \quad \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\ldots}}}}$$

Von

Herrn Director und Professor Dr. *Strehlke*

in Danzig.

Der $n$te Näherungswerth des Kettenbruches $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\ldots}}$ ist nach Clausen*):

$$= \frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^n - \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^n}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^{n+1} - \left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^{n+1}}.$$

Vor längerer Zeit habe ich für diesen Werth den folgenden Ausdruck gefunden:

$$\frac{\left\{\begin{matrix} a^{n-1}+(n-2)a^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}a^{n-5} \\ +\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a^{n-7}+\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.2.3.4}a^{n-9}+\ldots \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} a^n+(n-1)a^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}a^{n-4} \\ +\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}a^{n-6}+\frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}a^{n-8}+\ldots \end{matrix}\right\}}$$

---

*) Crelle's Journal 3. Bd. S. 88.

Der $n$te Näherungswerth des periodischen Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}+\dots}}}$$

ist, wenn n eine gerade Zahl:

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l} a^{\frac{n-2}{2}}b^{\frac{n}{2}}+(n-2)a^{\frac{n-4}{2}}.b^{\frac{n-2}{2}}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}a^{\frac{n-6}{2}}.b^{\frac{n-4}{2}} \\ \quad +\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a^{\frac{n-8}{2}}.b^{\frac{n-6}{2}}+\dots \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}+(n-1)a^{\frac{n-2}{2}}.b^{\frac{n-2}{2}}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}a^{\frac{n-4}{2}}.b^{\frac{n-4}{2}} \\ \quad +\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}a^{\frac{n-6}{2}}.b^{\frac{n-6}{2}}+\dots \end{array}\right\}}.$$

Für die Brüche $\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a-\dots}}}$ und $\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{b}-\dots}}}$

wechseln im Zähler und Nenner dieser Ausdrücke die Vorzeichen vom 2ten Gliede an. Für den $n$ten Näherungswerth des Bruches $\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a-\dots}}$ findet man leicht den Ausdruck:

$$\frac{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)^n-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)^n}{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)^{n+1}-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}\right)^{n+1}}.$$

Nimmt man $a=2\cos\theta$, so wird der $n$te Näherungswerth:

$$\frac{(\cos\theta+\sin\theta.\sqrt{-1})^n-(\cos\theta-\sin\theta\sqrt{-1})^n}{(\cos\theta+\sin\theta.\sqrt{-1})^{n+1}-(\cos\theta-\sin\theta.\sqrt{-1})^{n+1}}$$

$$=\frac{\cos n\theta+\sin n\theta.\sqrt{-1}-\cos n\theta+\sin n\theta.\sqrt{-1}}{\cos(n+1)\theta+\sin(n+1)\theta.\sqrt{-1}-\cos(n+1)\theta+\sin(n+1)\theta.\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{\sin n\theta}{\sin(n+1)\theta}.$$

XL.

Construction derjenigen linearen Differential-Gleichung, der genügt wird durch

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y = e^{\lambda\int\sqrt{\frac{m+x}{n+x}}dx},$$

unter λ, m und n constante Zahlen verstanden.

Von

Herrn ***Simon Spitzer***,

ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute in **Wien**.

Aus (1) folgt durch Differenziren:

$$(2) \ldots\ldots \quad y' = \lambda\sqrt{\frac{m+x}{n+x}}\, e^{\lambda\int\sqrt{\frac{m+x}{n+x}}dx},$$

und diese Gleichung lässt sich so schreiben:

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y' = \lambda\sqrt{\frac{m+x}{n+x}}y.$$

Durch Quadriren und darauf folgende Multiplication derselben mit $n+x$ erhält man:

$$(4) \ldots\ldots\ldots \quad (n+x)y'^2 = \lambda^2(m+x)y^2.$$

Differenzirt man diese Gleichung, so erhält man:

$$(5) \qquad 2(n+x)y'y'' + y'^2 = 2\lambda^2(m+x)yy' + \lambda^2y^2,$$

und eliminirt man aus dieser Gleichung und der vorhergehenden y^2, so erhält man:

$$(6) \ldots \quad (m+x)(n+x)y'' + \frac{m-n}{2}y' - \lambda^2(m+x)^2y = 0,$$

und diess ist die gewünschte Gleichung.

Da in derselben λ bloss im Quadrat erscheint, so gelangt man auch durch Voraussetzen von

$$y = e^{-\lambda\int\sqrt{\frac{m+x}{n+x}}dx}$$

zu derselben Differentialgleichung; demnach ist das vollständige Integral der Gleichung (6):

$$(7) \ldots y = C_1 e^{+\lambda\int\sqrt{\frac{m+x}{n+x}}dx} + C_2 e^{-\lambda\int\sqrt{\frac{m+x}{n+x}}dx},$$

oder in anderer Form geschrieben:

$$y = C_1 e^{+\lambda\sqrt{(m+x)(n+x)}}(\sqrt{m+x}+\sqrt{n+x})^{+\lambda(m-n)}$$
$$+ C_2 e^{-\lambda\sqrt{(m+x)(n+x)}}(\sqrt{m+x}+\sqrt{n+x})^{-\lambda(m-n)}.$$

Die Gleichung (6), sowie deren in (7) stehendes Integral, finden sich für den speciellen Fall $\lambda = \sqrt{-1}$ im 2ten Bande des Petzval'schen Werkes: „Integration linearer Differential-Gleichungen" S. 107.

XLI.

Note über die Integration der drei Differentialgleichungen:

$$y'' = x(Ax^2y'' + Bxy' + Cy),$$
$$y' = x^2(Ax^2y'' + Bxy' + Cy),$$
$$y = x^3(Ax^2y'' + Bxy' + Cy);$$

in welchen A, B und C constante Zahlen bezeichnen.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute in Wien.

Diese drei Gleichungen lassen sich, wie leicht einzusehen, folgendermaassen schreiben:

$$x^2(A - \frac{1}{x^3})y'' + Bxy' + Cy = 0,$$

$$Ax^2y'' + x(B - \frac{1}{x^3})y' + Cy = 0,$$

$$Ax^2y'' + Bxy' + (C - \frac{1}{x^3})y = 0;$$

und nun sieht man, dass sämmtliche drei Gleichungen specielle Fälle der Gleichung

$$x^2(a_2 + b_2x^n)y'' + x(a_1 + b_1x^n)y' + (a_0 + b_0x^n)y = 0$$

sind.

XLII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Professor und Director Dr. Strehlke in Danzig.

1. Man soll den Winkel i finden, unter dem ein Körper gegen den Horizont geworfen werden muss, damit der von diesem und dem parabolischen Bogen begrenzte Flächenraum ein Maximum werde.

Auflösung. Die i bestimmende Gleichung ist $3\cos i^2 - \sin i^2 = 0$, folglich $i = 60^0$.

2. Den Winkel i des Wurfs zu bestimmen, wenn der parabolische Weg oder die Länge der Parabel ein Maximum sein soll.

Auflösung. Man findet:

$$i = 56^0\,27'\,57''.$$

In dem diesjährigen Programm der Ober-Realschule auf dem Bauernmarkte in Wien hat Herr Professor Unferdinger folgende Gleichungen mit einer Unbekannten, deren Lösung sich auf quadratische zurückführen lässt, mitgetheilt:

1. $\dfrac{(1 \pm x^2)(1 + x^2)}{1 + x^4} = a.$
2. $(1 + 3x^2 + x^4)\,(1 - x + x^2)^2 = c^2x^2(1 + x^2)^2.$
3. $(x - 1)^2(x^2 + 1) = c^2x^2.$
4. $a(x - 1)^4\,(x^2 + 1)^2 + bx^4 = cx^2.$
5. $4x^4 - 6x^3 - 3x + 1 = 0.$
6. $2x^4 + x^3 + 9x^2 + 9x + 18 = 0.$

XLIII.

Miscellen.

Gelegentliche Bemerkungen über mathematischen Unterricht und mathematische Methode.

(Ich wünschte, dass mir von Lehrern der Mathematik Bemerkungen von ähnlicher Tendenz wie die folgende eingesandt werden möchten, damit ich daraus eine eigene Rubrik unter obiger Ueberschrift anlegen könnte, was gewiss dem mathematischen Unterrichte förderlich sein würde. Daher bitte ich um Einsendung solcher Bemerkungen. G.)

Der bekannte, im Ganzen sehr leicht und durch einfache Rechnung zu beweisende Satz, dass, wenn eine ganze rationale algebraische Function $f(x)$ für einen bestimmten Werth a ihrer veränderlichen Grösse x, also für $x=a$, verschwindet, jederzeit $f(x)$ durch $x-a$ ohne Rest theilbar ist*), scheint mir, wie aus Lehrbüchern und anderweitig erhellet, bei'm algebraischen Elementar-Unterrichte hin und wieder vernachlässigt und selten in denselben aufgenommen zu werden, gewiss mit grossem Unrechte. Dies wurde mir vor einiger Zeit wieder klar, als es sich, ohne Anwendung der Differentialrechnung, um die Bestimmung des Werths handelte, welchen die Grösse

$$\frac{2x^2-5x-12}{x^2-5}\cdot\frac{x^2+5}{3x^2-17x+20}$$

für $x=4$ erhält, indem dieselbe für diesen Werth die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, weil für $x=4$ die Grössen

$$2x^2-5x-12 \quad\text{und}\quad 3x^2-17x+20$$

beide verschwinden. Die Lösung dieses grossen Problems — wie schon gesagt, ohne Anwendung der Differentialrech-

---

*) Man findet den Beweis z. B. in meinem so eben in vierter Auflage erschienenen „Lehrbuche der allgemeinen Arithmetik für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Brandenburg. 1864. §. 239. S. 196.“

nung, die nicht gestattet sein sollte und in diesem Falle noch nicht in Anspruch genommen werden konnte — wurde von dem Anfänger auf dem Felde des mathematischen Studiums, dem die Aufgabe, um ihn etwas zu sondiren, von mir vorgelegt worden war, in der erwähnten Weise nur mit grossem Umschweife und auf sehr holprigem Wege gegeben. Wäre aber der obige einfache algebraische Satz dem gelehrten Cossisten*) oder Algebristen**), der eine so beschwerliche und so weit hergeholte Lösung der vorgelegten Aufgabe gab, bekannt gewesen — und er konnte in der That leicht zu dieser Kenntniss, mit grossem Vortheil für andere Fälle, gelangen —; so würde er sogleich erkannt haben, dass, weil, wie schon oben bemerkt worden ist, der Werth $\frac{0}{0}$ der obigen Grösse für $x=4$ daher kommt, dass die Grössen

$$2x^2-5x-12 \quad \text{und} \quad 3x^2-17x+20$$

für $x=4$ beide verschwinden, und dass er also, weil, nach dem in Rede stehenden Satze, eben deshalb diese Grössen beide durch $x-4$ ohne Rest theiltbar sind, diese Grössen nur durch $x-4$ zu dividiren brauche, um das Gesuchte sogleich zu finden. Daher würde, ohne alle Ab- und Umschweife, in der elementarsten Weise, seine sehr einfache Rechnung also gestanden haben:

---

*) Bekanntlich hiess bei den deutschen Arithmetikern, namentlich des sechszehnten Jahrhunderts, die Algebra lange Zeit die Coss oder die Regel Coss; denn die Italiener, welche die Algebra in Europa einführten, hatten sie Regola oder Arte de la cosa genannt, weil bei ihnen die Wurzel der Gleichung, also die unbekannte Grösse, Cosa, d. h. die Sache, das Ding oder das Etwas (S. Dizionario portatile italiano-tedesco del F. Valentini. Lipsia. 1862. p. 103.) hiess.

**) Algebrista heisst im Spanischen ein Mann, der Beinbrüche heilt und verrenkte Glieder einrenkt, also eine Art von Feldscheerer oder Barbierer. Als Don Quixote den Spiegelritter vom Pferde stiess, blieben des Gefallenen Rippen nicht in Ordnung, und er musste sich an einem Orte aufhalten, wo ein solcher Doctor sie wieder zurecht brachte: „....llegaron à un puèblo, donde fuè ventùra hallàr à un Algebrista con quièn se curo el Sanson desgraciàdo....". Deshalb sagt auch Golius in „Muhammedis fil. Ketiri, Ferganensis, qui vulgo Alfraganus dicitur, elementa Astronomica, Arabice et Latine, cum notis. Amstelod. 1669." auf der 11ten Seite der Anmerkungen: „Hinc et vulgatum illud nomen Algebra Analysin Mathematicam notat, utpote cujus praecipuum munus sit comparationis terminos reducere ad optatam aequationis formam, et speciatim eorumdem partes ad integros redigere." (A. G. Kästner: Analysis endlicher Grössen. Dritte Aufl. Vorrede. S. XII. und S. XIII.)

$$\begin{array}{l} x-4|2x^2-5x-12|2x+3 \\ \quad 2x^2-8x \\ \quad\quad 3x-12 \\ \quad\quad 3x-12 \\ \quad\quad\quad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x-4|3x^2-17x+20|3x-5 \\ \quad 3x\ -12x \\ \quad\quad -5x+20 \\ \quad\quad -5x+20 \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

folglich:

$$\frac{2x^2-5x-12}{x^2-5} \cdot \frac{x^2+5}{3x^2-17x+20} = \frac{(2x+3)\ (x^2+5)}{(x^2-5)\ (3x-5)},$$

und daher für $x=4$ der Werth:

$$\frac{(2.4+3)(4^2+5)}{(4^2-5)(3.4-5)} = \frac{11.21}{11.7} = \frac{21}{7} = 3.$$

Der Zweck dieser methodischen Bemerkung ist kein anderer, als dem mehr erwähnten Satze auch für den Elementar-Unterricht zu seinem sehr wohl begründeten Rechte zu verhelfen und zu recht sorgfältiger Berücksichtigung bei demselben, die ihm bisher noch bei Weitem nicht allgemein genug zu Theil geworden zu sein scheint, dringend zu empfehlen.

Noch ein Paar Beispiele:

Welches ist der Werth des Bruchs

$$\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-4x^2+x+6}$$

für $x=2$?

Weil Zähler und Nenner für $x=2$ beide verschwinden, so geht $x-2$ in beiden auf. Also:

$$\begin{array}{l} x-2|x^3-x^2-8x+12|x^2+x-6 \\ \quad x^3-2x^2 \\ \quad\quad x^2 \\ \quad\quad x^2-2x \\ \quad\quad\quad -6x \\ \quad\quad\quad -6x+12 \\ \quad\quad\quad\quad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x-2|x^3-4x^2+x+6|x^2-2x-3 \\ \quad x^3-2x^2 \\ \quad\quad -2x^2 \\ \quad\quad -2x^2+4x \\ \quad\quad -3x \\ \quad\quad -3x+6 \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Folglich:

$$\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-4x^2+x+6} = \frac{(x-2)(x^2+x-6)}{(x-2)(x^2-2x-3)} = \frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}.$$

Daher ist für $x=2$ der Werth:

$$\frac{0}{-3} = 0.$$

Dass der in Rede stehende Satz öfters mehr als einmal in Anwendung zu bringen sein kann, versteht sich von selbst, und bedarf einer weiteren Auseinandersetzung hier nicht, wird aber durch das folgende Beispiel erläutert.

Welches ist der Werth des Bruchs

$$\frac{x^4+7x^3+9x^2+x-2}{x^5+2x^4-7x^3-11x^2+2x+5}$$

für $x=-1$?

Weil Zähler und Nenner für $x=-1$ verschwinden, so ist $x+1$ ein Factor von beiden und man hat also folgende Rechnung zu machen:

$$\begin{array}{l}
x+1 \mid x^4+7x^3+9x^2+x-2 \mid x^3+6x^2+3x-2 \\
\quad\underline{x^4+x^3} \\
\qquad 6x^3 \\
\qquad \underline{6x^3+6x^2} \\
\qquad\qquad 3x^2 \\
\qquad\qquad \underline{3x^2+3x} \\
\qquad\qquad\quad -2x-2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-2x-2} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x+1 \mid x^5+2x^4-7x^3-11x^2+2x+5 \mid x^4+x^3-8x^2-3x+5 \\
\quad\underline{x^5+x^4} \\
\qquad x^4 \\
\qquad \underline{x^4+x^3} \\
\qquad\quad -8x^3 \\
\qquad\quad \underline{-8x^3-8x^2} \\
\qquad\qquad -3x^2 \\
\qquad\qquad \underline{-3x^2-3x} \\
\qquad\qquad\qquad 5x+5 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{5x+5} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Also hat man statt des gegebenen Bruchs den folgenden zu setzen:

$$\frac{x^3+6x^2+3x-2}{x^4+x^3-8x^2-3x+5},$$

wo nun aber Zähler und Nenner wieder für $x=-1$ beide verschwinden, und daher nochmals mit $x+1$ zu dividiren ist:

$$\begin{array}{l}
x+1 \mid x^3+6x^2+3x-2 \mid x^2+5x-2 \\
\quad\underline{x^3+x^2} \\
\qquad 5x^2 \\
\qquad \underline{5x^2+5x} \\
\qquad\quad -2x \\
\qquad\quad \underline{-2x-2} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
x+1|x^4+x^3-8x^2-3x+5|x^3-8x+5 \\
\quad\underline{x^4+x^3} \\
\qquad\quad -8x^2 \\
\qquad\quad \underline{-8x^2-8x} \\
\qquad\qquad\quad 5x \\
\qquad\qquad\quad \underline{5x+5} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Also hat man jetzt den Bruch:

$$\frac{x^2+5x-2}{x^3-8x+5},$$

in welchem man $x=-1$ zu setzen hat, wodurch man erhält:

$$\frac{1-5-2}{-1+8+5}=\frac{-6}{+12}=-\tfrac{1}{2}$$

als Werth des gegebenen Bruchs für $x=-1$.

Ich bitte den Zweck solcher durchaus nur methodischer Bemerkungen wie vorstehende nicht zu verkennen, bitte aber nochmals, mir durch derartige Einsendungen bei der Erreichung meiner wohlgemeinten Absichten behülflich zu sein. G.

Aus dem Correspondenz-Blatt für die Gelehrten- und Realschulen, herausgegeben von Rector Dr. Frisch und den Professoren H. Kratz und C. Holzer. Eilfter Jahrgang. No. 8. August 1864. erlaube ich mir den folgenden Aufsatz des Herrn Professor Reuschle in Stuttgart abdrucken zu lassen, da es für mich nur angenehm sein kann, das Prioritätsrecht eines so verdienten und mir so befreundeten Mannes, wie des Herrn Rector Nagel in Ulm, gewahrt zu sehen. Die in diesem Aufsatze erwähnte Schrift desselben ist mir nicht bekannt geworden. Das Verdienst des Herrn Harnischmacher, dessen Darstellung gewiss eine eigenthümliche ist, wird übrigens nach meinen Ansichten über solche Dinge dadurch nicht wesentlich geschmälert, dass er nicht der erste Erfinder des schönen Satzes ist, der ja nun auch, wie er sehr verdient, bekannter werden und allgemeine Benutzung bei'm Unterrichte finden wird, was ja bei solchen Sätzen immer eine Hauptsache ist.

Im August 1864. G.

Geometrische Notiz zur Wahrung einer Priorität.

Im neuesten Heft von Grunert's Archiv (1. Heft des 42sten Bandes) fand ich kürzlich einen Satz, welcher mich theils wegen

seiner Schönheit, theils wegen der angeblichen Neuheit förmlich aufregte, enthalten in der kleinen Abhandlung „Ueber einen merkwürdigen Punkt des Dreiecks" von Harnischmacher zu Brilon, nämlich: die nach den äusseren Berührungspunkten der Seiten eines Dreiecks*) gezogenen Scheiteltransversalen schneiden sich in einem Punkt T, welcher mit dem Schwerpunkt S und dem Mittelpunkt O des inneren Berührkreises in gerader Linie TSO liegt, dergestalt dass $TS = 2SO$. Der innere Berührkreis schneidet vom Scheitelstück einer jeden solchen Transversale ein Stück ab, welches dem Fussstück derselben Transversale gleich ist (Scheitelstück und Fussstück vom Punkt T an gerechnet) und die ganze Transversale verhält sich zu ihrem Fussstück, wie der Halbmesser des zur selbigen Seite gehörigen äusseren Berührkreises zu dem Halbmesser des inneren Berührkreises. Da endlich bekanntermaassen auch die drei Punkte, der Höhenpunkt H, der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises K und der Schwerpunkt S, in einer Geraden HSK liegen, so dass ebenfalls $HS = 2KS$, so bilden die vier Punkte H, O, K, T ein Trapez, dessen Diagonalendurchschnitt S ist**), und dessen Parallelseiten HT und KO sind, wobei $HT = 2KO$, dessen Schenkel KT endlich dem Ueberschuss des Halbmessers des umschriebenen Kreises über den Durchmesser des einbeschriebenen gleich ist, während bekanntlich KO, d. h. der Abstand der Mittelpunkte des um- und des einbeschriebenen Kreises, die mittlere Proportionale zwischen dem Halbmesser des umschriebenen Kreises und jenem Ueberschuss (also zugleich der KT) ist.

Der Punkt T ist aber nicht neu, er ist schon von Nagel in Ulm in seinen trefflichen „Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreieck gehörigen Kreise" (Leipzig 1836) mit jenen merkwürdigen Eigenschaften (ausgenommen nur, dass $KT = R - 2r$) aufgestellt worden. Und überdies hat Nagel noch eine dritte und vierte Punktentrias aufgestellt, mit welchen es sich ebenso verhält wie mit HSK und TSO. Auch der Punkt F, in welchem sich die nach den inneren Berührungspunkten der Dreiecksseiten

---

*) D. h. nach den auf den Seiten selbst (nicht auf ihren Verlängerungen) liegenden Punkten, in welchen dieselben von den drei äusseren Berührkreisen berührt werden.

**) Ueberdies liegt, was übrigens Harnischmacher nicht berührt, aber schon in der Aufgabensammlung von Holleben und Gerwien, so wie von Nagel, erwähnt ist, auf der Diagonale HSK in deren Mitte der Mittelpunkt M des die drei Seiten des Dreiecks halbirenden Kreises, so dass H, M, S, K vier harmonische Punkte sind. — Auch ist im rationalen Dreieck, dessen Seiten 13, 14, 15, die Strecke $TO = 1$.

gezogenen Linien schneiden, und der Punkt P, in welchem sich die drei Transversalen schneiden, die von den Mittelpunkten der drei äusseren Berührkreise an die Mitten der zugehörigen Dreieckseiten gehen, liegen mit dem Schwerpunkt in einer Geraden FSP, so dass $FS = 2SP$ ist. Und ferner der Punkt Q, in welchem sich die drei Scheiteltransversalen schneiden, wovon zwei von zwei Winkelspitzen nach den äussern Berührungspunkten auf den Verlängerungen der den dritten Winkel einschliessenden Dreieckseiten gehen, die dritte aber von der dritten Winkelspitze nach dem inneren Berührungspunkt der Gegenseite, und der Mittelpunkt U des zur letztgenannten Seite gehörigen äusseren Berührkreises, liegen mit dem Schwerpunkt in einer Geraden QSU, so dass $QS = 2US$. Diese vierte Trias ist selbst wieder dreifach, da drei Combinationen möglich sind, also sind es einzeln gezählt sechs solcher Triaden, und der Schwerpunkt ist so gleichsam der gemeinschaftliche Angelpunkt mehrerer (zunächst sechs) Hebel, deren Arme ein gemeinschaftliches Verhältniss haben. Auch hatte ich selbst in meinem Herbstprogramm vom Jahr 1853 in der Abhandlung „Ueber die Punkte, Transversalen und Kreise des Dreiecks" S. 29. geschrieben: „dass durch den Schwerpunkt noch mehrere Verbindungen von je zwei Linien gehen *), welche alle in S im Verhältniss 1:2 getheilt werden, ist der schönste Satz, welchen ich in Nagel's Untersuchungen über die Kreise des Dreiecks fand", eine von mir vergessene Stelle in meinen eigenen Schriften, die mich zur Wahrnehmung der Nichtneuheit des obigen Satzes führte. Dem Vergessen aber habe ich den erneuerten Genuss beim Empfang des Grunert'schen Heftes zu danken. Mögen auch die Herren Grunert und Harnischmacher selbst von der dem Herrn Nagel gebührenden Priorität Notiz nehmen!

Stuttgart, 29. Juli 1864. Reuschle.

Satz vom ebenen Dreieck.

Von dem Herausgeber.

Aus den in meiner Abhandlung: Ueber die Entfernungen der merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks von einander. Thl. XXXVI. Nr. XVIII. entwickelten Formeln lässt sich ein interessanter Satz mit grosser Leichtigkeit herleiten, der dort unbemerkt geblieben ist.

*) Nämlich ausser der altbekannten HSK.

Bezeichnet man, wie in jener Abhandlung (S. 329 und S. 330), in Bezug auf das dort angenommene rechtwinklige Coordinatensystem die Mittelpunkte der vier Berührungskreise des Dreiecks ABC durch

$$(xy),\quad (x_a y_a),\quad (x_b y_b),\quad (x_c y_c);$$

so ist nach den Formeln in §. 3. 8), 12), 13), 14):

$$\begin{aligned}
x &= 4R\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C,\\
y &= 4R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C;\\
x_a &= 4R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C,\\
y_a &= 4R\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C;\\
x_b &= -4R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C,\\
y_b &= 4R\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C;\\
x_c &= 4R\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C,\\
y_c &= -4R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C;
\end{aligned}$$

also, wie man leicht übersieht:

$$x+x_a+x_b+x_c=4R\{\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(B-C)-\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(B-C)\},$$
$$y+y_a+y_b+y_c=4R\{\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(B-C)+\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(B-C)\};$$

folglich:

$$x+x_a+x_b+x_c=4R\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C),$$
$$y+y_a+y_b+y_c=4R\sin\tfrac{1}{2}(A+B-C).$$

Nun ist aber:

$$A+B+C=180^0,$$

also:

$$A+B-C=180^0-2C,\quad \tfrac{1}{2}(A+B-C)=90^0-C;$$

folglich:

$$x+x_a+x_b+x_c=4R\sin C,$$
$$y+y_a+y_b+y_c=4R\cos C;$$

oder:

$$R\sin C=\tfrac{1}{4}(x+x_a+x_b+x_c),$$
$$R\cos C=\tfrac{1}{4}(y+y_a+y_b+y_c).$$

Nach der genannten Abhandlung §. 3. 2) sind die Coordinaten des Mittelpunkts des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises $R\sin C$ und $R\cos C$, und nach den Lehren der Statik sind bekanntlich

$$\tfrac{1}{4}(x + x_a + x_b + x_c), \quad \tfrac{1}{4}(y + y_a + y_b + y_c)$$

die Coordinaten des Schwerpunkts der Mittelpunkte der vier Berührungskreise des Dreiecks ABC, wenn man sich dieselben mit gleichen Gewichten beschwert denkt, also:

Lehrsatz.

Der Mittelpunkt des um ein ebenes Dreieck beschriebenen Kreises ist der Schwerpunkt der Mittelpunkte seiner vier Berührungskreise, wenn man sich dieselben mit gleichen Gewichten beschwert denkt.

Ich habe diesen mir früher unbekannten Satz zuerst kennen gelernt aus einer vieles Schöne enthaltenden Abhandlung des Herrn Professor Beltrami in Pisa: Intorno alle coniche di nove punti e ad alcune quistioni che ne dipendono. Nota del Prof. Eugenio Beltrami. (Estratta dalla Serie II. Vol. II. delle Mem. dell' Accad. delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna 1863. 4°., wo er pag. 17. auf folgende Art ausgesprochen ist: „Il centro del circolo circoscritto ad un triangolo è il centro di gravità dei quattro centri dei circoli inscritti nel medesimo triangolo.“ Ob er sich schon anderwärts findet, untersuche ich jetzt nicht, weil darauf hier weiter nichts ankommt. Ich habe den Satz hier mitgetheilt, um eine neue Anwendung der von mir in der genannten Abhandlung entwickelten, überhaupt an bemerkenswerthen Folgerungen reichen, Formeln zu geben, und weil ich glaube, dass derselbe — elementar-geometrisch bewiesen — zu Uebungen benutzt werden kann, werde ich auch andere Beweise, wenn man sie mir mitzutheilen die Güte haben will, gern im Archive abdrucken lassen. Will man, wie es bei elementar-geometrischen Uebungen geboten sein dürfte, den Ausdruck „Schwerpunkt“ vermeiden, so kann man dafür „Punkt der mittleren Entfernungen“ setzen, wie solche Punkte, wenn man sie als der reinen Geometrie angehörend betrachtete, früher nach Carnot genannt wurden. Auch benutze ich gern von Neuem diese Gelegenheit, die deutschen Mathematiker auf die Schriften der neueren italienischen Mathematiker aufmerksam zu machen, die vieles Schöne, auch für den Unterricht, enthalten.

Nachtrag zu dem Aufsatze Nr. XXVI. in diesem Hefte.

Von dem Herausgeber.

In dem Aufsatze: Kugel der mittleren Krümmung des

Ellipsoids (Nr. XXVI. S. 256. in diesem Hefte) habe ich nicht besonders erörtert, in welchem der beiden von dem Punkte (xyz) des Ellipsoids ausgehenden Theile der Normale der Mittelpunkt (XYZ) der Kugel der mittleren Krümmung liegt, und will dies, in Folge einer an mich gerichteten Frage, da mir zufällig am Schluss dieses Heftes noch einiger Raum zu Gebote steht, jetzt nachholen, so leicht die Sache auch an sich ist, indem ich alle a. a. O. gebrauchten Bezeichnungen ohne weitere Erläuterung beibehalte.

Bezeichnen wir die 180⁰ nicht übersteigenden Winkel, welche der von dem Punkte (xyz) des Ellipsoids nach dem Mittelpunkte (XYZ) der Kugel der mittleren Krümmung hin gehende Theil der Normale mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen einschliesst, durch λ, μ, ν; so ist in völliger Allgemeinheit:

$$X=x+R\cos\lambda,\quad Y=y+R\cos\mu,\quad Z=z+R\cos\nu.$$

Nach Nr. 4) und Nr. 5) a. a. O. ist aber:

$$R=abc\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\},$$

also nach Vorstehendem:

$$X-x=R\cos\lambda=abc\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}\cos\lambda,$$

$$Y-y=R\cos\mu=abc\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}\cos\mu,$$

$$Z-z=R\cos\nu=abc\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}\cos\nu;$$

folglich nach Nr. 3) a. a. O.:

$$abc\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}\cos\lambda=-\frac{bcx}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2},$$

$$abc\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}\cos\mu=-\frac{cay}{b}\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2},$$

$$abc\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}\cos\nu=-\frac{abz}{c}\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2};$$

woraus sogleich:

$$\cos\lambda=-\frac{x}{a^2}:\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2},$$

$$\cos\mu=-\frac{y}{b^2}:\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2},$$

$$\cos\nu=-\frac{z}{c^2}:\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}.$$

folgt. Bezeichnen nun aber α, β, γ die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der von dem Punkte (xyz) aus nach dem äusseren Raume des Ellipsoids hin gehende Theil der Normale mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen einschliesst; so ist, wie ich in Thl. XXXVI. S. 83., worauf hier zu verweisen erlaubt sein mag, bewiesen habe:

$$\cos\alpha = \frac{x}{a^2} : \sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{b^2} : \sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{c^2} : \sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$\cos\lambda = -\cos\alpha, \quad \cos\mu = -\cos\beta, \quad \cos\nu = -\cos\gamma;$$

folglich:

$$\lambda = 180^0 - \alpha, \quad \mu = 180^0 - \beta, \quad \nu = 180^0 - \gamma;$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass der Mittelpunkt (XYZ) der Kugel der mittleren Krümmung jederzeit in dem von dem Punkte (xyz) aus nach dem **inneren** Raume des Ellipsoids hin gehenden Theile der Normale liegt.

Den Versuch allgemeiner Untersuchungen über die Lage des Mittelpunkts der Kugel der mittleren Krümmung in der Normale, für Flächen überhaupt, behalte ich mir vor.

Geometrischer Ort der Mittelpunkte aller durch denselben Punkt gehenden Sehnen der Flächen zweiten Grades.

Von Herrn Dr. am Ende in Langensalza.

Die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades ist bekanntlich:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0.$$

Es sei ferner ein Punkt gegeben, dessen Coordinaten f, g, h heissen mögen. Die Gleichungen der durch diesen Punkt gehenden Sehnen der gegebenen Fläche haben alsdann die Form:

$$y - g = L(x - f), \quad z - h = M(x - f).$$

Wenn nun u, v, w die Coordinaten der Punkte bezeichnen, in

welchen diese Sehne die allgemeine Fläche zweiten Grades schneidet, so hat man offenbar zur Bestimmung der Coordinaten u, v, w die folgenden drei Gleichungen:

$$Au^2+Bv^2+Cw^2+2Dvw+2Euw+2Fuv+2Gu+2Hv+2Jw+K=0,$$

$$v-g=L(u-f), \quad w-h=M(u-f).$$

Setzt man die aus den beiden letzten Gleichungen resultirenden Werthe von v und w in der ersten Gleichung ein, und setzt man der Kürze wegen:

$$Af+Eh+Fg+G=a, \quad Bg+Dh+Ff+H=b,$$
$$Ch+Dg+Ef+J=c;$$

ferner:

$$A+BL^2+CM^2+2DLM+2EM+2FL=Q$$

und

$$Af^2+Bg^2+Ch^2+2Dgh+2Efh+2Ffg+2Gf+2Hg+2Jh+K=P;$$

so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$(u-f)^2+2\left(\frac{a+bL+cM}{Q}\right)(u-f)=-\frac{P}{Q}.$$

Setzt man weiter:

$$W=\sqrt{\left(\frac{a+bL+cM}{Q}\right)^2-\frac{P}{Q}},$$

so ist:

$$u=f-\frac{a+bL+cM}{Q}\pm W, \quad v=g-L\frac{a+bL+cM}{Q}\pm LW,$$

$$w=h-M\frac{a+bL+cM}{Q}\pm MW.$$

Bezeichnen nun X, Y, Z die Coordinaten der Mittelpunkte der Sehnen, so erhält man:

$$f-X=\frac{a+bL+cM}{Q}, \quad g-Y=\frac{a+bL+cM}{Q}.L,$$

$$h-Z=\frac{a+bL+cM}{Q}.M;$$

woraus folgt:

$$L=\frac{g-Y}{f-X} \quad \text{und} \quad M=\frac{h-Z}{f-X}.$$

Um die Gleichung des Ortes zu erhalten, setzen wir diese

Werthe in der ersten der vorstehenden drei Gleichungen ein, und es ergiebt sich als Gleichung des Ortes die folgende:

$$f-X=\frac{a+b\dfrac{g-Y}{f-X}+c\dfrac{h-Z}{f-X}}{\left\{\begin{array}{c}A+2E\dfrac{h-Z}{f-X}+2F\dfrac{g-Y}{f-X}+2D\dfrac{(g-Y)(h-Z)}{(f-X)^2}\\ +B\left(\dfrac{g-Y}{f-X}\right)^2+C\left(\dfrac{h-Z}{f-X}\right)^2\end{array}\right\}},$$

oder:

$$A(f-X)^2+B(g-Y)^2+C(h-Z)^2+2D(g-Y)(h-Z)$$
$$+2E(f-X)(h-Z)+2F(f-X)(g-Y)=a(f-X)+b(g-Y)+c(h-Z).$$

Wenn man nun den Anfangspunkt der Coordinaten so verlegt, dass $f-X=X_1$, $g-Y=Y_1$ und $h-Z=Z_1$ wird, so resultirt endlich als Gleichung des geometrischen Ortes der Mittelpunkte der Sehnen die Gleichung:

$$AX_1^2+BY_1^2+CZ_1^2+2DY_1Z_1+2EX_1Z_1+2FX_1Y_1$$
$$=aX_1+bY_1+cZ_1.$$

Da die sechs Coefficienten A, B, C, D, E, F, welche allein das Kriterium für die Flächen zweiten Grades abgeben, hier beziehungsweise dieselben sind, als in der gegebenen Fläche, so folgt hieraus der Satz:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller durch denselben Punkt gehenden Sehnen einer Fläche zweiten Grades ist stets wieder eine Fläche zweiten Grades von derselben Art.

Man sieht zugleich, dass dieser Satz dem in Archiv Theil XLII. Heft I. S. 98 über die Linien zweiten Grades mitgetheilten Satze ganz analog ist.

M. vergl. noch Theil XLII. Heft I. S. 118. G.

Berichtigungen

zu der Abhandlung des Herrn Professor Durège Nr. I. in diesem Theile.

S. 3. Z. 18. v. o. statt sowie lies worin.
„ 8. „ 6. v. o. „ setzt „ setze.
„ 18. „ 3. v. u. „ n „ n'.
„ 24. „ 24. v. o. „ $1oq$ „ $10q$.
„ 25. „ 13. v. o. „ $w=w'\pm\frac{1}{2}e$ lies $w=w'=\pm\frac{1}{2}e$.

XLIV.

Das reguläre Siebzehneck im Kreise oder die Theilung der Kreisperipherie in siebzehn gleiche Theile.

Von

dem Herausgeber.

Die Beschreibung des regulären Siebzehnecks in den Kreis oder die Theilung der Kreisperipherie in siebzehn gleiche Theile hat noch sehr wenig Eingang in die mathematischen Lehrbücher und in den geometrischen Elementar-Unterricht gefunden, was unter allen Umständen sehr zu bedauern ist, da diese Theilung jedenfalls zu den merkwürdigsten und wichtigsten Erfindungen der neueren Zeit auf dem Gebiete der Geometrie und Mathematik überhaupt gehört. Dass einen grossen Theil der Schuld hiervon der namentlich für Anfänger immer einigermassen schwierige Gegenstand selbst trägt, liegt vor Augen. Die in Thl. VI. Nr. VIII. nach Herrn Amiot von mir gegebene Darstellung, für so elegant ich dieselbe auch halte, würde sich schon ihrer analytischen Form wegen nicht zur Aufnahme in die geometrischen Elemente eignen. In einem in vielen Beziehungen sehr der Beachtung zu empfehlenden Buche: „La Frémoire's Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben der Elementar-Geometrie (Planimetrie und Stereometrie). Aus dem Französischen übersetzt von E. F. Kauffmann. Nach dem Tode des Uebersetzers durchgesehen und herausgegeben von Dr. C. G. Reuschle, Professor am Gymnasium in Stuttgart. Mit ca. 400 Abbildungen. 2. Auflage. Stuttgart 1862. 8. S. 151—S. 155. findet sich aber eine Behandlung des fraglichen Gegenstandes, die ich für verhältnissmässig so einfach und leicht, und zugleich für so rein-geometrisch halte, dass sie sich nach meiner Meinung sehr wohl zur Aufnahme in die geometrischen Elemente eignet.

Dieselbe wird a. a. O. ohne jede weitere Nachweisung Ampère zugeschrieben. Aus dem angeführten Grunde halte ich es für zweckmässig und der Tendenz des Archivs nicht entgegen, dieser nach meiner Meinung sehr schönen Darstellung, wenn sie sich auch in einem leicht zugänglichen Buche findet, dadurch die sehr zu wünschende weitere Verbreitung zu geben, dass ich ihr, mit einigen Zuthaten von meiner Seite, die folgenden wenigen Blätter dieser Zeitschrift widme.

§. 2.

In Taf. VI. Fig. 1. sind aus dem Endpunkte A des Durchmessers AB eines Kreises, dessen Halbmesser wir durch r und dessen Peripherie wir durch p bezeichnen wollen, zwei Sehnen AC und AD in demselben Halbkreise gezogen. Tragen wir nun, die Sehne AC beibehaltend, die andere Sehne AD von B aus in denselben Halbkreis ein, so dass BE (Taf. VI. Fig. 2. und Taf. VI. Fig. 3.) oder BC (Taf. VI. Fig. 4.) gleich der Sehne AD (Taf. VI. Fig. 1.) wird; so können drei verschiedene Fälle eintreten, welche in Taf. VI. Fig. 2., Fig. 3., Fig. 4. dargestellt sind.

In dem in Taf. VI. Fig. 2. dargestellten Falle, wo, wie schon erinnert, $BE = AD$, und

$$\text{Arc}\, AC + \text{Arc}\, AD < p$$

ist, fälle man von C auf AB das Perpendikel CF und ziehe alle aus der Figur von selbst ersichtlichen Linien. Dann ist nach bekannten geometrischen Sätzen, die wir hier nicht einzeln namhaft zu machen brauchen:

$$\begin{aligned} AE.BC &= AC.BE + AB.CE \\ &= AC.AD + 2r.CE; \\ AB.EF &= AF.BE + AE.BF, \\ 2r.EF &= AC.AD + AE.BC; \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} AC.AD &= AE.BC - 2r.CE, \\ AC.AD &= 2r.EF - AE.BC; \end{aligned}$$

folglich durch Addition:

$$1) \ldots\ldots\ldots \quad AC.AD = r.(EF - CE).$$

Es ist:

$$\begin{aligned}\text{Arc}\,EF &= \text{Arc}\,BF + \text{Arc}\,BE\\ &= p - \text{Arc}\,AF + \text{Arc}\,BE\\ &= p - \text{Arc}\,AC + \text{Arc}\,AD,\\ \text{Arc}\,CE &= p - \text{Arc}\,AC - \text{Arc}\,BE\\ &= p - \text{Arc}\,AC - \text{Arc}\,AD;\end{aligned}$$

also:

$$2) \ldots\ldots \begin{cases}\text{Arc}\,EF = p - \text{Arc}\,AC + \text{Arc}\,AD,\\ \text{Arc}\,CE = p - \text{Arc}\,AC - \text{Arc}\,AD;\end{cases}$$

zu welchen beiden Bogen EF und CE als Sehnen gehören.

In dem in Taf. VI. Fig. 3. dargestellten Falle, wo, wie schon erinnert, wiederum $BE = AD$, und

$$\text{Arc}\,AC + \text{Arc}\,AD > p$$

ist, fälle man auch jetzt von C auf AB das Perpendikel CF und ziehe die aus der Figur von selbst ersichtlichen Linien. Dann ist nach bekannten Sätzen:

$$\begin{aligned}AC.BE &= AE.BC + AB.CE,\\ AC.AD &= AE.BC + 2r.CE;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AB.EF &= AF.BE + AE.BF,\\ 2r.EF &= AC.AD + AE.BC;\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}AC.AD &= AE.BC + 2r.CE,\\ AC.AD &= 2r.EF - AE.BC;\end{aligned}$$

folglich durch Addition:

$$3) \ldots\ldots\ldots \quad AC.AD = r.(EF + CE).$$

Es ist:

$$\begin{aligned}\text{Arc}\,EF &= \text{Arc}\,BF + \text{Arc}\,BE\\ &= p - \text{Arc}\,AF + \text{Arc}\,BE\\ &= p - \text{Arc}\,AC + \text{Arc}\,AD,\\ \text{Arc}\,CE &= \text{Arc}\,AC + \text{Arc}\,BE - p\\ &= \text{Arc}\,AC + \text{Arc}\,AD - p;\end{aligned}$$

also:

$$4) \ldots\ldots\ldots \begin{cases}\text{Arc}\,EF = p - \text{Arc}\,AC + \text{Arc}\,AD,\\ \text{Arc}\,CE = \text{Arc}\,AC + \text{Arc}\,AD - p;\end{cases}$$

zu welchen beiden Bogen EF und CE als Sehnen gehören.

In dem in Taf. VI. Fig. 4. dargestellten Falle, wo, wie schon erinnert, $BC = AD$, und

$$\text{Arc}\, AC + \text{Arc}\, AD = p$$

ist, fälle man wieder von C auf AB das Perpendikel CF. Dann hat man als zweifachen Ausdruck des doppelten Flächeninhalts des rechtwinkligen Dreiecks ABC:

$$AC.BC = AB.\tfrac{1}{2}CF = \tfrac{1}{2}AB.CF,$$

also:

$$5) \quad \ldots \quad AC.AD = r.CF = r.\text{Chord}(2\,\text{Arc}\, AC) \\ = r.\text{Chord}(2\text{Arc}\, AD).$$

§. 3.

In der Weise, wie aus Taf. VI. Fig. 5. von selbst ersichtlich ist, denken wir uns nun den Kreis in siebzehn gleiche Theile getheilt, und in dem einen der beiden Halbkreise die sämmtlichen von O und A_0 ausgehenden Sehnen gezogen. Als Maasseinheit für alle Bogen nehmen wir den siebzehnten Theil der Peripherie, setzen demzufolge:

$$6) \quad \ldots \ldots \quad p = 8\tfrac{1}{2},$$

und betrachten nun zuvörderst im Allgemeinen das Product

$$OA_m . OA_n,$$

indem wir, was ohne der Allgemeinheit zu schaden, zulässig ist, annehmen, dass $m < n$ sei.

Hiebei können die drei folgenden Fälle eintreten:

$$m+n > 8, \quad m+n < 8, \quad m+n = 8.$$

Wenn $m+n > 8$ ist, so ist:

$$m+n \geqq 9,$$

also:

$$17-(m+n) \leqq 17-9, \quad 17-(m+n) \leqq 8;$$

folglich jedenfalls:

$$17-(m+n) < 8\tfrac{1}{2}.$$

Wenn $m+n < 8$ ist, so ist:

$$17-(m+n) > 17-8, \quad 17-(m+n) > 9;$$

folglich jedenfalls:

$$17-(m+n)>8\tfrac{1}{2}.$$

Wenn $m+n=8$ ist, so ist:

$$17-(m+n)=17-8, \quad 17-(m+n)=9;$$

folglich jedenfalls:

$$17-(m+n)>8\tfrac{1}{2}.$$

Wenn also:

$$m+n>8, \quad m+n \overline{\overline{<}} 8$$

ist, so ist respective:

$$17-(m+n)<8\tfrac{1}{2}, \quad 17-(m+n)>8\tfrac{1}{2}.$$

In der oben angegebenen Maasseinheit ausgedrückt ist offenbar allgemein:

$$\text{Arc } OA_m+\text{Arc } OA_n=(8\tfrac{1}{2}-m)+(8\tfrac{1}{2}-n)=17-(m+n),$$

und nach dem Vorhergehenden ist also, wenn

$$m+n>8, \quad m+n \overline{\overline{<}} 8$$

ist, respective:

$$\text{Arc } OA_m+\text{Arc } OA_n<8\tfrac{1}{2}, \quad \text{Arc } OA_m+\text{Arc } OA_n>8\tfrac{1}{2}$$

oder respective:

$$\text{Arc } OA_m+\text{Arc } OA_n<p, \quad \text{Arc } OA_m+\text{Arc } OA_n>p.$$

Sei nun:

$$\text{I.} \quad m+n>8,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\text{Arc } OA_m+\text{Arc } OA_n<p.$$

Offenbar ist, immer mit Bezug auf die obige Maasseinheit:

$$p-\text{Arc } OA_m+\text{Arc } OA_n=8\tfrac{1}{2}-(8\tfrac{1}{2}-m)+(8\tfrac{1}{2}-n)=8\tfrac{1}{2}-(n-m),$$

$$p-\text{Arc } OA_m-\text{Arc } OA_n=8\tfrac{1}{2}-(8\tfrac{1}{2}-m)-(8\tfrac{1}{2}-n)=8\tfrac{1}{2}-\{17-(m+n)\};$$

also, wie sogleich in die Augen fällt:

$$p-\text{Arc } OA_m+\text{Arc } OA_n=\text{Arc } OA_{n-m},$$

$$p-\text{Arc } OA_m-\text{Arc } OA_n=\text{Arc } OA_{17-(n+m)};$$

folglich nach 1) und 2):

$$7) \ldots \quad OA_m . OA_n = r.\{OA_{n-m} - OA_{17-(n+m)}\}.$$

Sei ferner:

$$\text{II.} \quad m + n \overset{=}{<} 8,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\text{Arc}\, OA_m + \text{Arc}\, OA_n > p.$$

Offenbar ist, mit Bezug auf die obige Maasseinheit:

$$p - \text{Arc}\, OA_m + \text{Arc}\, OA_n = 8\tfrac{1}{2} - (8\tfrac{1}{2} - m) + (8\tfrac{1}{2} - n) = 8\tfrac{1}{2} - (n - m),$$

$$\text{Arc}\, OA_m + \text{Arc}\, OA_n - p = (8\tfrac{1}{2} - m) + (8\tfrac{1}{2} - n) - 8\tfrac{1}{2} = 8\tfrac{1}{2} - (n + m);$$

also, wie sogleich in die Augen fällt:

$$p - \text{Arc}\, OA_m + \text{Arc}\, OA_n = \text{Arc}\, OA_{n-m},$$

$$\text{Arc}\, OA_m + \text{Arc}\, OA_n - p = \text{Arc}\, OA_{n+m};$$

folglich nach 3) und 4):

$$8) \ldots \quad OA_m . OA_n = r.\{OA_{n-m} + OA_{n+m}\}.$$

§. 4.

Mittelst der Formel 5) erhält man nun sehr leicht aus Taf. VI. Fig. 5. die folgende Reihe von Gleichungen:

$$OA_1 . A_0A_1 = r . A_0A_2,$$
$$OA_2 . A_0A_2 = r . A_0A_4,$$
$$OA_3 . A_0A_3 = r . A_0A_6,$$
$$OA_4 . A_0A_4 = r . A_0A_8,$$
$$OA_5 . A_0A_5 = r . A_0A_7,$$
$$OA_6 . A_0A_6 = r . A_0A_5,$$
$$OA_7 . A_0A_7 = r . A_0A_3,$$
$$OA_8 . A_0A_8 = r . A_0A_1 \text{ *)};$$

also durch Multiplication auf beiden Seiten, wenn man zugleich aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$9) \quad OA_1 . OA_2 . OA_3 . OA_4 . OA_5 . OA_6 . OA_7 . OA_8 = r^8.$$

---

*) Man hat beide in 5) für das dortige Product angegebene Ausdrücke in Anwendung zu bringen.

Auf dieselbe Weise ist:

$$OA_1 \,.\, A_0A_1 = r \,.\, A_0A_2,$$
$$OA_2 \,.\, A_0A_2 = r \,.\, A_0A_4,$$
$$OA_4 \,.\, A_0A_4 = r \,.\, A_0A_8,$$
$$OA_8 \,.\, A_0A_8 = r \,.\, A_0A_1\,;$$

also durch Multiplication, wenn man zugleich aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$OA_1 \,.\, OA_2 \,.\, OA_4 \,.\, OA_8 = r^4;$$

und wenn man nun hiermit in 9) dividirt, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$10) \;\ldots\ldots\; \begin{cases} OA_1 \,.\, OA_2 \,.\, OA_4 \,.\, OA_8 = r^4, \\ OA_3 \,.\, OA_5 \,.\, OA_6 \,.\, OA_7 = r^4; \end{cases}$$

welche man auch auf folgende Art schreiben kann:

$$11) \;\ldots\ldots\; \begin{cases} (OA_1 \,.\, OA_4) \times (OA_2 \,.\, OA_8) = r^4, \\ (OA_3 \,.\, OA_5) \times (OA_6 \,.\, OA_7) = r^4. \end{cases}$$

Nach 7) und 8) ist aber:

$$OA_1 \,.\, OA_4 = r \,.\, (OA_3 + OA_5),$$
$$OA_2 \,.\, OA_8 = r \,.\, (OA_6 - OA_7)$$

und:

$$OA_3 \,.\, OA_5 = r \,.\, (OA_2 + OA_8),$$
$$OA_6 \,.\, OA_7 = r \,.\, (OA_1 - OA_4)\,^{*});$$

also nach 11), wenn man der Kürze wegen:

$$12) \;\ldots\; \begin{cases} M = OA_3 + OA_5, \quad N = OA_6 - OA_7; \\ P = OA_2 + OA_8, \quad Q = OA_1 - OA_4 \end{cases}$$

---

*) Mittelst meiner Formeln 7) und 8) werden alle Verwandlungen vorstehender Art, wie sie im Folgenden noch sehr oft vorkommen werden, stets mit der grössten Leichtigkeit und Bestimmtheit ausgeführt, was der Deutlichkeit wegen hier an den obigen Producten noch besonders erläutert werden mag.

In $OA_1 \,.\, OA_4$ ist $1 + 4 = 5 < 8$, also nach 8):

$$OA_1 \,.\, OA_4 = r \,.\, \{OA_{4-1} + OA_{4+1}\} = r \,.\, (OA_3 + OA_5).$$

In $OA_2 \,.\, OA_8$ ist $2 + 8 = 10 > 8$, also nach 7):

$$OA_2 \,.\, OA_8 = r \,.\, \{OA_{8-2} - OA_{17-(8+2)}\} = r \,.\, (OA_6 - OA_7).$$

setzt:

13) . . . . $MN = r^2, \quad PQ = r^2.$

Hiernach sind also die beiden Producte MN und PQ bekannt.

§. 5.

Nach 12) und 13) ist:

$$(OA_3 + OA_5)(OA_6 - OA_7) = r^2,$$
$$(OA_2 + OA_8)(OA_1 - OA_4) = r^2;$$

also, wenn man die Multiplicationen auf der linken Seite ausführt:

$$r^2 = OA_3 . OA_6 + OA_5 . OA_6 - OA_3 . OA_7 - OA_5 . OA_7,$$
$$r^2 = OA_1 . OA_2 + OA_1 . OA_8 - OA_2 . OA_4 - OA_4 . OA_8;$$

folglich nach 7) und 8):

$$\begin{aligned} r = & \quad OA_3 - OA_8 \\ & + OA_1 - OA_6 \\ & - OA_4 + OA_7 \\ & - OA_2 + OA_5 \\ = & \begin{cases} \quad \{(OA_3 + OA_5) - (OA_6 - OA_7)\} \\ - \{(OA_2 + OA_8) - (OA_1 - OA_4)\} \end{cases} \\ = & \ (M - N) - (P - Q), \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} r = & \quad OA_1 + OA_3 \\ & + OA_7 - OA_8 \\ & - OA_2 - OA_6 \\ & - OA_4 + OA_5 \\ = & \begin{cases} \quad \{(OA_3 + OA_5) - (OA_6 - OA_7)\} \\ - \{(OA_2 + OA_8) - (OA_1 - OA_4)\} \end{cases} \\ = & \ (M - N) - (P - Q). \end{aligned}$$

In $OA_3 . OA_5$ ist $3 + 5 = 8$, also nach 8):

$$OA_3 . OA_5 = r . \{OA_{5-3} + OA_{5+3}\} = r . (OA_2 + OA_8).$$

In $OA_6 . OA_7$ ist $6 + 7 = 13 > 8$, also nach 7):

$$OA_6 . OA_7 = r . \{OA_{7-6} - OA_{17-(7+6)}\} = r . (OA_1 - OA_4).$$

Auf diese Weise gelangt man in allen Fällen schnell und sicher zum Ziel.

Aus beiden Rechnungen ergiebt sich demnach die Gleichung:

14) . . . . $(M-N)-(P-Q)=r,$

so dass also die Differenz auf der linken Seite des Gleichheitszeichens eine bekannte Grösse ist.

§. 6.

Nach 12) ist:

$$M-N=OA_3+OA_5-OA_6+OA_7,$$
$$P-Q=OA_2+OA_8-OA_1+OA_4;$$

also, wenn man multiplicirt:

$$\begin{aligned}&(M-N)(P-Q)\\ =\;&OA_2.OA_3+OA_2.OA_5-OA_2.OA_6+OA_2.OA_7\\ &+OA_3.OA_8+OA_5.OA_8-OA_6.OA_8+OA_7.OA_8\\ &-OA_1.OA_3-OA_1.OA_5+OA_1.OA_6-OA_1.OA_7\\ &+OA_3.OA_4+OA_4.OA_5-OA_4.OA_6+OA_4.OA_7,\end{aligned}$$

folglich nach 7) und 8):

$$\begin{aligned}\frac{(M-N)(P-Q)}{r}=\;&OA_1+OA_5\\ &+OA_3+OA_7\\ &-OA_4-OA_8\\ &+OA_5-OA_8\\ &+OA_5-OA_6\\ &+OA_3-OA_4\\ &-OA_2+OA_3\\ &+OA_1-OA_2\\ &-OA_2-OA_4\\ &-OA_4-OA_6\\ &+OA_5+OA_7\\ &-OA_6-OA_8\\ &+OA_1+OA_7\\ &+OA_1-OA_8\\ &-OA_2+OA_7\\ &+OA_3-OA_6\\ =\;&4\{(OA_3+OA_5)-(OA_6-OA_7)\}\\ &-4\{(OA_2+OA_8)-(OA_1-OA_4)\},\end{aligned}$$

also offenbar:

$$(M-N)(P-Q)=4r\{(M-N)-(P-Q)\},$$

und daher nach 14):

$$15) \ldots \ldots \quad (M-N)(P-Q)=4r^2,$$

so dass also das Product auf der linken Seite des Gleichheitszeichens eine bekannte Grösse ist.

§. 7.

Nach 7) ist endlich:

$$OA_6 . OA_7 = r.(OA_1 - OA_4),$$

also nach 12):

$$OA_6 . OA_7 = rQ,$$

und daher hiernach und nach 12):

$$16) \ldots \quad OA_6 - OA_7 = N, \quad OA_6 . OA_7 = rQ.$$

§. 8.

Der in den vorhergehenden Paragraphen gefundenen Gleichungen bedient man sich nun zur Auflösung unserer Aufgabe auf folgende Art:

I. Mittelst der Gleichungen 14) und 15), nämlich mittelst der Gleichungen:

$$(M-N)-(P-Q)=r, \quad (M-N)(P-Q)=4r^2,$$

bestimmt man die nach den Formeln 12) offenbar positiven Grössen $M-N$ und $P-Q$, wodurch sich

$$M-N=f, \quad P-Q=g$$

ergeben möge.

II. Mittelst der ersten dieser beiden Gleichungen und der ersten der beiden Gleichungen 13), nämlich mittelst der Gleichungen:

$$M-N=f, \quad MN=r^2,$$

bestimmt man die nach den Formeln 12) offenbar positiven Grössen M und N.

III. Mittelst der zweiten der beiden Endgleichungen in I.

und der zweiten der beiden Gleichungen 13), nämlich mittelst der beiden Gleichungen:

$$P-Q=g, \quad PQ=r^2,$$

bestimmt man die nach den Formeln 12) offenbar positiven Grössen P und Q.

IV. Mittelst der beiden Gleichungen 16), nämlich mittelst der Gleichungen:

$$OA_6-OA_7=N, \quad OA_6 . OA_7=rQ,$$

findet man OA_6 und OA_7. Trägt man diese beiden Linien als Sehnen in den Kreis von O — einem beliebigen Punkte der Peripherie — aus in den Kreis ein, so ist die Differenz der beiden entsprechenden Bogen der siebzehnte Theil der Peripherie, und dessen Sehne die Seite des in den Kreis zu beschreibenden regulären Siebzehnecks, welche gesucht wurde.

§. 9.

Hieraus sieht man, dass die Construction des regulären Siebzehnecks lediglich zurückkommt auf eine mehrfache und successive Anwendung der folgenden einfachen geometrischen

Aufgabe.

Wenn a, b, c beliebige gerade Linien von bestimmter Länge bezeichnen: unter der Voraussetzung, dass x grösser als y sei, die Linien x und y so zu bestimmen, dass den beiden Gleichungen

$$x-y=a, \quad xy=bc$$

genügt wird.

Auflösung.

Wenn $b=c$ ist und die beiden Gleichungen daher

$$x-y=a, \quad xy=b^2$$

sind, so beschreibe man, wie Taf. VI. Fig. 6. zeigt, über $AB=a$ als Durchmesser aus C als Mittelpunkt einen Kreis, errichte auf den Durchmesser AB in B ein Perpendikel $BD=b$, und ziehe durch C und D eine Gerade, welche den Kreis in den Punkten E und F schneidet, so ist

$$DE=x, \quad DF=y.$$

Denn nach bekannten Sätzen ist:

$$DE-DF=EF=AB=a,\quad DE.DF=BD^2=b^2;$$

also:

$$x-y=a,\quad xy=b^2;$$

wie verlangt wurde.

Wenn nicht $b=c$ und etwa $b>c$ ist, so beschreibe man, wie Taf. VI. Fig. 7. zeigt, über $AB=b$ als Durchmesser einen Halbkreis, schneide auf AB von B aus $BC=c$ ab, errichte in C auf AB ein Perpendikel CD bis zu dem Halbkreise, und ziehe BD. Auf BD trage man $BE=a$, welches grösser oder kleiner als BD sein kann, ab, beschreibe über BE als Durchmesser aus F als Mittelpunkt einen Kreis, errichte in B auf BE ein Perpendikel $BG=BD$, und lege durch F und G eine Gerade, welche den über BE als Durchmesser beschriebenen Kreis in H und J schneidet; dann ist

$$GH=x,\quad GJ=y.$$

Denn es ist:

$$GH-GJ=HJ=BE=a,$$
$$GH.GJ=BG^2=BD^2=AB.BC=bc;$$

also:

$$x-y=a,\quad xy=bc;$$

wie verlangt wurde.

Nichts weiter als eine wiederholte Anwendung dieser einfachen geometrischen Aufgabe erfordert, wie schon erinnert, nach §. 8. die Beschreibung des regulären Siebzehnecks in den Kreis, was sich auch leicht zu einer Gesammtconstruction dieser regulären Figur zusammensetzen lässt. Darüber mich weiter zu verbreiten, halte ich aber hier für unnöthig und unnütz, würde jedoch dessenungeachtet solche möglichst elegante Constructionen, wenn man sie mir mitzutheilen die Güte haben wollte*), gern in das Archiv aufnehmen.

§. 10.

Aus der Seite des Siebzehnecks erhält man sogleich die Seite des Vierunddreissigecks, kann dieselbe aber auch unmittelbar auf folgende Art finden.

*) Eine Construction dieser Art s. m. Thl. VI. S. 54. ff. Taf. II. Fig. 4.

Man erhält N und P auf dieselbe Art wie in §. 8., und kennt also zunächst die Summe

$$OA_2 + OA_8 = P.$$

Nach 7) ist aber

$$OA_2 . OA_8 = r.(OA_6 - OA_7) = rN,$$

so dass man also die beiden Gleichungen

$$OA_2 + OA_8 = P, \quad OA_2 . OA_8 = rN$$

hat, mittelst welcher OA_2 und OA_8 gefunden werden können, indem man bemerkt, dass OA_8, welches, wie sich aus Taf. VI. Fig. 5. sogleich ergiebt, die Seite des Vierunddreissigecks ist, immer die kleinere der beiden Grössen OA_2 und OA_8 ist.

Sucht man zwischen den beiden bekannten Geraden r und N auf bekannte Weise die mittlere Proportionallinie, und bezeichnet dieselbe durch S, so werden die beiden obigen Gleichungen:

$$OA_2 + OA_8 = P, \quad OA_2 . OA_8 = S.$$

Zieht man also in Taf. VI. Fig. 8. die Linie $AB = P$, beschreibt über derselben als Durchmesser einen Halbkreis, macht $AC = AO_2$, also $BC = OA_8$, und errichtet in C auf AB ein Perpendikel CD bis zum Halbkreise, so ist

$$CD^2 = AC.BC = OA_2 . OA_8 = S^2,$$

also $CD = S$, woraus sich auch unmittelbar ergiebt, dass immer $S < \frac{1}{2}P$ ist.

Ueberhaupt kommt die Bestimmung von OA_2 und OA_8 auf die Bestimmung zweier Linien x, y aus zwei Gleichungen von der Form

$$x + y = a, \quad xy = b^2$$

zurück. Zu dem Ende ziehe man in Taf. VI. Fig. 9. die Linie $AB = a$, beschreibe über derselben als Durchmesser einen Halbkreis, errichte etwa in B auf AB ein Perpendikel $BE = b$, und ziehe durch E mit AB eine Parallele, welche den Halbkreis in D und D' schneidet. Fällt man dann von D auf AB das Perpendikel CD, so ist

$$AC + BC = AB = a, \quad AC.BC = CD^2 = BE^2 = b^2$$

und AC und BC liefern also die Werthe der beiden unbekannten Grössen, von denen BC die kleinere ist, deren man bei der Be-

stimmung der Seite des Vierunddreissigecks nach dem Obigen bedarf. Dass im Allgemeinen die Bestimmung der Linien x, y mittelst des Obigen nur möglich ist, wenn von der durch E mit AB gezogenen Parallele der Halbkreis wirklich getroffen wird, d. h. wenn $b \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}a$ ist, versteht sich von selbst.

La Frémoire hat sich a. a. O. S. 179 auch mit der numerischen Berechnung der Seite des regulären Vierunddreissigecks beschäftigt; er giebt dafür den folgenden Ausdruck, wenn r den Halbmesser des Kreises bezeichnet:

$$\frac{1}{8}r\left\{\begin{matrix}-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\ -2\sqrt{(17+3\sqrt{17}+\sqrt{170-26\sqrt{17}}-4\sqrt{34+2\sqrt{17}})}\end{matrix}\right\},$$

oder, noch weiter vereinfacht:

$$\frac{1}{8}r\{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{(17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}})}\}.$$

Eine sehr vollständige Berechnung des regulären Siebzehnecks hat Paucker angestellt in seinem sehr vieles Gute enthaltenden Buche: Die ebene Geometrie der geraden Linie und des Kreises, oder die Elemente. Erstes Buch. Königsberg. 1823. S. 263 — S. 269." Er findet für die Seite des regulären Siebzehnecks den folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{4}r\sqrt{\{34\div 2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{(17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}})}\}}.$$

Dass ich für die vollständige Richtigkeit aller dieser numerischen Ausdrücke nicht stehen kann, versteht sich von selbst, da ich sie nicht auch selbst entwickelt habe.

Anmerkung.

Bekanntlich hat Gauss den folgenden allgemeinen Satz bewiesen:

Wenn n eine Primzahl und $n-1=2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}\ldots$ ist, so lässt sich die Theilung des Kreises in n gleiche Theile zurückführen auf die Lösung von α Gleichungen des zweiten Grades, β Gleichungen des dritten Grades, γ Gleichungen des fünften Grades u. s. w.

Für $\beta=0$, $\gamma=0$, u. s. w. ist $n-1=2^{\alpha}$, $n=2^{\alpha}+1$, und es lässt sich also sagen, dass, wenn $2^{\alpha}+1$ eine Primzahl ist, die Theilung des Kreises in $2^{\alpha}+1$ gleiche Theile immer ausgeführt werden kann durch die blosse Auflösung quadratischer

Gleichungen, also bloss durch die Hülfsmittel der elementaren Geometrie, bloss mittelst der geraden Linie und des Kreises oder mittelst des Lineals und des Zirkels. Die Zahl 17 ist eine Primzahl und es ist $17 = 16 + 1 = 2^4 + 1$. Auch die Zahl 257 ist eine Primzahl und $257 = 256 + 1 = 2^8 + 1$. Natürlich gehören diese Bemerkungen über eine der tiefsinnigsten Theorieen gar nicht wesentlich hierher und zur Sache, da dieser Aufsatz durchaus und nur eine elementare Tendenz hat. Ich kann nur wünschen, dass das Obige Aufnahme in die Lehrbücher der ebenen Geometrie finde, wozu es mir allerdings geeignet zu sein scheint, indem eine noch einfachere und noch mehr elementare Darstellung des betreffenden wichtigen und so sehr interessanten Gegenstandes auch wohl schwerlich möglich sein dürfte. Sollten, ohne die Strenge und Bestimmtheit der Darstellung zu beeinträchtigen, noch Vereinfachungen gefunden werden, so wird jedenfalls deren Mittheilung im Archive, um die ich recht sehr bitte, sehr zu wünschen und mit besonderem Danke aufzunehmen sein.

XLV.

Integration der Differential-Gleichung

(1) $$(m+x)(n+x)y'' + (m-n)y' - \lambda^2(m+x)^2 y = 0,$$

in welcher m, n und λ constante Zahlen sind.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Diese Gleichung ist ihrer Form nach äusserst ähnlich derjenigen Differentialgleichung, zu der wir gelangt sind, indem wir ein partielles Integral in der Form

(2) $$y = e^{\lambda\int\sqrt{\frac{m+x}{n+x}}dx}$$

voraussetzten; das Integral der Gleichung (1) aber ist der Form nach wesentlich verschieden von der Form (2).

Setzt man

$$(n+x)z'' = \lambda^2(m+x)z, \tag{3}$$

so lässt sich diese Gleichung leicht integriren.

Durch Differenziren der Gleichung (3) erhält man:

$$(n+x)z''' + z'' = \lambda^2(m+x)z' + \lambda^2 z. \tag{4}$$

Eliminirt man aus (3) und (4) das z, so erhält man:

$$(m+x)(n+x)z''' + (m-n)z'' - \lambda^2(m+x)^2 z' = 0,$$

und setzt man hierin

$$z' = y,$$

so erhält man:

$$(m+x)(n+x)y'' + (m-n)y' - \lambda^2(m+x)^2 y = 0. \tag{1}$$

Ist demnach das Integral der Gleichung (3)

$$z = C_1\varphi(x) + C_2\psi(x),$$

so ist das Integral der vorgelegten Gleichung:

$$y = C_1\varphi'(x) + C_2\psi'(x) \;{}^{*}).$$

---

*) Der Aufsatz, auf welchen oben im Eingange dieses Aufsatzes Bezug genommen, findet sich im dritten Hefte dieses Theils Nr. XL.

XLVI.

Die merkwürdigen Geraden der dreiseitigen körperlichen Ecke und ihre Entfernungen von einander.*

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

Die merkwürdigen Geraden der dreiseitigen körperlichen Ecke sind als merkwürdige Punkte des sphärischen Dreiecks schon öfters behandelt worden, und diese Punkte sind allgemein bekannt. Man hat sich aber, so viel zu meiner Kenntniss gekommen ist, bisher nur auf die ersten und einfachsten Grundzüge dieser Theorie beschränkt, und allgemeine Lagenbestimmungen der merkwürdigen Geraden der dreiseitigen körperlichen Ecke, so wie Formeln für die, natürlich als Winkel oder angulär aufzufassenden, Entfernungen derselben von einander, sind meines Wissens noch nicht gegeben worden, wenigstens noch nicht in der gehörigen Allgemeinheit und erforderlichen Vollständigkeit. Der vorliegende Aufsatz soll daher diesem Gegenstande gewidmet sein.

§. 2.

Wir denken uns eine dreiseitige körperliche Ecke, welche von den, von dem Punkte O ausgehenden Geraden OA, OB, OC gebildet wird. Die von den Ebenen AOB, AOC; BOC, BOA; COA, COB gebildeten, an den Geraden OA, OB, OC nach dem inneren Raume der Ecke hin liegenden Winkel bezeichnen wir respective durch A, B, C; und die denselben gegenüberliegenden Seiten BOC, COA, AOB der Ecke respective durch a, b, c; ganz eben so wie die Winkel und Seiten des der Ecke entsprechenden sphärischen Dreiecks.

Allen unseren folgenden Betrachtungen legen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz zu Grunde, dessen Anfang der Punkt O ist; die Gerade OA sei der positive Theil der Axe der x, die Ebene AOB sei die Ebene der xy, und in derselben werde der positive Theil der Axe der y so angenommen, dass er mit der Geraden OB auf derselben Seite der Axe der x liegt; den positiven Theil der Axe der z nehme man aber so an, dass er mit der Geraden OC auf derselben Seite der Ebene der xy liegt. Bezeichnen wir unter diesen Voraussetzungen die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche die Geraden

$$OA, \quad OB, \quad OC$$

mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliessen, durch:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2; \quad \beta_0, \beta_1, \beta_2; \quad \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2;$$

so ist offenbar:

$$\begin{array}{lll} \alpha_0 = 0, & \alpha_1 = 90^0, & \alpha_2 = 90^0; \\ \beta_0 = c, & \beta_1 = \pm(90^0 - c), & \beta_2 = 90^0; \\ \gamma_0 = b, & \gamma_1 = \gamma_1, & \gamma_2 = \gamma_2; \end{array}$$

wo nun noch die Winkel γ_1 und γ_2 einer näheren Bestimmung bedürfen, die wir jetzt geben wollen.

In der Geraden OC nehme man einen beliebigen Punkt M an, dessen Entfernung von dem Anfange der Coordinaten O wir durch r, und dessen Coordinaten in dem angenommenen Coordinatensysteme wir durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnen wollen; dann ist bekanntlich in völliger Allgemeinheit:

$$\mathfrak{x} = r\cos\gamma_0, \quad \mathfrak{y} = r\cos\gamma_1, \quad \mathfrak{z} = r\cos\gamma_2.$$

Denken wir uns nun von dem Punkte M auf die Axe der x ein Perpendikel p gefällt, so erhellet auf der Stelle, dass in völliger Allgemeinheit

$$p = r\sin b$$

ist. Wenn wir uns aber ferner von dem Punkte M auf die Ebene der xy ein Perpendikel gefällt denken, so erhellet eben so leicht, dass in völliger Allgemeinheit:

$$\mathfrak{y} = p\cos A, \quad \mathfrak{z} = p\sin A$$

ist. Also ist nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{y} = r\sin b\cos A, \quad \mathfrak{z} = r\sin b\sin A;$$

und folglich:

$$r\cos\gamma_1 = r\sin b\cos A,\quad r\cos\gamma_2 = r\sin b\sin A;$$

also:

$$\cos\gamma_1 = \sin b\cos A,\quad \cos\gamma_2 = \sin b\sin A.$$

Wir haben daher jetzt die folgenden Formeln:

$$1)\ \begin{cases} \cos\alpha_0 = 1, & \cos\alpha_1 = 0, & \cos\alpha_2 = 0; \\ \cos\beta_0 = \cos c, & \cos\beta_1 = \sin c, & \cos\beta_2 = 0; \\ \cos\gamma_0 = \cos b, & \cos\gamma_1 = \sin b\cos A, & \cos\gamma_2 = \sin b\sin A; \end{cases}$$

welche die Hauptgrundlage unserer ferneren Untersuchungen bilden.

§. 3.

Zunächst wollen wir nun Auflösungen zweier Aufgaben über die Ebene in solcher Form geben, wie wir dieselben im Folgenden gebrauchen werden.

I. Wenn

$$\frac{x}{\cos\alpha_0} = \frac{y}{\cos\beta_0} = \frac{z}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{x}{\cos\alpha_1} = \frac{y}{\cos\beta_1} = \frac{z}{\cos\gamma_1}$$

die Gleichungen zweier durch den Anfang der Coordinaten gehenden Geraden sind, und die Gleichung der durch diese beiden Geraden bestimmten Ebene verlangt wird, so sei

$$Ax + By + Cz = 0$$

diese Gleichung. Dann ist nach den Bedingungen der Aufgabe:

$$A\cos\alpha_0 + B\cos\beta_0 + C\cos\gamma_0 = 0,$$
$$A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1 = 0;$$

und man kann folglich:

$$A = \cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1,$$
$$B = \cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1,$$
$$C = \cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1$$

setzen, so dass also:

$$\left.\begin{array}{l} (\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)x \\ +(\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)y \\ +(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)z \end{array}\right\} = 0$$

die Gleichung der durch die beiden gegebenen Geraden bestimmten Ebene ist.

II. Durch eine gegebene Gerade, deren Gleichungen

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}$$

sind, soll eine, auf der durch die Gleichung

$$Ax+By+Cz=0$$

gegebenen Ebene senkrecht stehende Ebene gelegt werden.

Die Gleichungen der Durchschnittslinie der gesuchten Ebene mit der gegebenen seien:

$$\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{\cos\omega}=\frac{z}{\cos\overline{\omega}};$$

so ist:

$$A\cos\theta+B\cos\omega+C\cos\overline{\omega}=0.$$

Die Gleichung der gesuchten Ebene ist nach I.:

$$\left.\begin{array}{r}(\cos\beta\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\omega)x\\ +(\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\overline{\omega})y\\ +(\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta)z\end{array}\right\}=0;$$

und da nun diese Ebene auf der gegebenen Ebene senkrecht stehen soll, so hat man nach den Lehren der analytischen Geometrie die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r}A(\cos\beta\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\omega)\\ +B(\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\overline{\omega})\\ +C(\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\}=0$$

oder:

$$\left.\begin{array}{r}(B\cos\gamma-C\cos\beta)\cos\theta\\ +(C\cos\alpha-A\cos\gamma)\cos\omega\\ +(A\cos\beta-B\cos\alpha)\cos\overline{\omega}\end{array}\right\}=0.$$

Also kann man, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet, wegen der beiden vorher zwischen $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\overline{\omega}$ gefundenen Gleichungen:

$$\cos\theta=G\{B(A\cos\beta-B\cos\alpha)-C(C\cos\alpha-A\cos\gamma)\},$$
$$\cos\omega=G\{C(B\cos\gamma-C\cos\beta)-A(A\cos\beta-B\cos\alpha)\},$$
$$\cos\overline{\omega}=G\{A(C\cos\alpha-A\cos\gamma)-B(B\cos\gamma-C\cos\beta)\};$$

oder:

$$\cos\theta = G\{A(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) - (A^2+B^2+C^2)\cos\alpha\},$$
$$\cos\omega = G\{B(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) - (A^2+B^2+C^2)\cos\beta\},$$
$$\cos\varpi = G\{C(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) - (A^2+B^2+C^2)\cos\gamma\}$$

setzen, woraus sich mittelst leichter Rechnung:

$$G = \pm\frac{1}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)\{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2\}}}$$

oder:

$$G = \pm\frac{1}{\sqrt{\begin{array}{c}(A^2+B^2+C^2)\\ \times\{(A\cos\beta-B\cos\alpha)^2+(B\cos\gamma-C\cos\beta)^2+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)^2\}\end{array}}}$$

und folglich:

$$\cos\theta = \pm\frac{A(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) - (A^2+B^2+C^2)\cos\alpha}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)\{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2\}}},$$

$$\cos\omega = \pm\frac{B(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) - (A^2+B^2+C^2)\cos\beta}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)\{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2\}}},$$

$$\cos\varpi = \pm\frac{C(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) - (A^2+B^2+C^2)\cos\gamma}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)\{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2\}}};$$

oder:

$$\cos\theta = \pm\frac{A(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) - (A^2+B^2+C^2)\cos\alpha}{\sqrt{\begin{array}{c}(A^2+B^2+C^2)\\ \times\{(A\cos\beta-B\cos\alpha)^2+(B\cos\gamma-C\cos\beta)^2+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)^2\}\end{array}}},$$

$$\cos\omega = \pm\frac{B(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) - (A^2+B^2+C^2)\cos\beta}{\sqrt{\begin{array}{c}(A^2+B^2+C^2)\\ \times\{(A\cos\beta-B\cos\alpha)^2+(B\cos\gamma-C\cos\beta)^2+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)^2\}\end{array}}},$$

$$\cos\varpi = \pm\frac{C(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) - (A^2+B^2+C^2)\cos\gamma}{\sqrt{\begin{array}{c}(A^2+B^2+C^2)\\ \times\{(A\cos\beta-B\cos\alpha)^2+(B\cos\gamma-C\cos\beta)+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)^2\}\end{array}}}$$

ergiebt.

Sollen die Winkel θ, ω, ϖ der Projection des durch die Winkel α, β, γ bestimmten Theils der gegebenen Geraden auf

der gegebenen Ebene entsprechen, so muss, wie sogleich erhellet, die Grösse

$$\cos\alpha\cos\theta+\cos\beta\cos\omega+\cos\gamma\cos\overline{\omega}$$

positiv sein. Diese Grösse ist aber nach dem Obigen:

$$\mp\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}$$

oder:

$$\mp\sqrt{\frac{(A\cos\beta-B\cos\alpha)^2+(B\cos\gamma-C\cos\beta)^2+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}};$$

und man muss also unter der gemachten Voraussetzung in den obigen Formeln die unteren Zeichen nehmen, was auch für das Folgende gilt.

Für die Gleichung der zu bestimmenden Ebene erhält man mittelst des Obigen leicht:

$$(B\cos\gamma-C\cos\beta)x+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)y+(A\cos\beta-B\cos\alpha)z=0.$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die durch die Winkel α, β, γ und θ, ω, $\overline{\omega}$ bestimmten Theile der durch die Gleichungen

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}\text{ und }\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{\cos\omega}=\frac{z}{\cos\overline{\omega}}$$

charakterisirten Geraden mit einander einschliessen, durch P; so ist:

$$\cos P=\cos\alpha\cos\theta+\cos\beta\cos\omega+\cos\gamma\cos\overline{\omega},$$

also nach dem Obigen:

$$\cos P=\mp\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\mp\sqrt{\frac{(A\cos\beta-B\cos\alpha)^2+(B\cos\gamma-C\cos\beta)^2+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\mp\sqrt{1-\left(\frac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)^2},$$

und folglich:

$$\sin P=\pm\frac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

wo die Zeichen zu den vorhergehenden in keiner Beziehung stehen

und das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem die Grösse

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma$$

positiv oder negativ ist, indem wir hier alle Winkel nicht grösser als 180° nehmen.

III. Wir suchen ferner noch die Gleichungen der Geraden, welche den, von zwei durch die Gleichungen:

$$\frac{x}{\cos\alpha_0} = \frac{y}{\cos\beta_0} = \frac{z}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{x}{\cos\alpha_1} = \frac{y}{\cos\beta_1} = \frac{z}{\cos\gamma_1}$$

charakterisirten Geraden eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel halbirt, der den durch die Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 bestimmten Theilen dieser Geraden entspricht.

Die Gleichungen der gesuchten Geraden seien

$$\frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\cos\omega} = \frac{z}{\cos\overline{\omega}},$$

und

$$Ax + By + Cz = 0$$

sei die Gleichung der durch die beiden gegebenen Geraden bestimmten Ebene, wo also nach I.:

$$A = \cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1,$$
$$B = \cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1,$$
$$C = \cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1$$

ist. Weil in dieser Ebene die gesuchte Gerade liegen muss, so ist:

$$A\cos\theta + B\cos\omega + C\cos\overline{\omega} = 0.$$

Von O aus schneide man auf den durch die Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 bestimmten Theilen der beiden gegebenen Geraden zwei gleiche Strecken r ab, so sind

$$r\cos\alpha_0,\ r\cos\beta_0,\ r\cos\gamma_0;\quad r\cos\alpha_1,\ r\cos\beta_1,\ r\cos\gamma_1$$

die Coordinaten der Endpunkte dieser beiden gleichen Strecken, und die Gleichungen der durch diese beiden Punkte bestimmten Geraden sind:

$$\frac{x - r\cos\alpha_0}{\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1} = \frac{y - r\cos\beta_0}{\cos\beta_0 - \cos\beta_1} = \frac{z - r\cos\gamma_0}{\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1}.$$

Weil auf dieser Geraden die zu bestimmende Gerade senkrecht stehen muss, so ist:

$$(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1)\cos\theta+(\cos\beta_0-\cos\beta_1)\cos\omega+(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1)\cos\overline{\omega}=0,$$

und zwischen $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\overline{\omega}$ haben wir also die beiden Gleichungen:

$$A\cos\theta+B\cos\omega+C\cos\overline{\omega}=0,$$

$$(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1)\cos\theta+(\cos\beta_0-\cos\beta_1)\cos\omega+(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1)\cos\overline{\omega}=0;$$

aus denen sich, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet, die folgenden Ausdrücke ergeben:

$$\cos\theta=G\{B(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1)-C(\cos\beta_0-\cos\beta_1)\},$$

$$\cos\omega=G\{C(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1)-A(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1)\},$$

$$\cos\overline{\omega}=G\{A(\cos\beta_0-\cos\beta_1)-B(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1)\};$$

also, wenn man die obigen Ausdrücke von A, B, C einführt:

$$\cos\theta=G(\cos\alpha_0+\cos\alpha_1)\{1-(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)\},$$

$$\cos\omega=G(\cos\beta_0+\cos\beta_1)\{1-(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)\},$$

$$\cos\overline{\omega}=G(\cos\gamma_0+\cos\gamma_1)\{1-(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)\}.$$

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man nach einigen leichten Verwandlungen:

$$\begin{aligned}1&=2G^2\{1+(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)\}\\&\quad\times\{1-(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)\}^2\\&=2G^2\{1-(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)\}\\&\quad\times\{1-(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)^2\}.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir den, von den beiden durch die Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 bestimmten Theilen der beiden gegebenen geraden Linien eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch Ω, so ist bekanntlich:

$$\cos\Omega=\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1,$$

also:

$$\begin{aligned}1&=2G^2(1-\cos\Omega)(1-\cos\Omega^2)\\&=4G^2\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2\sin\Omega^2=16G^2\sin\tfrac{1}{2}\Omega^4\cos\tfrac{1}{2}\Omega^2,\end{aligned}$$

und folglich:

$$G = \pm \frac{1}{4 \sin \frac{1}{2}\Omega^2 \cos \frac{1}{2}\Omega}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$\cos\theta = \pm \frac{(\cos\alpha_0 + \cos\alpha_1)(1-\cos\Omega)}{4\sin\frac{1}{2}\Omega^2\cos\frac{1}{2}\Omega} = \pm \frac{\cos\alpha_0 + \cos\alpha_1}{2\cos\frac{1}{2}\Omega},$$

$$\cos\omega = \pm \frac{(\cos\beta_0 + \cos\beta_1)(1-\cos\Omega)}{4\sin\frac{1}{2}\Omega^2\cos\frac{1}{2}\Omega} = \pm \frac{\cos\beta_0 + \cos\beta_1}{2\cos\frac{1}{2}\Omega},$$

$$\cos\overline{\omega} = \pm \frac{(\cos\gamma_0 + \cos\gamma_1)(1-\cos\Omega)}{4\sin\frac{1}{2}\Omega^2\cos\frac{1}{2}\Omega} = \pm \frac{\cos\gamma_0 + \cos\gamma_1}{2\cos\frac{1}{2}\Omega}.$$

Die Gleichungen der gesuchten Geraden sind:

$$\frac{x}{\cos\alpha_0 + \cos\alpha_1} = \frac{y}{\cos\beta_0 + \cos\beta_1} = \frac{z}{\cos\gamma_0 + \cos\gamma_1}.$$

Auch ist:

$$\cos\theta = \pm \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)}{\cos\frac{1}{2}\Omega},$$

$$\cos\omega = \pm \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta_0+\beta_1)\cos\frac{1}{2}(\beta_0-\beta_1)}{\cos\frac{1}{2}\Omega},$$

$$\cos\overline{\omega} = \pm \frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\cos\frac{1}{2}(\gamma_0-\gamma_1)}{\cos\frac{1}{2}\Omega};$$

und die Gleichungen der gesuchten Geraden sind:

$$\frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1)} = \frac{y}{\cos\frac{1}{2}(\beta_0+\beta_1)\cos\frac{1}{2}(\beta_0-\beta_1)}$$
$$= \frac{z}{\cos\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\cos\frac{1}{2}(\gamma_0-\gamma_1)}.$$

Sollen θ, ω, $\overline{\omega}$ dem Theile der zu bestimmenden Geraden entsprechen, welcher innerhalb des von den durch die Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 bestimmten Theilen der beiden gegebenen Geraden eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkels liegt; so müssen offenbar

$$\cos\alpha_0\cos\theta + \cos\beta_0\cos\omega + \cos\gamma_0\cos\overline{\omega},$$
$$\cos\alpha_1\cos\theta + \cos\beta_1\cos\omega + \cos\gamma_1\cos\overline{\omega}$$

positive Grössen sein. Der gemeinschaftliche Werth dieser Grössen ist aber nach dem Obigen:

$$\pm\frac{1+(\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1}{2\cos\frac{1}{2}\Omega} = \pm\frac{1+\cos\Omega}{2\cos\frac{1}{2}\Omega} = \pm\cos\tfrac{1}{2}\Omega,$$

und da nur das obere Zeichen einen positiven Werth liefert, so ist klar, dass man unter der gemachten Voraussetzung:

$$\cos\theta = \frac{\cos\alpha_0 + \cos\alpha_1}{2\cos\frac{1}{2}\Omega},$$

$$\cos\omega = \frac{\cos\beta_0 + \cos\beta_1}{2\cos\frac{1}{2}\Omega},$$

$$\cos\overline{\omega} = \frac{\cos\gamma_0 + \cos\gamma_1}{2\cos\frac{1}{2}\Omega};$$

oder:

$$\cos\theta = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1)\cos\frac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_1)}{\cos\frac{1}{2}\Omega},$$

$$\cos\omega = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta_0 + \beta_1)\cos\frac{1}{2}(\beta_0 - \beta_1)}{\cos\frac{1}{2}\Omega},$$

$$\cos\overline{\omega} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\cos\frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_1)}{\cos\frac{1}{2}\Omega}$$

setzen muss.

§. 4.

Die Gleichungen der Geraden *OA*, *OB*, *OC* sind:

$$\frac{x}{\cos\alpha_0} = \frac{y}{\cos\alpha_1} = \frac{z}{\cos\alpha_2},$$

$$\frac{x}{\cos\beta_0} = \frac{y}{\cos\beta_1} = \frac{z}{\cos\beta_2},$$

$$\frac{x}{\cos\gamma_0} = \frac{y}{\cos\gamma_1} = \frac{z}{\cos\gamma_2}.$$

Also sind nach §. 3. I. die Gleichungen der Ebenen der Winkel *BOC*, *COA*, *AOB* oder *a*, *b*, *c* respective:

$$\left.\begin{array}{r}(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1\cos\beta_2)x\\ +(\cos\beta_2\cos\gamma_0 - \cos\gamma_2\cos\beta_0)y\\ +(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)z\end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r}(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\cos\gamma_2)x\\ +(\cos\gamma_2\cos\alpha_0 - \cos\alpha_2\cos\gamma_0)y\\ +(\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)z\end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)x\\+(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos\alpha_0)y\\+(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)z\end{array}\right\}=0;$$

also nach 1), wie man leicht findet:

$$2)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\sin b\sin c\sin A.x\\-\sin b\cos c\sin A.y\\-(\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A)z\end{array}\right\}=0,\\ \sin A.y-\cos A.z=0,\\ z=0.\end{array}\right.$$

§. 5.

Wir betrachten zuerst die Gerade, welche von den drei Geraden OA, OB, OC gleich weit entfernt ist, und bezeichnen dieselbe durch OO_0; die von ihr mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch θ_0, ω_0, $\overline{\omega}_0$; ihre Entfernung von den Geraden OA, OB, OC durch R_0. Dann haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$\cos\alpha_0\cos\theta_0+\cos\alpha_1\cos\omega_0+\cos\alpha_2\cos\overline{\omega}_0=\cos R_0,$$
$$\cos\beta_0\cos\theta_0+\cos\beta_1\cos\omega_0+\cos\beta_2\cos\overline{\omega}_0=\cos R_0,$$
$$\cos\gamma_0\cos\theta_0+\cos\gamma_1\cos\omega_0+\cos\gamma_2\cos\overline{\omega}_0=\cos R_0;$$

aus denen sich leicht die drei folgenden Gleichungen ergeben:

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha_0(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)\\+\cos\beta_0(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)\\+\cos\gamma_0(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)\end{array}\right\}\cos\theta_0$$
$$=\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)\\+(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)\\+(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)\end{array}\right\}\cos R_0,$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha_1(\cos\beta_2\cos\gamma_0-\cos\beta_0\cos\gamma_2)\\+\cos\beta_1(\cos\gamma_2\cos\alpha_0-\cos\gamma_0\cos\alpha_2)\\+\cos\gamma_1(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\alpha_0\cos\beta_2)\end{array}\right\}\cos\omega_0$$
$$=\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\alpha_0\cos\beta_2)\\+(\cos\beta_2\cos\gamma_0-\cos\beta_0\cos\gamma_2)\\+(\cos\gamma_2\cos\alpha_0-\cos\gamma_0\cos\alpha_2)\end{array}\right\}\cos R_0,$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha_2(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\beta_1\cos\gamma_0)\\+\cos\beta_2(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\gamma_1\cos\alpha_0)\\+\cos\gamma_2(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_0)\end{array}\right\}\cos\overline{\omega}_0$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_0)\\+(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\beta_1\cos\gamma_0)\\+(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\gamma_1\cos\alpha_0)\end{array}\right\}\cos R_0.$$

Nun überzeugt man sich aber leicht von der Richtigkeit der beiden folgenden allgemeinen Relationen:

$$\begin{array}{l}(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_0)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\beta_1\cos\gamma_0)\\+(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)\\+(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\alpha_0\cos\beta_2)(\cos\beta_2\cos\gamma_0-\cos\beta_0\cos\gamma_2)\\=(\cos\alpha_0\cos\beta_0+\cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2)\\\times(\cos\beta_0\cos\gamma_0+\cos\beta_1\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cos\gamma_2)\\-(\cos\gamma_0\cos\alpha_0+\cos\gamma_1\cos\alpha_1+\cos\gamma_2\cos\alpha_2)\end{array}$$

und

$$\begin{array}{l}(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_0)^2+(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)^2\\+(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\alpha_0\cos\beta_2)^2\\=1-(\cos\alpha_0\cos\beta_0+\cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2)^2.\end{array}$$

Quadrirt man also die drei obigen Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man, wenn man nur überlegt, dass

$$\begin{array}{l}\cos a=\cos\beta_0\cos\gamma_0+\cos\beta_1\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cos\gamma_2,\\\cos b=\cos\gamma_0\cos\alpha_0+\cos\gamma_1\cos\alpha_1+\cos\gamma_2\cos\alpha_2,\\\cos c=\cos\alpha_0\cos\beta_0+\cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2\end{array}$$

ist, leicht die folgende Gleichung:

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha_0(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)\\+\cos\beta_0(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)\\+\cos\gamma_0(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)\end{array}\right\}^2$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\sin a^2+\sin b^2+\sin c^2\\+2(\cos b\cos c-\cos a)\\+2(\cos c\cos a-\cos b)\\+2(\cos a\cos b-\cos c)\end{array}\right\}\cos R_0^2$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\sin a^2+\sin b^2+\sin c^2\\-2(\cos a-\cos b\cos c)\\-2(\cos b-\cos c\cos a)\\-2(\cos c-\cos a\cos b)\end{array}\right\}\cos R_0^2,$$

oder nach einer allgemein bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha_0(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1) \\ +\cos\beta_0(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1) \\ +\cos\gamma_0(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1) \end{array}\right\}^2$$

$$=\left\{\begin{array}{l} \sin a^2+\sin b^2+\sin c^2 \\ -2\sin b\sin c\cos A-2\sin c\sin a\cos B-2\sin a\sin b\cos C \end{array}\right\}\cos R_0^2.$$

Weil nun aber nach 1) und den Lehren der sphärischen Trigonometrie:

$$\begin{array}{l} \cos\alpha_0(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1) \\ +\cos\beta_0(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1) \\ +\cos\gamma_0(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1) \\ =\sin b\sin c\sin A=\sin c\sin a\sin B=\sin a\sin b\sin C \\ =\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}\ ^{*)} \end{array}$$

ist, so erhält man die Formel:

3)

$$\cos R_0=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}{\left\{\begin{array}{l} \sin a^2+\sin b^2+\sin c^2 \\ -2\sin b\sin c\cos A-2\sin c\sin a\cos B-2\sin a\sin b\cos C \end{array}\right\}}},$$

wo für $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ auch leicht ihre Ausdrücke durch die Seiten a, b, c gesetzt werden könnten.

Setzen wir der Kürze wegen:

4)

$$\Pi_0=\frac{1}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l} \sin a^2+\sin b^2+\sin c^2 \\ -2\sin b\sin c\cos A-2\sin c\sin a\cos B-2\sin a\sin b\cos C \end{array}\right\}}},$$

so ist:

---

*) Die allgemein bekannte Zerlegung dieser Grösse in Factoren und Einführung derselben in die Formeln überlassen wir in dieser Abhandlung der Kürze wegen meistens dem Leser.

5)

$$\cos R_0 = \pm \Pi_0 \sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}$$
$$= \pm \Pi_0 \sin b \sin c \sin A$$
$$= \pm \Pi_0 \sin c \sin a \sin B$$
$$= \pm \Pi_0 \sin a \sin b \sin C.$$

Entwickelt man $\sin R_0{}^2$ mittelst 3), so erhält man für den Zähler des entsprechenden Bruchs leicht:

$$2-2(\cos a-\cos b\cos c)$$
$$-2(\cos b-\cos c\cos a)$$
$$-2(\cos c-\cos a\cos b)-2\cos a\cos b\cos c$$
$$=2\left\{\begin{array}{l}1-(\cos a+\cos b+\cos c)\\ +(\cos a\cos b+\cos b\cos c+\cos c\cos a)\\ -\cos a\cos b\cos c\end{array}\right\}$$
$$=2(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c)$$
$$=16\sin\tfrac{1}{2}a^2\sin\tfrac{1}{2}b^2\sin\tfrac{1}{2}c^2,$$

folglich:

6) . . . . $\sin R_0 = 4\Pi_0 \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c,$

und daher nach 5) und 6):

7)

$$\tang R_0 = \pm \frac{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}$$
$$= \pm \frac{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sin b\sin c\sin A}$$
$$= \pm \frac{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sin c\sin a\sin B}$$
$$= \pm \frac{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sin a\sin b\sin C}$$
$$= \pm \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\sin A} = \pm \frac{\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a\sin B} = \pm \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C}.$$

Nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(-A+B+C)}{\sin B\sin C}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(-A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C\sin A}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(-A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A-B+C)}{\sin A\sin B}};$$

also:

8)

$$\tan R_0=\pm\sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(-A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A-B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}}.$$

Bezeichnen wir die von der Geraden OO_0 mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel, wie oben, durch θ_0, ω_0, $\overline{\omega}_0$; so ist nach den oben zwischen $\cos\theta_0$, $\cos\omega_0$, $\cos\overline{\omega}_0$ und $\cos R_0$ gefundenen Gleichungen und den Gleichungen 1):

$$\sin b\sin c\sin A\cos\theta_0=\sin b\sin c\sin A\cos R_0,$$

$$\sin b\sin c\sin A\cos\omega_0=\sin b\sin A(1-\cos c)\cos R_0$$
$$=2\sin b\sin\tfrac{1}{2}c^2\sin A\cos R_0,$$

$$\sin b\sin c\sin A\cos\overline{\omega}_0=\{\sin c(1-\cos b)-\sin b\cos A(1-\cos c)\}\cos R_0$$
$$=2\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c(\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c-\cos\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\cos A)\cos R_0;$$

also:

$$9)\quad\begin{cases}\cos\theta_0=\cos R_0,\\ \cos\omega_0=\tan\frac{1}{2}c\cos R_0,\\ \cos\overline{\omega}_0=\dfrac{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c-\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos A}{2\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\sin A}\cos R_0.\end{cases}$$

Es ist auch:

$$\sin c(1-\cos b)-\sin b\cos A(1-\cos c)$$
$$=\frac{(1-\cos b)\sin c^2-(1-\cos c)(\cos a-\cos b\cos c)}{\sin c}$$
$$=\frac{\sin c^2-(1-\cos c)(\cos a+\cos b)}{\sin c}$$
$$=\sin c\{1-\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c^2}\},$$

also:

$$10)\ \ldots\ \cos\overline{\omega}_0=\frac{1-\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c^2}}{\sin b\sin A}\cos R_0,$$

folglich, weil nach 5):

$$\frac{\cos R_0}{\sin b \sin A} = \pm \Pi_0 \sin c$$

ist:

11) $$\cos \overline{\omega}_0 = \pm \Pi_0 \sin c \left\{1 - \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c^2}\right\}.$$

Auch ist:

$$1 - \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c^2} = 1 - \frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c}$$

$$= \frac{1 - \cos a - \cos b + \cos c}{2 \cos \frac{1}{2}c^2},$$

also:

12) $$\cos \overline{\omega}_0 = \pm \Pi_0 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c\, (1 - \cos a - \cos b + \cos c),$$

oder:

13) $$\cos \overline{\omega}_0 = \pm 2\Pi_0 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c\, (\sin \tfrac{1}{2}a^2 + \sin \tfrac{1}{2}b^2 - \sin \tfrac{1}{2}c^2).$$

Weil

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}C - \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}C + \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}C}$$

ist, so ist nach den Gauss'schen Gleichungen:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}C^2 - \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}C^2}{\{\cos \frac{1}{2}(a+b) + \cos \frac{1}{2}(a-b)\} \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) - \{\cos \frac{1}{2}(a-b) + \cos \frac{1}{2}(a+b)\} \sin \frac{1}{2}C^2}{\{\cos \frac{1}{2}(a+b) + \cos \frac{1}{2}(a-b)\} \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) - 2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}C^2}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \sin C}.$$

Bekanntlich ist aber

$$\sin \tfrac{1}{2}C^2 = \frac{\cos(a-b) - \cos c}{2 \sin a \sin b},$$

also:

$$\cos \tfrac{1}{2}(a-b) - 2 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}C^2$$

$$= \frac{4 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}(a-b) - \cos(a-b) + \cos c}{4 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b}$$

$$= \frac{4 \sin \frac{1}{2}a^2 \sin \frac{1}{2}b^2 - \cos a \cos b + \cos c}{4 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b}$$

$$= \frac{(1 - \cos a)(1 - \cos b) - \cos a \cos b + \cos c}{4 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b}$$

$$= \frac{1 - \cos a - \cos b + \cos c}{4 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b},$$

und folglich:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\frac{1-\cos a-\cos b+\cos c}{\sin a\sin b\sin C}$$

oder:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\frac{1-\cos a-\cos b+\cos c}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}.$$

Daher ist nach 12) auch:

$$14)\ \ldots\ \cos\overline{\omega}_0=\pm\Pi_0\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B-C)$$
$$\times\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c},$$

oder nach 5):

$$15)\ \ldots\ \cos\overline{\omega}_0=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B-C)\cos R_0.$$

Die Formeln 12) und 13) kann man nach 5) auch auf folgende Art ausdrücken.

16)

$$\cos\overline{\omega}_0=\frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c(1-\cos a-\cos b+\cos c)}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}\cos R_0$$

und:

17)

$$\cos\overline{\omega}_0=\frac{2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c(\sin\tfrac{1}{2}a^2+\sin\tfrac{1}{2}b^2-\sin\tfrac{1}{2}c^2)}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}\cos R_0.$$

Also hat man jetzt auch die folgenden Systeme von Formeln:

18)

$$\cos\theta_0=\cos R_0,$$
$$\cos\omega_0=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\cos R_0,$$
$$\cos\overline{\omega}_0=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B-C)\cos R_0;$$

19)

$$\cos\theta_0=\cos R_0,$$
$$\cos\omega_0=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\cos R_0,$$
$$\cos\overline{\omega}_0=\frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c(1-\cos a-\cos b+\cos c)}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}\cos R_0;$$

20)

$$\cos\theta_0=\cos R_0,$$
$$\cos\omega_0=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\cos R_0,$$
$$\cos\overline{\omega}_0=\frac{2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c(\sin\tfrac{1}{2}a^2+\sin\tfrac{1}{2}b^2-\sin\tfrac{1}{2}c^2)}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}\cos R_0;$$

wo für $\cos R_0$ immer die oben gefundenen Ausdrücke zu setzen sind.

Wenn wir die Neigungswinkel unserer Geraden OO_0 gegen die Ebenen BOC, COA, AOB durch $\overset{a}{\overline{\omega}}_0$, $\overset{b}{\overline{\omega}}_0$, $\overset{c}{\overline{\omega}}_0$ bezeichnen, so ist nach den dritten Formeln in den Systemen 18), 19), 20) offenbar:

18*)

$$\sin\overset{a}{\overline{\omega}}_0 = \text{val. abs.} \tang\tfrac{1}{2}a \tang\tfrac{1}{2}(-A+B+C)\cos R_0,$$

$$\sin\overset{b}{\overline{\omega}}_0 = \text{val. abs.} \tang\tfrac{1}{2}b \tang\tfrac{1}{2}(A-B+C)\cos R_0,$$

$$\sin\overset{c}{\overline{\omega}}_0 = \text{val. abs.} \tang\tfrac{1}{2}c \tang\tfrac{1}{2}(A+B-C)\cos R_0;$$

19*)

$$\sin\overset{a}{\overline{\omega}}_0 = \text{val. abs.} \frac{\tang\frac{1}{2}a(1+\cos a-\cos b-\cos c)}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}\cos R_0,$$

$$\sin\overset{b}{\overline{\omega}}_0 = \text{val. abs.} \frac{\tang\frac{1}{2}b(1-\cos a+\cos b-\cos c)}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}\cos R_0,$$

$$\sin\overset{c}{\overline{\omega}}_0 = \text{val. abs.} \frac{\tang\frac{1}{2}c(1-\cos a-\cos b+\cos c)}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}\cos R_0;$$

20*)

$$\sin\overset{a}{\overline{\omega}}_0 = \text{val. abs.} \frac{2\tang\frac{1}{2}a(-\sin\frac{1}{2}a^2+\sin\frac{1}{2}b^2+\sin\frac{1}{2}c^2)}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}\cos R_0,$$

$$\sin\overset{b}{\overline{\omega}}_0 = \text{val. abs.} \frac{2\tang\frac{1}{2}b(\sin\frac{1}{2}a^2-\sin\frac{1}{2}b^2+\sin\frac{1}{2}c^2)}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}\cos R_0,$$

$$\sin\overset{c}{\overline{\omega}}_0 = \text{val. abs.} \frac{2\tang\frac{1}{2}c(\sin\frac{1}{2}a^2+\sin\frac{1}{2}b^2-\sin\frac{1}{2}c^2)}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}\cos R_0.$$

Die Gleichungen der Geraden, von welcher OO_0 ein Theil ist, sind:

$$21) \;\ldots\ldots\; \frac{x}{\cos\theta_0} = \frac{y}{\cos\omega_0} = \frac{z}{\cos\overline{\omega}_0}.$$

Bezeichnen wir die von der Projection der Geraden OO_0 auf der Ebene der xy mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch $\varphi_0, \psi_0, \chi_0$; so ist nach den in §. 3. II. entwickelten Formeln, in denen man

in diesem Falle $A=0$, $B=0$, $C=1$ setzen und die unteren Zeichen nehmen muss:

$$22) \ldots \cos\varphi_0 = \frac{\cos\theta_0}{\sin\overline{\omega}_0}, \quad \cos\psi_0 = \frac{\cos\omega_0}{\sin\overline{\omega}_0}, \quad \cos\chi_0 = 0.$$

Jenachdem OO_0 auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der xy, nämlich mit OC auf einer Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene AOB des Winkels c liegend angenommen wird, ist offenbar $\cos\overline{\omega}_0$ positiv oder negativ. In Folge der Formeln 12), 13), 14) muss man also, wenn OO_0 mit OC auf derselben Seite der Ebene AOB liegend angenommen wird, in allen obigen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grössen

$$1-\cos a-\cos b+\cos c, \quad \sin\tfrac{1}{2}a^2+\sin\tfrac{1}{2}b^2-\sin\tfrac{1}{2}c^2, \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B-C)$$

positiv oder negativ sind; wenn dagegen OO_0 mit OC auf entgegengesetzten Seiten der Ebene AOB liegend angenommen wird, so muss man in allen obigen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grössen

$$1-\cos a-\cos b+\cos c, \quad \sin\tfrac{1}{2}a^2+\sin\tfrac{1}{2}b^2-\sin\tfrac{1}{2}c^2, \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B-C)$$

negativ oder positiv sind.

§. 6.

Wir wollen jetzt die Gerade OO_1 bestimmen, welche gegen die Seiten BOC, COA, AOB der Ecke unter gleichen Winkeln geneigt ist, indem wir zugleich annehmen, dass die Gerade OO_1 innerhalb der Ecke liegen soll. Die von der Linie OO_1 mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel bezeichnen wir durch θ_1, ω_1, $\overline{\omega}_1$ und ihren gemeinschaftlichen Neigungswinkel gegen die drei Seiten der Ecke durch R_1.

Bezeichnen wir die Gleichung der Ebene BOC durch

$$A_a x + B_a y + C_a z = 0,$$

so ist nach 2):

$$A_a = \sin b \sin c \sin A,$$

$$B_a = -\sin b \cos c \sin A,$$

$$C_a = -(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A).$$

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Linie OA verhalten sich zu einander wie

$$\cos\alpha_0 : \cos\alpha_1 : \cos\alpha_2,$$

also nach 1) wie $1:0:0$. Setzt man diese Werthe für x, y, z, so erhält die Grösse

$$A_a x + B_a y + C_a z$$

den Werth

$$A_a = \sin b \sin c \sin A,$$

welcher positiv ist. Die Coordinaten eines jeden Punktes in OO_1 verhalten sich zu einander wie

$$\cos\theta_1 : \cos\omega_1 : \cos\overline{\omega}_1.$$

Setzt man diese Werthe für x, y, z, so erhält die Grösse

$$A_a x + B_a y + C_a z$$

den Werth

$$A_a \cos\theta_1 + B_a \cos\omega_1 + C_a \cos\overline{\omega}_1,$$

welcher also nach einem bekannten Satze, weil unter den gemachten Voraussetzungen die Geraden OA und OO_1 offenbar auf einer Seite der durch die Gleichung

$$A_a x + B_a y + C_a z = 0$$

charakterisirten Ebene BOC liegen, gleichfalls positiv sein muss. Daher ist nach §. 3. II. zu setzen:

$$\sin R_1 = \frac{A_a \cos\theta_1 + B_a \cos\omega_1 + C_a \cos\overline{\omega}_1}{\sqrt{A_a{}^2 + B_a{}^2 + C_a{}^2}}.$$

Nach dem Obigen ist:

$$A_a{}^2 + B_a{}^2 + C_a{}^2 = \sin b^2 \sin A^2 + (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A)^2$$

$$= 1 - (\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A)^2 = 1 - \cos a^2 = \sin a^2,$$

also:

$$\sqrt{A_a{}^2 + B_a{}^2 + C_a{}^2} = \sin a,$$

und folglich:

$$\sin R_1 = \frac{A_a \cos\theta_1 + B_a \cos\omega_1 + C_a \cos\overline{\omega}_1}{\sin a}.$$

Bezeichnen wir die Gleichung der Ebene COA durch

$$A_b x + B_b y + C_b z = 0,$$

so ist nach 2):

$$A_b = 0, \quad B_b = \sin A, \quad C_b = -\cos A.$$

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes in OB verhalten sich zu einander wie

$$\cos\beta_0 : \cos\beta_1 : \cos\beta_2,$$

also nach 1) wie $\cos c : \sin c : 0$. Setzt man diese Werthe für x, y, z, so erhält die Grösse

$$A_b x + B_b y + C_b z$$

den Werth

$$A_b \cos c + B_b \sin c = \sin c \sin A,$$

welcher positiv ist. Also muss unter den gemachten Voraussetzungen, ganz eben so wie vorher, auch

$$A_b \cos\theta_1 + B_b \cos\omega_1 + C_b \cos\overline{\omega}_1$$

positiv sein, und man muss folglich nach §. 3. II. setzen:

$$\sin R_1 = \frac{A_b \cos\theta_1 + B_b \cos\omega_1 + C_b \cos\overline{\omega}_1}{\sqrt{A_b^2 + B_b^2 + C_b^2}},$$

oder, wie aus dem Obigen sich auf der Stelle ergiebt:

$$\sin R_1 = A_b \cos\theta_1 + B_b \cos\omega_1 + C_b \cos\overline{\omega}_1.$$

Bezeichnen wir die Gleichung der Ebene AOB durch

$$A_c x + B_c y + C_c z = 0,$$

so ist nach 2):

$$A_c = 0, \quad B_c = 0, \quad C_c = 1.$$

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes in OC verhalten sich zu einander wie

$$\cos\gamma_0 : \cos\gamma_1 : \cos\gamma_2,$$

also nach 1) wie

$$\cos b : \sin b \cos A : \sin b \sin A.$$

Setzt man diese Werthe für x, y, z, so erhält die Grösse

$$A_c x + B_c y + C_c z$$

den Werth

$$C_c \sin b \sin A = \sin b \sin A,$$

welcher positiv ist. Also muss unter den gemachten Voraussetzungen, ganz eben so wie vorher, auch

$$A_c \cos\theta_1 + B_c \cos\omega_1 + C_c \cos\overline{\omega}_1$$

positiv sein, und man muss folglich nach §. 3. II. setzen:

$$\sin R_1 = \frac{A_c \cos\theta_1 + B_c \cos\omega_1 + C_c \cos\overline{\omega}_1}{\sqrt{A_c^2 + B_c^2 + C_c^2}},$$

oder, wie aus dem Obigen sogleich erhellet:

$$\sin R_1 = A_c \cos\theta_1 + B_c \cos\omega_1 + C_c \cos\overline{\omega}_1.$$

Hiernach haben wir also jetzt die drei folgenden Gleichungen:

$$\sin a \sin R_1 = A_a \cos\theta_1 + B_a \cos\omega_1 + C_a \cos\overline{\omega}_1,$$
$$\sin R_1 = A_b \cos\theta_1 + B_b \cos\omega_1 + C_b \cos\overline{\omega}_1,$$
$$\sin R_1 = A_c \cos\theta_1 + B_c \cos\omega_1 + C_c \cos\overline{\omega}_1.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind:

$$\sin A \cos\omega_1 - \cos A \cos\overline{\omega}_1 = \sin R_1,$$
$$\cos\overline{\omega}_1 = \sin R_1;$$

woraus sich:

$$\sin A \cos\omega_1 = (1 + \cos A) \sin R_1,$$
$$\cos\overline{\omega}_1 = \sin R_1$$

ergiebt. Die erste der drei obigen Gleichungen ist:

$$\left.\begin{array}{l} \sin b \sin c \sin A \cos\theta_1 - \sin b \cos c \sin A \cos\omega_1 \\ \quad - (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A) \cos\overline{\omega}_1 \end{array}\right\} = \sin a \sin R_1,$$

also wegen des Vorhergehenden:

$$\begin{aligned} &\sin b \sin c \sin A \cos\theta_1 \\ &= \sin a \sin R_1 + \sin b \cos c (1 + \cos A) \sin R_1 \\ &\qquad + (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A) \sin R_1 \\ &= \{\sin a + \sin(b + c)\} \sin R_1; \end{aligned}$$

so dass man also jetzt die drei folgenden Gleichungen hat:

$$23) \ldots \left\{\begin{array}{l} \sin b \sin c \sin A \cos\theta_1 = \{\sin a + \sin(b+c)\} \sin R_1, \\ \sin b \sin c \sin A \cos\omega_1 = \sin b \sin c (1 + \cos A) \sin R_1, \\ \sin b \sin c \sin A \cos\overline{\omega}_1 = \sin b \sin c \sin A \sin R_1; \end{array}\right.$$

oder:

23*)

$$\cos\theta_1 = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sin b\sin c\sin A}\sin R_1$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}\sin R_1$$

$$= \cos\tfrac{1}{2}(-a+b+c)\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}}\sin R_1,$$

$$\cos\omega_1 = \cot\tfrac{1}{2}A\sin R_1 = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}}\sin R_1,$$

$$\cos\overline{\omega}_1 = \sin R_1.$$

Quadrirt man die Gleichungen 23) und addirt sie dann zu einander, so erhält man:

$$\frac{\sin b^2\sin c^2\sin A^2}{\sin R_1{}^2} = \{\sin a + \sin(b+c)\}^2 + 2\sin b^2\sin c^2(1+\cos A),$$

woraus sich, wenn man

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

setzt, nach einigen keiner Schwierigkeit unterliegenden Reductionen, die Formel:

24) . . . . $\sin R_1 =$

$$\frac{\sin b\sin c\sin A}{\sqrt{\sin a^2+\sin b^2+\sin c^2+2\cos a\sin b\sin c+2\sin a\cos b\sin c+2\sin a\sin b\cos c}}$$

oder:

25) . . . . $\sin R_1 =$

$$\sqrt{\frac{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}{\sin a^2+\sin b^2+\sin c^2+2\cos a\sin b\sin c+2\sin a\cos b\sin c+2\sin a\sin b\cos c}}$$

ergiebt.

Ziehen wir den Zähler des vorstehenden Bruchs von dessen Nenner ab, so erhalten wir mittelst leichter Rechnung als Differenz die Grösse:

$$2\{1-\cos a\cos(b+c)+\sin a\sin(b+c)\}$$
$$= 2\{1-\cos(a+b+c)\} = 4\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)^2,$$

folglich:

26) . . . . $\cos R_1 =$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sqrt{\sin a^2+\sin b^2+\sin c^2+2\cos a\sin b\sin c+2\sin a\cos b\sin c+2\sin a\sin b\cos c}},$$

also nach 24) und 26):

27) . . . . $\tan R_1 = \dfrac{\sin b\sin c\sin A}{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}$,

oder nach 25) und 26):

28) $\tan R_1 = \dfrac{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}$,

also auch:

29) $\tan R_1 = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}}$.

Nach den Gauss'schen Gleichungen ist:

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c) &= \sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}c+\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}c\\ &= \frac{\{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\cos\frac{1}{2}(A+B)\}\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}C}\\ &= \frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin c}{\sin\frac{1}{2}C}\\ &= \frac{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C\sin c}{\sin C},\end{aligned}$$

folglich nach 27):

$$\tan R_1 = \frac{\sin b\sin A\sin C}{4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.$$

Nach anderen bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie ist aber:

$$\sin\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A-B+C)}{\sin A\sin C}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(-A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin A\sin C}};$$

also, weil nach dem Obigen:

$$\tan R_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b\sin A\sin C}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}$$

gesetzt werden kann:

30) . . . . $\tan R_1$

$$= \frac{\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(-A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A-B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.$$

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die Projection der Geraden OO_1 auf der Ebene der xy mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, durch φ_1, ψ_1, χ_1; so ist nach §. 3. II.:

$$31) \; . \; . \; \cos\varphi_1 = \frac{\cos\theta_1}{\sin\overline{\omega}_1}, \quad \cos\psi_1 = \frac{\cos\omega_1}{\sin\overline{\omega}_1}, \quad \cos\chi_1 = 0.$$

Bezeichnen wir die angulären Entfernungen der Linie OO_1 von den Geraden OA, OB, OC durch $\overset{a}{\Delta}_1$, $\overset{b}{\Delta}_1$, $\overset{c}{\Delta}_1$; so ist offenbar $\cos\overset{a}{\Delta}_1 = \cos\theta_1$, also nach 23):

$$\cos\overset{a}{\Delta}_1 = \frac{\sin a + \sin(b+c)}{\sin b\sin c\sin A}\sin R_1 = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sin b\sin c\sin A}\sin R_1,$$

und daher überhaupt:

32)

$$\cos\overset{a}{\Delta}_1 = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sin b\sin c\sin A}\sin R_1,$$

$$\cos\overset{b}{\Delta}_1 = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin c\sin a\sin B}\sin R_1,$$

$$\cos\overset{c}{\Delta}_1 = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a\sin b\sin C}\sin R_1;$$

oder nach 24):

32*)

$$\cos\overset{a}{\Delta}_1 =$$
$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sqrt{\sin a^2+\sin b^2+\sin c^2+2\cos a\sin b\sin c+2\sin a\cos b\sin c+2\sin a\sin b\cos c}},$$

$$\cos\overset{b}{\Delta}_1 =$$
$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sqrt{\sin a^2+\sin b^2+\sin c^2+2\cos a\sin b\sin c+2\sin a\cos b\sin c+2\sin a\sin b\cos c}},$$

$$\cos\overset{c}{\Delta}_1 =$$
$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sqrt{\sin a^2+\sin b^2+\sin c^2+2\cos a\sin b\sin c+2\sin a\cos b\sin c+2\sin a\sin b\cos c}}.$$

Anmerkung.

Dass es ausser der vorher behandelten noch drei andere

Gerade giebt, welche gegen die Ebenen BOC, COA, AOB unter gleichen Winkeln geneigt sind, ist klar, und die Methode, nach welcher dieselben zu behandeln sind, ist von der vorher angewandten nicht wesentlich verschieden; um aber dieser Abhandlung für jetzt keine zu grosse Ausdehnung zu geben, ziehe ich es vor, auf die vier, gegen die, eine dreiseitige körperliche Ecke bildenden Ebenen gleich geneigten Geraden später in einer besonderen Abhandlung zurückzukommen.

§. 7.

Durch die drei Geraden OA, OB, OC denken wir uns jetzt drei Ebenen gelegt, welche respective auf den Ebenen BOC, COA, AOB senkrecht stehen. Die Gleichungen dieser drei senkrechten Ebenen sind, wie mittelst §. 3. II. und der Formeln 1), 2) leicht gefunden wird:

33)

$$(\sin b\cos c\cos A-\cos b\sin c)y+\sin b\cos c\sin A.z=0,$$

$$\sin c\cos A.x-\cos c\cos A.y-\cos c\sin A.z=0,$$

$$\sin b\cos A.x-\cos b.y=0.$$

Für die Gleichungen der Durchschnittslinie der zweiten und dritten Ebene erhält man sehr leicht:

34)

$$\frac{x}{\cos b}=\frac{y}{\sin b\cos A}=\frac{\cos c\sin A.z}{(\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A)\cos A}.$$

Also ist:

$$\frac{y}{\sin b}=\frac{\cos c\sin A.z}{\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A},$$

oder:

$$(\sin b\cos c\cos A-\cos b\sin c)y+\sin b\cos c\sin A.z=0,$$

welches die Gleichung der ersten der drei Ebenen 33) ist, woraus sich ergiebt, dass die drei durch OA, OB, OC senkrecht auf BOC, COA, AOB gelegten Ebenen sich in einer Geraden schneiden, deren einen von O ausgehenden Theil wir durch OO_2, und die von demselben mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch θ_2, ω_2, ϖ_2 bezeichnen wollen.

Wenn G_2 einen gewissen Factor bezeichnet, so ist nach 34):

$$35)\quad \begin{cases} \cos\theta_2 = G_2\cos b, \\ \cos\omega_2 = G_2 \sin b\cos A, \\ \cos\overline{\omega}_2 = G_2 \dfrac{(\cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A)\cos A}{\cos c\sin A}. \end{cases}$$

Weil nach der sphärischen Trigonometrie

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

ist, so ist

$$\cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A = \cos b\sin c - \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin c}\cos c$$

$$= \frac{\cos b - \cos c\cos a}{\sin c} = \sin a\cos B,$$

folglich:

$$36)\ \ldots\ldots \begin{cases} \cos\theta_2 = G_2\cos b, \\ \cos\omega_2 = G_2 \sin b\cos A, \\ \cos\overline{\omega}_2 = G_2 \dfrac{\sin a\cot A\cos B}{\cos c}. \end{cases}$$

Zu dem Gebrauch im Folgenden schreiben wir die Gleichungen 35) wie nachstehend:

$$37)\ \begin{cases} \cos c\sin A\cos\theta_2 = G_2\cos b\cos c\sin A, \\ \cos c\sin A\cos\omega_2 = G_2\sin b\cos c\sin A\cos A, \\ \cos c\sin A\cos\overline{\omega}_2 = G_2(\cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A)\cos A. \end{cases}$$

Wenn man diese Gleichungen quadrirt und dann zu einander addirt, so erhält man zuerst mittelst leichter Rechnung:

38)

$$G_2 = \pm\frac{\cos c\sin A}{\sqrt{\cos b^2\cos c^2\sin A^2 + (\cos b^2 + \cos c^2 - 2\cos a\cos b\cos c)\cos A^2}},$$

also:

39)

$$\cos\theta_2 = \pm \frac{\cos b \cos c \sin A}{\sqrt{\cos b^2 \cos c^2 \sin A^2 + (\cos b^2 + \cos c^2 - 2\cos a \cos b \cos c)\cos A^2}},$$

$$\cos\omega_2 = \pm \frac{\sin b \cos c \sin A \cos A}{\sqrt{\cos b^2 \cos c^2 \sin A^2 + (\cos b^2 + \cos c^2 - 2\cos a \cos b \cos c)\cos A^2}},$$

$$\cos\overline{\omega}_2 = \pm \frac{(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A)\cos A}{\sqrt{\cos b^2 \cos c^2 \sin A^2 + (\cos b^2 + \cos c^2 - 2\cos a \cos b \cos c)\cos A^2}}.$$

Führt man aber ferner in den obigen Ausdruck von G_2 die bekannten Ausdrücke:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin b \sin c}$$

ein, so erhält man nach einigen, keiner Schwierigkeit unterliegenden Reductionen, wenn der Kürze wegen:

$$40) \;.\;. \quad M = \begin{array}{l} \cos a^2 \cos b^2 + \cos b^2 \cos c^2 + \cos c^2 \cos a^2 \\ -2\cos a \cos b \cos c(\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2) \\ +3\cos a^2 \cos b^2 \cos c^2 \end{array}$$

gesetzt wird:

$$41) \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad G_2 = \pm \frac{\sin b \sin c \cos c \sin A}{\sqrt{M}}$$

oder:

$$42) \quad G_2 = \pm \frac{\cos c \sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sqrt{M}}.$$

Also ist nach 36):

$$43) \;.\;. \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta_2 = \pm \dfrac{\sin b \cos b \sin c \cos c \sin A}{\sqrt{M}}, \\ \cos\omega_2 = \pm \dfrac{\sin b \sin b \sin c \cos c \sin A \cos A}{\sqrt{M}}, \\ \cos\overline{\omega}_2 = \pm \dfrac{\sin a \sin b \sin c \cos A \cos B}{\sqrt{M}}. \end{array} \right.$$

Wenn wir die Neigungswinkel unserer Geraden OO_2 gegen die Ebenen BOC, COA, OAB durch $\overset{a}{\overline{\omega}}_2$, $\overset{b}{\overline{\omega}}_2$, $\overset{c}{\overline{\omega}}_2$ bezeichnen, so ist nach der dritten der Formeln 43):

43*)

$$\sin \overset{a}{\overline{\omega}}_2 = \text{val. abs.} \frac{\sin a \sin b \sin c \cos B \cos C}{\sqrt{M}},$$

$$\sin \overset{b}{\overline{\omega}}_2 = \text{val. abs.} \frac{\sin a \sin b \sin c \cos C \cos A}{\sqrt{M}},$$

$$\sin \overset{c}{\overline{\omega}}_2 = \text{val. abs.} \frac{\sin a \sin b \sin c \cos A \cos B}{\sqrt{M}}.$$

Bezeichnen wir die von der Projection der Geraden OO_2 auf der Ebene der xy mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch $\varphi_2, \psi_2, \chi_2$; so ist auf ganz ähnliche Art wie früher:

44) . . $\cos\varphi_2 = \dfrac{\cos\theta_2}{\sin\overline{\omega}_2}, \quad \cos\psi_2 = \dfrac{\cos\omega_2}{\sin\overline{\omega}_2}, \quad \cos\chi_2 = 0.$

Bezeichnen wir die angulären Entfernungen der Geraden OO_2 von den Geraden OA, OB, OC durch $\overset{a}{\varDelta}_2$, $\overset{b}{\varDelta}_2$, $\overset{c}{\varDelta}_2$; so ist:

$$\cos\overset{a}{\varDelta}_2 = \cos\alpha_0\cos\theta_2 + \cos\alpha_1\cos\omega_2 + \cos\alpha_2\cos\overline{\omega}_2,$$

$$\cos\overset{b}{\varDelta}_2 = \cos\beta_0\cos\theta_2 + \cos\beta_1\cos\omega_2 + \cos\beta_2\cos\overline{\omega}_2,$$

$$\cos\overset{c}{\varDelta}_2 = \cos\gamma_0\cos\theta_2 + \cos\gamma_1\cos\omega_2 + \cos\gamma_2\cos\overline{\omega}_2;$$

also nach 1):

$$\cos\overset{a}{\varDelta}_2 = \cos\theta_2,$$

$$\cos\overset{b}{\varDelta}_2 = \cos c\cos\theta_2 + \sin c\cos\omega_2,$$

$$\cos\overset{c}{\varDelta}_2 = \cos b\cos\theta_2 + \sin b\cos A\cos\omega_2 + \sin b\sin A\cos\overline{\omega}_2.$$

Daher ist nach 35):

$$\frac{\cos\overset{a}{\varDelta}_2}{G_2} = \cos b,$$

$$\frac{\cos\overset{b}{\varDelta}_2}{G_2} = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A = \cos a,$$

$$\frac{\cos\overset{c}{\varDelta}_2}{G_2} = \cos b^2 + \sin b^2\cos A^2$$

$$+ \frac{\sin b}{\cos c}(\cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A)\cos A$$

$$= \cos b^2 + \frac{\cos b}{\cos c}(\cos a - \cos b\cos c) = \frac{\cos a\cos b}{\cos c};$$

folglich:

$$45) \quad \left\{\begin{array}{l} \cos\overset{a}{\varDelta}_2 = G_2 \cos b, \\ \cos\overset{b}{\varDelta}_2 = G_2 \cos a, \\ \cos\overset{c}{\varDelta}_2 = G_2 \dfrac{\cos a \cos b}{\cos c}; \end{array}\right.$$

also nach 42):

46)

$$\cos\overset{a}{\varDelta}_2 = \pm \frac{\cos b \cos c \sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sqrt{M}},$$

$$\cos\overset{b}{\varDelta}_2 = \pm \frac{\cos c \cos a \sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sqrt{M}},$$

$$\cos\overset{c}{\varDelta}_2 = \pm \frac{\cos a \cos b \sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sqrt{M}}.$$

Jenachdem OO_2 auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der xy, nämlich mit OC auf einer Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene AOB des Winkels c liegend angenommen wird, ist offenbar $\cos\overline{\omega}_2$ positiv oder negativ. In Folge der dritten der Gleichungen 43) muss man also, wenn OO_2 mit OC auf derselben Seite der Ebene AOB liegend angenommen wird, in allen obigen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\cos A \cos B$$

positiv oder negativ ist; wenn dagegen OO_2 mit OC auf entgegengesetzten Seiten der Ebene AOB liegend angenommen wird, so muss man in allen obigen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\cos A \cos B$$

negativ oder positiv ist.

§. 8.

Durch die Geraden OA, OB, OC und respective die Geraden, von denen a, b, c halbirt werden, legen wir drei Ebenen, deren Gleichungen nach §. 3. I. III.:

$$\left.\begin{array}{l}\{\cos\alpha_1(\cos\beta_2+\cos\gamma_2)-\cos\alpha_2(\cos\beta_1+\cos\gamma_1)\}x\\ +\{\cos\alpha_2(\cos\beta_0+\cos\gamma_0)-\cos\alpha_0(\cos\beta_2+\cos\gamma_2)\}y\\ +\{\cos\alpha_0(\cos\beta_1+\cos\gamma_1)-\cos\alpha_1(\cos\beta_0+\cos\gamma_0)\}z\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{\cos\beta_1(\cos\gamma_2+\cos\alpha_2)-\cos\beta_2(\cos\gamma_1+\cos\alpha_1)\}x\\ +\{\cos\beta_2(\cos\gamma_0+\cos\alpha_0)-\cos\beta_0(\cos\gamma_2+\cos\alpha_2)\}y\\ +\{\cos\beta_0(\cos\gamma_1+\cos\alpha_1)-\cos\beta_1(\cos\gamma_0+\cos\alpha_0)\}z\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{\cos\gamma_1(\cos\alpha_2+\cos\beta_2)-\cos\gamma_2(\cos\alpha_1+\cos\beta_1)\}x\\ +\{\cos\gamma_2(\cos\alpha_0+\cos\beta_0)-\cos\gamma_0(\cos\alpha_2+\cos\beta_2)\}y\\ +\{\cos\gamma_0(\cos\alpha_1+\cos\beta_1)-\cos\gamma_1(\cos\alpha_0+\cos\beta_0)\}z\end{array}\right\}=0;$$

also nach 1), wie man leicht findet:

47)

$$\sin b\sin A\,.\,y-(\sin c+\sin b\cos A)z=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin b\sin c\sin A\,.\,x-\sin b\cos c\sin A\,.\,y\\ -\{(1+\cos b)\sin c-\sin b\cos c\cos A\}z\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin b\sin c\sin A\,.\,x-\sin b(1+\cos c)\sin A\,.\,y\\ -\{\cos b\sin c-\sin b(1+\cos c)\cos A\}z\end{array}\right\}=0$$

sind.

Die erste Gleichung lässt sich unter der Form:

$$\frac{y}{\sin c+\sin b\cos A}=\frac{z}{\sin b\sin A}$$

schreiben. Bestimmen wir hieraus y und führen den Werth in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir nach leichter Rechnung:

$$\frac{x}{1+\cos b+\cos c}=\frac{z}{\sin b\sin A}.$$

Also sind:

48) $$\frac{x}{1+\cos b+\cos c}=\frac{y}{\sin c+\sin b\cos A}=\frac{z}{\sin b\sin A}$$

die Gleichungen der Durchschnittslinie der ersten und zweiten Ebene.

Setzen wir, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet, was hiernach verstattet ist:

$$x = G(1+\cos b+\cos c),$$
$$y = G(\sin c+\sin b\cos A),$$
$$z = G\sin b\sin A;$$

und führen diese Ausdrücke in die dritte Gleichung ein, so erhalten wir die Gleichung:

$$\sin c(1+\cos b+\cos c)-(1+\cos c)(\sin c+\sin b\cos A)$$
$$-\{\cos b\sin c-\sin b(1+\cos c)\cos A\}=0,$$

welche sich auf der Stelle als erfüllt oder als eine identische Gleichung erweist, woraus sich ergiebt, dass unsere drei Ebenen sich in einer Geraden schneiden, deren Gleichungen die Gleichungen 48) sind.

Den einen von O ausgehenden Theil dieser Geraden wollen wir durch OO_3, und die von demselben mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch θ_3, ω_3, $\overline{\omega}_3$ bezeichnen. Ist dann G_3 ein gewisser Factor, so haben wir nach 48) die Gleichungen:

$$49) \quad \begin{cases} \cos\theta_3 = G_3(1+\cos b+\cos c), \\ \cos\omega_3 = G_3(\sin c+\sin b\cos A), \\ \cos\overline{\omega}_3 = G_3\sin b\sin A. \end{cases}$$

Quadriren wir diese Gleichungen und addiren sie dann zu einander, so erhalten wir nach leichter Rechnung, wobei für $\cos A$ sein bekannter Ausdruck durch a, b, c zu setzen ist:

$$50) \quad G_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}},$$

also:

$$51) \quad \begin{cases} \cos\theta_3 = \pm\dfrac{1+\cos b+\cos c}{\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}}, \\ \cos\omega_3 = \pm\dfrac{\sin c+\sin b\cos A}{\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}}, \\ \cos\overline{\omega}_3 = \pm\dfrac{\sin b\sin A}{\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}}; \end{cases}$$

oder:

$$52) \quad \begin{cases} \cos\theta_3 = \pm\dfrac{1+\cos b+\cos c}{\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}}, \\ \cos\omega_3 = \pm\dfrac{1+\cos a-(\cos b+\cos c)\cos c}{\sin c\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}}, \\ \cos\overline{\omega}_3 = \pm\dfrac{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin c\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}}. \end{cases}$$

Wenn wir die Neigungswinkel unserer Geraden OO_3 gegen die Ebenen BOC, COA, AOB durch $\overset{a}{\overline{\omega}}_3$, $\overset{b}{\overline{\omega}}_3$, $\overset{c}{\overline{\omega}}_3$ bezeichnen, so ist nach der dritten der Formeln 52):

53)

$$\sin\overset{a}{\overline{\omega}}_3=\frac{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}},$$

$$\sin\overset{b}{\overline{\omega}}_3=\frac{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin b\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}},$$

$$\sin\overset{c}{\overline{\omega}}_3=\frac{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin c\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}};$$

also:

$$\sin\overset{a}{\overline{\omega}}_3:\sin\overset{b}{\overline{\omega}}_3:\sin\overset{c}{\overline{\omega}}_3=\frac{1}{\sin a}:\frac{1}{\sin b}:\frac{1}{\sin c}=\frac{1}{\sin A}:\frac{1}{\sin B}:\frac{1}{\sin C}.$$

Bezeichnen wir die von der Projection der Geraden OO_3 auf der Ebene der xy mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch φ_3, ψ_3, χ_3; so ist auf ganz ähnliche Art wie früher:

$$54)\quad \cos\varphi_3=\frac{\cos\theta_3}{\sin\overline{\omega}_3},\quad \cos\psi_3=\frac{\cos\omega_3}{\sin\overline{\omega}_3},\quad \cos\chi_3=0.$$

Bezeichnen wir die angulären Entfernungen der Geraden OO_3 von den Geraden OA, OB, OC durch $\overset{a}{\varDelta}_3$, $\overset{b}{\varDelta}_3$, $\overset{c}{\varDelta}_3$; so ist:

$$\cos\overset{a}{\varDelta}_3=\cos\alpha_0\cos\theta_3+\cos\alpha_1\cos\omega_3+\cos\alpha_2\cos\overline{\omega}_3,$$

$$\cos\overset{b}{\varDelta}_3=\cos\beta_0\cos\theta_3+\cos\beta_1\cos\omega_3+\cos\beta_2\cos\overline{\omega}_3,$$

$$\cos\overset{c}{\varDelta}_3=\cos\gamma_0\cos\theta_3+\cos\gamma_1\cos\omega_3+\cos\gamma_2\cos\overline{\omega}_3;$$

also nach 1):

$$\cos\overset{a}{\varDelta}_3=\cos\theta_3,$$

$$\cos\overset{b}{\varDelta}_3=\cos c\cos\theta_3+\sin c\cos\omega_3,$$

$$\cos\overset{c}{\varDelta}_3=\cos b\cos\theta_3+\sin b\cos A\cos\omega_3+\sin b\sin A\cos\overline{\omega}_3.$$

Daher ist nach 49):

$$\frac{\cos \overset{a}{\varDelta_3}}{G_3} = 1 + \cos b + \cos c,$$

$$\frac{\cos \overset{b}{\varDelta_3}}{G_3} = \cos c(1+\cos b+\cos c)+\sin c(\sin c+\sin b\cos A) = 1+\cos c+\cos a,$$

$$\frac{\cos \overset{c}{\varDelta_3}}{G_3} = \cos b(1+\cos b+\cos c)+\sin b\cos A(\sin c+\sin b\cos A)+\sin b^2\sin A^2$$
$$= 1+\cos a+\cos b;$$

indem man immer für $\cos A$ seinen Ausdruck durch a, b, c setzt. Also ist nach 50):

$$55) \ldots \begin{cases} \cos \overset{a}{\varDelta_3} = \pm \dfrac{1+\cos b+\cos c}{\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}}, \\ \cos \overset{b}{\varDelta_3} = \pm \dfrac{1+\cos c+\cos a}{\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}}, \\ \cos \overset{c}{\varDelta_3} = \pm \dfrac{1+\cos a+\cos b}{\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)}}. \end{cases}$$

Jenachdem OO_3 auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der xy, nämlich mit OC auf einer Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene AOB des Winkels c liegend angenommen wird, ist offenbar $\cos\overline{\omega}_3$ positiv oder negativ. In Folge der dritten der Formeln 51) oder 52) muss man also, jenachdem OO_3 mit OC auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene AOB liegend angenommen wird, in allen obigen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nehmen.

§. 9.

Im ebenen Dreieck liegen bekanntlich der Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises, der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Höhen, und der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der von den Spitzen des Dreiecks nach den Mittelpunkten der Gegenseiten gezogenen Geraden, in einer geraden Linie. Dies veranlasst uns zu der Frage, ob vielleicht bei der dreiseitigen körperlichen Ecke die drei Geraden OO_0, OO_2, OO_3 in einer Ebene liegen? welche Frage wir jetzt beantworten wollen.

Wenn drei durch die Gleichungen:

$$\frac{x}{\cos\alpha_0} = \frac{y}{\cos\beta_0} = \frac{z}{\cos\gamma_0},$$
$$\frac{x}{\cos\alpha_1} = \frac{y}{\cos\beta_1} = \frac{z}{\cos\gamma_1},$$
$$\frac{x}{\cos\alpha_2} = \frac{y}{\cos\beta_2} = \frac{z}{\cos\gamma_2}$$

charakterisirte gerade Linien in einer Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz = 0$$

sein mag, liegen sollen; so muss

$$A\cos\alpha_0 + B\cos\beta_0 + C\cos\gamma_0 = 0,$$
$$A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1 = 0,$$
$$A\cos\alpha_2 + B\cos\beta_2 + C\cos\gamma_2 = 0$$

sein, und die Bedingungsgleichung, dass die drei Geraden in einer Ebene liegen, wird erhalten, wenn man aus diesen drei Gleichungen die Grössen A, B, C eliminirt, wodurch man die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\gamma_0(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2)\\ +\cos\gamma_1(\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\beta_2\cos\alpha_0)\\ +\cos\gamma_2(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)\end{array}\right\} = 0$$

erhält, die natürlich auch leicht noch unter anderen Formen dargestellt werden kann.

Die Gleichungen der drei Geraden OO_0, OO_2, OO_3 sind:

$$\frac{x}{\cos\theta_0} = \frac{y}{\cos\omega_0} = \frac{z}{\cos\overline{\omega}_0},$$
$$\frac{x}{\cos\theta_2} = \frac{y}{\cos\omega_2} = \frac{z}{\cos\overline{\omega}_2},$$
$$\frac{x}{\cos\theta_3} = \frac{y}{\cos\omega_3} = \frac{z}{\cos\overline{\omega}_3};$$

und die Bedingungsgleichung, dass diese drei Geraden in einer Ebene liegen, ist also:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\overline{\omega}_0(\cos\theta_2\cos\omega_3 - \cos\omega_2\cos\theta_3)\\ +\cos\overline{\omega}_2(\cos\theta_3\cos\omega_0 - \cos\omega_3\cos\theta_0)\\ +\cos\overline{\omega}_3(\cos\theta_0\cos\omega_2 - \cos\omega_0\cos\theta_2)\end{array}\right\} = 0.$$

Nach den Gleichungen, aus welchen die Gleichungen 9) abgeleitet worden sind, nach 35) und nach 49) ist nun:

$$\cos\theta_0 = \cos R_0,$$

$$\sin c \cos\omega_0 = (1-\cos c)\cos R_0,$$

$$\sin b \sin c \sin A \cos\overline{\omega}_0 = \{\sin c(1-\cos b) - \sin b \cos A(1-\cos c)\}\cos R_0;$$

$$\cos\theta_2 = G_2 \cos b,$$

$$\cos\omega_2 = G_2 \sin b \cos A,$$

$$\cos\overline{\omega}_2 = G_2 \frac{(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A)\cos A}{\cos c \sin A};$$

$$\cos\theta_3 = G_3(1+\cos b+\cos c),$$

$$\cos\omega_3 = G_3(\sin c + \sin b \cos A),$$

$$\cos\overline{\omega}_3 = G_3 \sin b \sin A.$$

Setzen wir der Kürze wegen:

$$P = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A,$$

$$Q = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A;$$

so ist, mit Weglassung der gemeinschaftlichen Factoren $\cos R_0$, G_2, G_3, wie man leicht findet:

$$\cos\theta_2 \cos\omega_3 - \cos\omega_2 \cos\theta_3 = P - \sin b \cos A,$$

$$\cos\theta_3 \cos\omega_0 - \cos\omega_3 \cos\theta_0 = \frac{\cos b - Q}{\sin c},$$

$$\cos\theta_0 \cos\omega_2 - \cos\omega_0 \cos\theta_2 = -\frac{\cos b - Q}{\sin c};$$

und daher die obige Bedingungsgleichung:

$$\cos\overline{\omega}_0 \sin c(P - \sin b \cos A) + (\cos\overline{\omega}_2 - \cos\overline{\omega}_3)(\cos b - Q) = 0.$$

Es ist aber, wie man leicht findet:

$$P - \sin b \cos A = -\frac{(1+\cos c)(\cos a - \cos b)}{\sin c},$$

$$\cos b - Q = -(\cos a - \cos b);$$

also die vorstehende Bedingungsgleichung:

$$(\cos a - \cos b)\{(1+\cos c)\cos\overline{\omega}_0 + \cos\overline{\omega}_2 - \cos\overline{\omega}_3\} = 0.$$

Ferner findet man leicht, immer mit Weglassung der gemeinschaftlichen Factoren:

$$\cos\overline{\omega}_0 = \frac{\sin c^2 - (1-\cos c)(\cos a + \cos b)}{\sin b \sin c^2 \sin A},$$

$$\cos\overline{\omega}_2 - \cos\overline{\omega}_3 = -\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin b \cos c \sin A};$$

und daher obige Bedingungsgleichung:

$$(\cos a - \cos b)\left\{\begin{matrix}(1+\cos c)[\sin c^2 - (1-\cos c)(\cos a + \cos b)]\cos c\\ -(\cos c - \cos a \cos b)\sin c^2\end{matrix}\right\} = 0,$$

welche man nun weiter leicht auf die Form:

$$(\cos a - \cos b)(\cos b - \cos c)(\cos c - \cos a) = 0$$

bringt. Diese Gleichung ist aber nur erfüllt, wenn eine der drei Gleichungen:

$$\cos a = \cos b, \quad \cos b = \cos c, \quad \cos c = \cos a$$

oder:

$$a = b, \quad b = c, \quad c = a$$

erfüllt ist, also nur dann, wenn zwei Seiten der dreiseitigen körperlichen Ecke einander gleich sind; und es werden folglich auch nur dann die drei Geraden OO_0, OO_2, OO_3 in einer Ebene liegen.

§. 10.

Wir wollen jetzt die angulären Entfernungen der Geraden

$$OO_0, \quad OO_1, \quad OO_2, \quad OO_3$$

von einander, nämlich die von den Geraden:

$$OO_0,\ OO_1; \quad OO_0,\ OO_2; \quad OO_0,\ OO_3;$$
$$OO_1,\ OO_2; \quad OO_1,\ OO_3; \quad OO_2,\ OO_3$$

eingeschlossenen Winkel, welche wir der Reihe nach durch

$$D_{01}, \quad D_{02}, \quad D_{03}, \quad D_{12}, \quad D_{13}, \quad D_{23}$$

bezeichnen werden, bestimmen.

I. Es ist:

$$\cos D_{01} = \cos\theta_0 \cos\theta_1 + \cos\omega_0 \cos\omega_1 + \cos\overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_1.$$

Nach den Gleichungen, aus welchen die Gleichungen 9) abgeleitet worden sind, und nach 23) ist:

$$\cos\theta_0 = \cos R_0,$$

$$\sin c \cos\omega_0 = (1-\cos c)\cos R_0,$$

$$\sin b \sin c \sin A \cos\overline{\omega}_0 = \{\sin c\,(1-\cos b) - \sin b \cos A (1-\cos c)\}\cos R_0$$

und:

$$\sin b \sin c \sin A \cos\theta_1 = \{\sin a + \sin(b+c)\}\sin R_1,$$

$$\sin A \cos\omega_1 = (1+\cos A)\sin R_1,$$

$$\cos\overline{\omega}_1 = \sin R_1.$$

Also ist:

$$\sin b \sin c \sin A \cos\theta_0 \cos\theta_1$$
$$= \{\sin a + \sin(b+c)\}\cos R_0 \sin R_1,$$

$$\sin b \sin c \sin A \cos\omega_0 \cos\omega_1$$
$$= \sin b (1-\cos c)(1+\cos A)\cos R_0 \sin R_1,$$

$$\sin b \sin c \sin A \cos\overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_1$$
$$= \{\sin c (1-\cos b) - \sin b \cos A (1-\cos c)\}\cos R_0 \sin R_1;$$

und mittelst sehr leichter Rechnung findet man:

$$\sin a + \sin(b+c) + \sin b (1-\cos c)(1+\cos A)$$
$$+ \sin c (1-\cos b) - \sin b \cos A (1-\cos c) = \sin a + \sin b + \sin c,$$

also:

$$\sin b \sin c \sin A (\cos\theta_0 \cos\theta_1 + \cos\omega_0 \cos\omega_1 + \cos\overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_1)$$
$$= (\sin a + \sin b + \sin c)\cos R_0 \sin R_1,$$

folglich:

$$56) \ldots \cos D_{01} = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\sin b \sin c \sin A} \cos R_0 \sin R_1,$$

oder:

57)

$$\cos D_{01} = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\sqrt{1-\cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}} \cos R_0 \sin R_1,$$

oder nach 25):

58)

$$\cos D_{01} = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\sqrt{\begin{Bmatrix} \sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2 + 2\cos a \sin b \sin c \\ + 2\sin a \cos b \sin c + 2\sin a \sin b \cos c \end{Bmatrix}}} \cos R_0,$$

wo man nun auch noch alle im Obigen gefundenen Ausdrücke von $\cos R_0$ einführen kann.

II. Auf gleiche Weise ist:

$$\cos D_{02} = \cos\theta_0 \cos\theta_2 + \cos\omega_0 \cos\omega_2 + \cos\overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_2.$$

Wie vorher und nach 35) ist:

$$\cos\theta_0 = \cos R_0,$$
$$\sin c \cos\omega_0 = (1-\cos c)\cos R_0,$$
$$\sin b \sin c \sin A \cos\overline{\omega}_0 = \{\sin c(1-\cos b) - \sin b \cos A(1-\cos c)\}\cos R_0$$

und:

$$\cos\theta_2 = G_2 \cos b,$$
$$\cos\omega_2 = G_2 \sin b \cos A,$$
$$\cos c \sin A \cos\overline{\omega}_2 = G_2(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A)\cos A;$$

also:

$$\sin b \sin c \cos c \sin A^2 \cos\theta_0 \cos\theta_2$$
$$= \sin b \cos b \sin c \cos c \sin A^2 . G_2 \cos R_0,$$

$$\sin b \sin c \cos c \sin A^2 \cos\omega_0 \cos\omega_2$$
$$= \sin b^2 \cos c(1-\cos c)\sin A^2 \cos A . G_2 \cos R_0,$$

$$\sin b \sin c \cos c \sin A^2 \cos\overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_2$$
$$= \{\sin c(1-\cos b) - \sin b \cos A(1-\cos c)\}$$
$$\times(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A)\cos A . G_2 \cos R_0.$$

Die Summe

$$\sin b \cos b \sin c \cos c \sin A^2 + \sin b^2 \cos c(1-\cos c)\sin A^2 \cos A$$
$$+\{\sin c(1-\cos b) - \sin b \cos A(1-\cos c)\}(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A)\cos A$$

bringt man nun zuerst leicht auf die folgende Form:

$$\sin b \cos b \sin c \cos c$$
$$+\{\sin b^2 \cos c + \cos b \sin c^2 - (\sin b^2 \cos c^2 + \cos b^2 \sin c^2)\}\cos A$$
$$-\sin b \sin c(\cos b + \cos c - \cos b \cos c)\cos A^2,$$

also auf die Form:

$$\sin b\cos b\sin c\cos c$$

$$+\frac{\{\sin b^2\cos c+\cos b\sin c^2-(\sin b^2\cos c^2+\cos b^2\sin c^2)\}(\cos a-\cos b\cos c)}{\sin b\sin c}$$

$$-\frac{(\cos b+\cos c-\cos b\cos c)(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin b\sin c}.$$

Vereinigt man diese drei Grössen mit einander, so erhält man für den Zähler des betreffenden Bruchs den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&\cos b\cos c(1-\cos b-\cos c)\\
&+\{(\cos b+\cos c)(1+\cos b\cos c)-(\cos b^2+\cos c^2)\}\cos a\\
&-(\cos b+\cos c-\cos b\cos c)\cos a^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ &\cos a\cos b-\cos a^2(\cos b+\cos c)\\
&+\cos b\cos c-\cos b^2(\cos c+\cos a)\\
&+\cos c\cos a-\cos c^2(\cos a+\cos b)\\
&+\cos a\cos b\cos c(\cos a+\cos b+\cos c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ &\cos a\cos b(1-\cos a-\cos b)\\
&+\cos b\cos c(1-\cos b-\cos c)\\
&+\cos c\cos a(1-\cos c-\cos a)\\
&+\cos a\cos b\cos c(\cos a+\cos b+\cos c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ &\cos a\cos b(1-\cos a-\cos b+\cos c^2)\\
&+\cos b\cos c(1-\cos b-\cos c+\cos a^2)\\
&+\cos c\cos a(1-\cos c-\cos a+\cos b^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ &\cos a\cos b\{(1-\cos a)+(1-\cos b)-(1-\cos c^2)\}\\
&+\cos b\cos c\{(1-\cos b)+(1-\cos c)-(1-\cos a^2)\}\\
&+\cos c\cos a\{(1-\cos c)+(1-\cos a)-(1-\cos b^2)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ &\cos a\cos b(2\sin\tfrac{1}{2}a^2+2\sin\tfrac{1}{2}b^2-\sin c^2)\\
&+\cos b\cos c(2\sin\tfrac{1}{2}b^2+2\sin\tfrac{1}{2}c^2-\sin a^2)\\
&+\cos c\cos a(2\sin\tfrac{1}{2}c^2+2\sin\tfrac{1}{2}a^2-\sin b^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ &2\cos a\cos b(\sin\tfrac{1}{2}a^2+\sin\tfrac{1}{2}b^2-2\sin\tfrac{1}{2}c^2\cos\tfrac{1}{2}c^2)\\
&+2\cos b\cos c(\sin\tfrac{1}{2}b^2+\sin\tfrac{1}{2}c^2-2\sin\tfrac{1}{2}a^2\cos\tfrac{1}{2}a^2)\\
&+2\cos c\cos a(\sin\tfrac{1}{2}c^2+\sin\tfrac{1}{2}a^2-2\sin\tfrac{1}{2}b^2\cos\tfrac{1}{2}b^2)
\end{aligned}$$

so dass also, wenn der Kürze wegen:

$$59)\quad \begin{aligned}
N=\ &\cos a\cos b(1-\cos a-\cos b+\cos c^2)\\
&+\cos b\cos c(1-\cos b-\cos c+\cos a^2)\\
&+\cos c\cos a(1-\cos c-\cos a+\cos b^2)
\end{aligned}$$

$$= 2\cos a\cos b(\sin\tfrac{1}{2}a^2+\sin\tfrac{1}{2}b^2-2\sin\tfrac{1}{2}c^2\cos\tfrac{1}{2}c^2)$$
$$+2\cos b\cos c(\sin\tfrac{1}{2}b^2+\sin\tfrac{1}{2}c^2-2\sin\tfrac{1}{2}a^2\cos\tfrac{1}{2}a^2)$$
$$+2\cos c\cos a(\sin\tfrac{1}{2}c^2+\sin\tfrac{1}{2}a^2-2\sin\tfrac{1}{2}b^2\cos\tfrac{1}{2}b^2)$$

gesetzt wird, die obige Summe

$$\frac{N}{\sin b\sin c},$$

also:

$$\sin b\sin c\cos c\sin A^2(\cos\theta_0\cos\theta_2+\cos\omega_0\cos\omega_2+\cos\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_2)$$
$$=\frac{N}{\sin b\sin c}G_2\cos R_0,$$

und folglich:

$$\cos D_{02}=\frac{N}{\sin b^2\sin c^2\sin A^2}\cdot\frac{G_2}{\cos c}\cos R_0,$$

oder:

60)

$$\cos D_{02}=\frac{N}{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}\cdot\frac{G_2}{\cos c}\cos R_0$$

ist, wo nach 42):

$$\frac{G_2}{\cos c}=\pm\frac{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}{\sqrt{M}},$$

und wegen der Zeichen §. 7. nachzusehen ist.

Wenn ich hier, — und in ähnlichen Fällen auch im Folgenden, — Einführungen der früher entwickelten Ausdrücke von

$$\cos R_0 \quad \text{und} \quad \frac{G_2}{\cos c}$$

in die Formel 60) unterlasse, so geschieht dies theils der Kürze wegen, theils um keine Confusion wegen der Vorzeichen zu veranlassen, über welche man rücksichtlich der beiden vorstehenden Grössen nach den im Obigen gegebenen Regeln immer sicher zu urtheilen im Stande sein wird, und die völlig entwickelten Formeln ergeben sich dann in allen Fällen mit grösster Leichtigkeit, deren Aufstellung also füglich dem Leser überlassen werden kann, wobei ich wiederholt bemerke, dass die vorstehenden Bemerkungen auch rücksichtlich der nun noch folgenden Entwickelungen gelten. Der obige Ausdruck von $\frac{G_2}{\cos c}$ ist hier nur deshalb besonders angegeben und hervorgehoben worden, um ersichtlich zu machen, dass

die Formel 60), wie es erforderlich ist, in der That eine völlig symmetrische Gestalt hat.

III. Es ist:

$$\cos D_{03} = \cos\theta_0 \cos\theta_3 + \cos\omega_0 \cos\omega_3 + \cos\overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_3.$$

Wie vorher und nach 49) ist:

$$\cos\theta_0 = \cos R_0,$$
$$\sin c \cos\omega_0 = (1-\cos c)\cos R_0,$$
$$\sin b \sin c \sin A \cos\overline{\omega}_0 = \{\sin c(1-\cos b) - \sin b \cos A(1-\cos c)\}\cos R_0$$

und:

$$\cos\theta_3 = G_3(1+\cos b+\cos c),$$
$$\cos\omega_3 = G_3(\sin c+\sin b\cos A),$$
$$\cos\overline{\omega}_3 = G_3 \sin b \sin A;$$

also:

$$\sin c \cos\theta_0 \cos\theta_3 = \sin c(1+\cos b+\cos c).G_3 \cos R_0,$$
$$\sin c \cos\omega_0 \cos\omega_3 = (1-\cos c)(\sin c+\sin b\cos A).G_3 \cos R_0,$$
$$\sin c \cos\overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_3 = \{\sin c(1-\cos b) - \sin b\cos A(1-\cos c)\}.G_3 \cos R_0.$$

Mittelst der leichtesten Rechnung findet man aber, dass

$$\sin c(1+\cos b+\cos c) + (1-\cos c)(\sin c+\sin b\cos A)$$
$$+\sin c(1-\cos b) - \sin b\cos A(1-\cos c) = 3\sin c$$

ist; also ist:

$$\cos\theta_0\cos\theta_3 + \cos\omega_0\cos\omega_3 + \cos\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_3 = 3G_3\cos R_0,$$

olglich:

61) . . . . $\cos D_{03} = 3G_3 \cos R_0.$

IV. Es ist:

$$\cos D_{12} = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\omega_1\cos\omega_2 + \cos\overline{\omega}_1\cos\overline{\omega}_2.$$

Nach 23) und 35) ist:

$$\sin b \sin c \sin A \cos\theta_1 = \{\sin a + \sin(b+c)\}\sin R_1$$
$$\sin A \cos\omega_1 = (1+\cos A)\sin R_1,$$
$$\cos\overline{\omega}_1 = \sin R_1$$

und:

$$\cos\theta_2 = G_2 \cos b,$$
$$\cos\omega_2 = G_2 \sin b \cos A,$$
$$\cos c \sin A \cos\overline{\omega}_2 = G_2(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A)\cos A;$$

also:

$$\sin b \sin c \cos c \sin A \cos\theta_1 \cos\theta_2$$
$$= \cos b \cos c \{\sin a + \sin(b+c)\} G_2 \sin R_1,$$

$$\sin b \sin c \cos c \sin A \cos\omega_1 \cos\omega_2$$
$$= \sin b^2 \sin c \cos c \cos A(1+\cos A) G_2 \sin R_1,$$

$$\sin b \sin c \cos c \sin A \cos\overline{\omega}_1 \cos\overline{\omega}_2$$
$$= \sin b \sin c \cos A (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A) G_2 \sin R_1.$$

Mittelst leichter Rechnung findet man:

$$\cos b \cos c \{\sin a + \sin(b+c)\} + \sin b^2 \sin c \cos c \cos A(1+\cos A)$$
$$+ \sin b \sin c \cos A(\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A)$$
$$= \sin a \cos b \cos c + \cos a \sin b \cos c + \cos a \cos b \sin c,$$

also:

$$\sin b \sin c \cos c \sin A(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\omega_1 \cos\omega_2 + \cos\overline{\omega}_1 \cos\overline{\omega}_2)$$
$$= (\sin a \cos b \cos c + \cos a \sin b \cos c + \cos a \cos b \sin c) G_2 \sin R_1,$$

folglich:

62)

$$\cos D_{12} = \frac{\sin a \cos b \cos c + \cos a \sin b \cos c + \cos a \cos b \sin c}{\sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}} \cdot \frac{G_2}{\cos c} \sin R_1.$$

V. Es ist:

$$\cos D_{13} = \cos\theta_1 \cos\theta_3 + \cos\omega_1 \cos\omega_3 + \cos\overline{\omega}_1 \cos\overline{\omega}_3.$$

Nach 23) und 49) ist:

$$\sin b \sin c \sin A \cos\theta_1 = \{\sin a + \sin(b+c)\} \sin R_1,$$
$$\sin A \cos\omega_1 = (1+\cos A)\sin R_1.$$
$$\cos\overline{\omega}_1 = \sin R_1$$

und:

$$\cos\theta_3 = G_3(1+\cos b+\cos c),$$
$$\cos\omega_3 = G_3(\sin c + \sin b \cos A),$$
$$\cos\overline{\omega}_3 = G_3 \sin b \sin A;$$

also:

$$\sin b \sin c \sin A \cos\theta_1 \cos\theta_3$$
$$= (1+\cos b+\cos c)\{\sin a+\sin(b+c)\}\, G_3 \sin R_1,$$

$$\sin b \sin c \sin A \cos\omega_1 \cos\omega_3$$
$$= \sin b \sin c\,(1+\cos A)(\sin c+\sin b\cos A)\, G_3 \sin R_1,$$

$$\sin b \sin c \sin A \cos\overline{\omega}_1 \cos\overline{\omega}_3$$
$$= \sin b^2 \sin c \sin A^2 .\, G_3 \sin R_1 .$$

Mittelst leichter Rechnung findet man:

$$\begin{aligned}
&(1+\cos b+\cos c)\{\sin a+\sin(b+c)\}\\
&+\sin b\sin c(1+\cos A)(\sin c+\sin b\cos A)+\sin b^2\sin c\sin A^2\\
&= \sin a(1+\cos b+\cos c)\\
&\quad+\sin b(1+\cos c+\cos a)\\
&\quad+\sin c(1+\cos a+\cos b)\\
&=(\sin a+\sin b+\sin c)(1+\cos a+\cos b+\cos c)\\
&\quad-\sin a\cos a-\sin b\cos b-\sin c\cos c\\
&=(\sin a+\sin b+\sin c)(1+\cos a+\cos b+\cos c)\\
&\quad-\tfrac{1}{2}(\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c),
\end{aligned}$$

und setzt man also:

63)

$$\begin{aligned}
H&=\sin a(1+\cos b+\cos c)+\sin b(1+\cos c+\cos a)+\sin c(1+\cos a+\cos b)\\
&=(\sin a+\sin b+\sin c)(1+\cos a+\cos b+\cos c)-\tfrac{1}{2}(\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c),
\end{aligned}$$

so ist:

$$\sin b\sin c\sin A(\cos\theta_1\cos\theta_3+\cos\omega_1\cos\omega_3+\cos\overline{\omega}_1\cos\overline{\omega}_3)=HG_3\sin R_1,$$

also:

64)

$$\cos D_{13}=\frac{H}{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}\,G_3\sin R_1 .$$

VI. Es ist:

$$\cos D_{23}=\cos\theta_2\cos\theta_3+\cos\omega_2\cos\omega_3+\cos\overline{\omega}_2\cos\overline{\omega}_3,$$

und nach 35) und 49):

$$\begin{aligned}
\cos\theta_2 &= G_2\cos b,\\
\cos\omega_2 &= G_2\sin b\cos A,\\
\cos c\sin A\cos\overline{\omega}_2 &= G_2(\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A)\cos A
\end{aligned}$$

und:

$$\cos\theta_3 = G_3(1+\cos b+\cos c),$$
$$\cos\omega_3 = G_3(\sin c+\sin b\cos A),$$
$$\cos\overline{\omega}_3 = G_3\sin b\sin A;$$

also:

$$\cos c\cos\theta_2\cos\theta_3 = \cos b\cos c(1+\cos b+\cos c)\,.\,G_2G_3,$$

$$\cos c\cos\omega_2\cos\omega_3 = \sin b\cos c\cos A(\sin c+\sin b\cos A)\,.\,G_2G_3,$$

$$\cos c\cos\overline{\omega}_2\cos\overline{\omega}_3 = \sin b\cos A\,(\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A)\,.\,G_2G_3.$$

Mittelst leichter Rechnung findet man:

$$\begin{aligned}&\cos b\cos c(1+\cos b+\cos c)\\&+\sin b\cos c\cos A(\sin c+\sin b\cos A)\\&+\sin b\cos A(\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A)\\&=\cos a\cos b+\cos b\cos c+\cos c\cos a;\end{aligned}$$

also ist:

$$\begin{aligned}&\cos c(\cos\theta_2\cos\theta_3+\cos\omega_2\cos\omega_3+\cos\overline{\omega}_2\cos\overline{\omega}_3)\\&=(\cos a\cos b+\cos b\cos c+\cos c\cos a)\,G_2\,G_3,\end{aligned}$$

folglich:

65) $$\cos D_{23} = (\cos a\cos b+\cos b\cos c+\cos c\cos a)\,.\,\frac{G_2}{\cos c}G_3.$$

§. 11.

Wir wollen, um die im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln übersichtlich und in ihrer einfachsten Form darzustellen, jetzt die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$\Delta = \sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c},$$

$$\mathrm{A} = \pm\sqrt{\begin{aligned}&\sin a^2+\sin b^2+\sin c^2-2(\cos a-\cos b\cos c)\\&\qquad-2(\cos b-\cos c\cos a)\\&\qquad-2(\cos c-\cos a\cos b)\end{aligned}}$$

$$=\pm\sqrt{\begin{aligned}&\sin a^2+\sin b^2+\sin c^2-2\sin b\sin c\cos A\\&\qquad-2\sin c\sin a\cos B\\&\qquad-2\sin a\sin b\cos C,\end{aligned}}$$

$$B=\sqrt{\begin{array}{r}\sin a^2+\sin b^2+\sin c^2+2\cos a\sin b\sin c\\ +2\sin a\cos b\sin c\\ +2\sin a\sin b\cos c\end{array}}$$

$$C=\pm\sqrt{\begin{array}{l}\cos a^2\cos b^2+\cos b^2\cos c^2+\cos c^2\cos a^2\\ -2\cos a\cos b\cos c(\cos a^2+\cos b^2+\cos c^2)\\ +3\cos a^2\cos b^2\cos c^2,\end{array}}$$

$$D=\pm\sqrt{3+2(\cos a+\cos b+\cos c)},$$

$$E=\sin a+\sin b+\sin c,$$

$$\begin{aligned}F=&\quad\cos a\cos b(1-\cos a-\cos b+\cos c^2)\\ &+\cos b\cos c(1-\cos b-\cos c+\cos a^2)\\ &+\cos c\cos a(1-\cos c-\cos a+\cos b^2)\\ =&\quad 2\cos a\cos b(\sin\tfrac{1}{2}a^2+\sin\tfrac{1}{2}b^2-2\sin\tfrac{1}{2}c^2\cos\tfrac{1}{2}c^2)\\ &+2\cos b\cos c(\sin\tfrac{1}{2}b^2+\sin\tfrac{1}{2}c^2-2\sin\tfrac{1}{2}a^2\cos\tfrac{1}{2}a^2)\\ &+2\cos c\cos a(\sin\tfrac{1}{2}c^2+\sin\tfrac{1}{2}a^2-2\sin\tfrac{1}{2}b^2\cos\tfrac{1}{2}c^2),\end{aligned}$$

$$G=\sin a\cos b\cos c+\cos a\sin b\cos c+\cos a\cos b\sin c,$$

$$\begin{aligned}H=&\quad\sin a(1+\cos b+\cos c)\\ &+\sin b(1+\cos c+\cos a)\\ &+\sin c(1+\cos a+\cos b)\\ =&\quad(\sin a+\sin b+\sin c)(1+\cos a+\cos b+\cos c)\\ &-\tfrac{1}{2}(\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c),\end{aligned}$$

$$J=\cos a\cos b+\cos b\cos c+\cos c\cos a;$$

wo in den Ausdrücken von A, C, D die Zeichen nach den respective in §. 5., §. 7., §. 8. gegebenen Regeln zu bestimmen sind, und nach der früheren Bezeichnung:

$$C=\pm\sqrt{M},\quad F=\pm N,\quad H=H$$

ist.

Hiernach ist nun nach den früher gefundenen Formeln:

$$\cos R_0=\frac{\Delta}{A},\quad \sin R_1=\frac{\Delta}{B},\quad \frac{G_2}{\cos c}=\frac{\Delta}{C},\quad G_3=\frac{1}{D};$$

also nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\cos D_{01} = \frac{\mathrm{E}}{\Delta} \cdot \frac{\Delta}{\mathrm{A}} \cdot \frac{\Delta}{\mathrm{B}},$$

$$\cos D_{02} = \frac{\mathrm{F}}{\Delta^2} \cdot \frac{\Delta}{\mathrm{C}} \cdot \frac{\Delta}{\mathrm{A}},$$

$$\cos D_{03} = 3 \cdot \frac{1}{\mathrm{D}} \cdot \frac{\Delta}{\mathrm{A}},$$

$$\cos D_{12} = \frac{\mathrm{G}}{\Delta} \cdot \frac{\Delta}{\mathrm{C}} \cdot \frac{\Delta}{\mathrm{B}},$$

$$\cos D_{13} = \frac{\mathrm{H}}{\Delta} \cdot \frac{1}{\mathrm{D}} \cdot \frac{\Delta}{\mathrm{B}},$$

$$\cos D_{23} = \mathrm{J} \cdot \frac{\Delta}{\mathrm{C}} \cdot \frac{1}{\mathrm{D}};$$

folglich:

$$66) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos D_{01} = \dfrac{\mathrm{E}\Delta}{\mathrm{AB}}, \\[2ex] \cos D_{02} = \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{AC}}, \\[2ex] \cos D_{03} = \dfrac{3\Delta}{\mathrm{AD}}, \\[2ex] \cos D_{12} = \dfrac{\mathrm{G}\Delta}{\mathrm{BC}}, \\[2ex] \cos D_{13} = \dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{BD}}, \\[2ex] \cos D_{23} = \dfrac{\mathrm{J}\Delta}{\mathrm{CD}}. \end{array} \right.$$

XLVII.

Ueber einige auf elementarem Wege ausführbare Quadraturen.

Von

Herrn *Heinrich Gretschel*,

Lehrer der Mathematik an der Handelslehranstalt in Leipzig.

Das von Viviani gestellte sogenannte Florentiner Problem hat Veranlassung gegeben zur Auffindung einer grösseren Anzahl von Flächen, die im Sinne der Alten quadrirbar sind. Dass sich die betreffenden Resultate auch ohne Anwendung der Symbole der Integralrechnung auf rein geometrischem Wege ableiten lassen, kann nicht überraschen; vielleicht aber ist es nicht ohne Interesse zu wissen, dass einige dieser Sätze sich gewinnen lassen durch Betrachtungen, wie sie in der elementaren Stereometrie bei der Entwickelung der Formel für die Kugelfläche und in der elementaren Mechanik bei der Lehre vom Schwerpunkte üblich sind. Diese Bemerkung mag die Mittheilung des Nachstehenden entschuldigen.

Wir machen später hauptsächlich von folgenden zwei bekannten Sätzen Gebrauch:

1) Das zwischen zwei Meridianen gelegene Stück einer Kugelzone ist gleich dem Aequatorbogen, welcher zwischen denselben Meridianen liegt, multiplicirt mit der Höhe der Zone.

2) Das Moment eines beliebigen Kreisbogens in Bezug auf einen Durchmesser ist demnach gleich der Projection des Bogens multiplicirt mit dem Halbmesser.

I.

Auf einer Kugelfläche bewege sich vom Punkte A des Aequators aus ein Punkt P so, dass seine Länge

AD stets das $k$fache seiner Breite PD ist (Taf. VI. Fig. 10.). Der Punkt P beschreibt eine sphärische Curve und fällt für einen gewissen Meridian BC mit dem Pole C zusammen. Wir wollen diesen Meridian kurz den letzten Meridian nennen.

3) Derjenige Theil der Kugelfläche, welcher zwischen der sphärischen Curve, dem Aequator und dem letzten Meridiane liegt, ist das $k$fache vom Quadrate des Kugelhalbmessers OA.

Es seien P und Q ein Paar Punkte der Curve, deren Entfernung verschwindend klein ist, CD und CE seien ihre Meridiane, PR sei das zwischen beiden gelegene Stück des durch P gehenden Parallelkreises, N sei der Halbirungspunkt von RQ, NM das von N aus auf die Ebene des Aequators gefällte Perpendikel. Dann ist $DEQP$ ein Element der fraglichen Fläche. Wir denken uns dasselbe als eine Zone von der Höhe MN und können es dann (nach dem ersten der Eingangs citirten Sätze) durch das Produkt $DE.MN$ ausdrücken. Nun ist aber nach der Voraussetzung:

$$AE = k.QE, \quad AD = k.PD,$$

folglich:

$$AE - AD = DE = k(QE - PD) = k.QR.$$

Mithin ist unser Flächenelement $= k.QR.MN$ und die ganze Fläche ist die $k$fache Summe aller Produkte $QR.MN$. Denkt man sich nun alle Meridiane auf den ersten Meridian AC zurückgedreht, so bilden die sämmtlichen Bogenelemente QR zusammen den Meridianquadranten AC und die Summe der Produkte $QR.MN$ ist das Moment dieses Quadranten in Bezug auf den Halbmesser OA, d. h. nach dem zweiten Hilfssatze $= OA^2$. Sonach ist

$$\text{Fläche } APCB = k.OA^2.$$

Dass es statthaft ist, statt des Elementes $DEQP$ das Produkt $DE.MN$ zu setzen, erkennt man daraus, dass jedenfalls, wenn QS ein Parallelkreisbogen ist,

$$SQED > DE.MN > PRED$$

ist, sonach auch

$$\Sigma SQED > \Sigma DE.MN > \Sigma PRED.$$

Der Unterschied der beiden äusseren Summen, sowie auch der Unterschied zwischen einer jeden von ihnen und der gesuchten Fläche, kann aber, wenn man die Punkte P und Q immer

dichter an einander rücken lässt, beliebig klein gemacht werden; mithin giebt die mittlere Summe die gesuchte Fläche richtig an.

4) Ist ins Besondere die Länge gleich der Breite, so gelten folgende Sätze:

a) Die Projektion der sphärischen Curve auf die Ebene des Aequators ist ein Kreis mit dem Durchmesser OA.

Denn ist (Taf. VI. Fig. 11.) P ein Curvenpunkt, M seine Projektion auf die Aequatorebene, und zieht man noch den Halbmesser OP, sowie die Linien OM und MA, so ist $\angle AOM = \angle POM$ (d. i. Länge = Breite), $OA = OP$ und $OM = OM$, mithin $\Delta AOM \cong \Delta POM$, folglich $\angle OMA = \angle OMP = 90^0$, M beschreibt also einen Kreis mit dem Durchmesser OA.

b) Die Mantelfläche des Cylinders, welcher die sphärische Curve auf den Aequatorquadranten projicirt, ist dem Quadrate des Kugelhalbmessers gleich.

Denn sind (Taf. VI. Fig. 10.) P und Q Nachbarpunkte der sphärischen Curve, K und L ihre Projektionen, so ist das Element der Cylinderfläche $= KL.MN$, es ist aber $KL = DE$, weil KL in dem Kreise mit dem Durchmesser OA ein Bogen über dem Peripheriewinkel DOE, DE dagegen in dem Kreise mit dem Halbmesser OA ein Bogen über dem Centriwinkel DOE ist; ferner ist auch $DE = QR$, mithin das Flächenelement $= QR.MN$. Die Fläche ist sonach gleich $\Sigma QR.MN$, diese Summe ist aber nach den Entwickelungen unter 3) $= OA^2$.

c) Die Projektion der sphärischen Curve auf die Ebene des ersten Meridians ist eine Parabel mit dem Scheitel A, deren Parameter gleich OA ist.

Denn ist in Taf. VI. Fig. 11. Q die Projektion von P, sind MS und QS rechtwinklig zu OA, so ist $AM^2 = AS.AO$; aber da wegen $\Delta OMA \cong \Delta OMP$ auch $AM = MP = SQ$ ist, so ist auch

$$SQ^2 = AS.AO,$$

womit die Richtigkeit der Behauptung bewiesen ist.

d) Die Projektion der sphärischen Curve auf die Ebene des Meridians von 90^0 Länge ist der Quadrant einer Schleifenlinie, deren Knoten der Mittelpunkt O ist und deren Punkte durch fol-

gende Construktion gefunden werden (Taf. VI. Fig. 11. und Fig. 12.). Auf der Achse OC nehme man einen willkürlichen Punkt N an und errichte in demselben ein Perpendikel auf OC, welches bis zum Durchschnitte F mit dem Kreise verlängert wird, der um O mit dem Halbmesser OC geschlagen ist. Man verbinde dann O mit F, ziehe NG senkrecht auf OF und mache $NR = NG$; dann ist R ein Punkt der Schleifenlinie*).

Es sei N in Taf. VI. Fig. 11. der Punkt von OC, in welchem das von Q aus gefällte Perpendikel QN auftrifft. Um die Richtigkeit der beschriebenen Construktion darzuthun, hat man dann nachzuweisen, dass $MS = PQ = NG$ ist. Nun ist $\Delta OMP \cong \Delta FNO$, denn beide sind rechtwinklig, und es ist $OP = OF$, $MP = NO$; mithin ist $OM = FN$ und $\angle MOP = \angle OFN$. Weil nun $\angle MOP = \angle SOM$ (Breite = Länge), so ist auch $\angle SOM = \angle OFN$. Die beiden Dreiecke SOM und GFN sind demnach auch congruent; denn beide sind rechtwinklig, die Hypotenusen OM und FN sind gleich und ausserdem ist $\angle SOM = \angle OFN$ oder $= \angle GFN$. Sonach sind auch die Gegenkatheten dieser Winkel gleich, d. h. $MS = NG$, w. z. b. w.

Aus dem Vorkommen dieser Curve als Projektion der sphärischen Linie erkennt man, dass der grösste Werth, den NR haben kann, $= \frac{1}{2} OA$ ist; dann ist nämlich in Taf. VI. Fig. 11. S der Halbirungspunkt von OA und SM ein Halbmesser des Kreises OMA. Weil in diesem Falle $OM = \frac{1}{2} OA . \sqrt{2}$ ist, so ist auch MP und mithin $ON = \frac{1}{2} OA . \sqrt{2}$; die Länge des Punktes P ist dann 45°.

e) Die Fläche des über OC stehenden Quadranten dieser Schleifenlinie beträgt $\frac{1}{3}$ vom Quadrate des Halbmessers OA.

Da die Fläche der im ersten Meridian liegenden Parabel $= \frac{2}{3} OA^2$ ist, so haben wir, um unsere Behauptung zu rechtfertigen, nur darzuthun, dass die Flächen der Parabel und der Schleifenlinie zusammen gleich dem Quadrate des Halbmessers OA sind.

Um dieses nachzuweisen, theilen wir den Aequatorquadranten AB in unzählig viele gleich lange Theile. D und E (Taf VI. Fig. 13.) seien ein Paar Theilpunkte, welche so liegen, dass $AD = BE$ ist; sind P und Q die auf den Meridianen CD und CE gelegenen Punkte der sphärischen Curve, so ist auch $DP = CQ$. Tragen wir nun auf CD den Punkt P' so ab, dass PP' gleich einem der Theile auf dem Aequatorquadranten AB ist, so ist DP' die Breite

*) In Taf. VI. Fig. 12. fehlt durch ein Versehen der Buchstabe R zwischen F und N in FN. G.

desjenigen Curvenpunktes, der auf dem Meridiane liegt, welcher durch den zunächst auf D in der Richtung nach B hin folgenden Theilpunkt geht. Ist weiter N der Halbirungspunkt von PP', NM senkrecht auf der Aequatorebene, MS senkrecht auf der Ebene des ersten Meridians, $P'L$ parallel NM, PL parallel DO, so ist leicht einzusehen, dass $P'L.NN'$ oder $P'L.MS$ die Grösse eines zu OB parallelen, in der Figur schraffirten Flächenstreifens μ der Schleifenlinie in dem Quadranten BOC ist. Sonach ist $\Sigma P'L.MS$ die ganze Fläche der Schleifenlinie, wo das Zeichen Σ bedeutet, dass man auf allen Meridianen, die durch die verschiedenen Theilpunkte von AB zu legen sind, die angegebenen Operationen zu vollziehen und die Resultate zu addiren hat.

Tragen wir weiter auf dem Meridiane CE das Stück $QQ' = PP'$ ab, ist R der Halbirungspunkt von QQ', RU senkrecht auf der Aequatorebene, UT senkrecht auf OB, QK parallel RU, $Q'K$ parallel EO, so ist $QK.UT$ ein der Achse OA paralleler, in der Figur gleichfalls schraffirter Flächenstreifen ν der Parabel in COA, und die ganze Parabelfläche ist $\Sigma QK.UT$. Es ist also jetzt die Gleichung zu beweisen:

$$\Sigma(P'L.MS + QK.UT) = OA^2.$$

Nun ist zunächst $\triangle P'LP \sim \triangle OMN \sim \triangle OSM$, folglich $P'L : PL = OS : MS$, folglich $P'L.MS = PL.OS$. — Ferner ist $\triangle Q'KQ \cong \triangle P'LP$, weil beide dieselben Winkel und auch gleiche Hypotenusen haben, mithin ist $QK = PL$; endlich ist noch, wenn man RJ senkrecht auf OC zieht, $\triangle ORJ \cong \triangle ONM$, also $RJ = MN$, mithin auch $OU = MN$. Wäre nun N ein Punkt der sphärischen Curve, also M ein Punkt der unter b) betrachteten, über dem Durchmesser construirten Kreislinie, so würde (wie unter c) bewiesen ist) $AM = MN$, also auch $AM = OU$ sein. Da nun ausserdem dann $\angle SMA = \angle DOA = \angle JOU$ ist, so würde $\triangle TOU \cong \triangle SMA$, also $TU = SA$ sein. Man kann also jedenfalls setzen $TU = SA + \varDelta$, wo $\varDelta$ eine Grösse ist, die durch immer grössere Annäherung von P und P', Q und Q' kleiner gemacht werden kann, als jede angebbare Zahl. Demnach ist unsere zu untersuchende Summe in der Form darstellbar:

$$\Sigma[PL.OS + PL(SA+\varDelta)] = \Sigma PL.OA + \Sigma PL.\varDelta = OA\Sigma PL + \Sigma PL.\varDelta.$$

Es ist aber $\Sigma PL = OA$; ist ferner $\varDelta'$ das grösste $\varDelta$, so ist jedenfalls $\Sigma PL.\varDelta < \varDelta'\Sigma PL$, d. i. $< \varDelta'.OA$. Da aber jedes $\varDelta$ kleiner als jede angebbare Grösse gemacht werden kann, so kann man das Glied $\Sigma PL.\varDelta$ ganz weglassen und es ist also:

$$\Sigma(PL.MS + QK.UT) = OA^2,$$

w. z. b. w.

II.

Vom Punkte A des Aequators aus bewege sich ein Punkt P derart auf einer Kugelfläche, dass der Sinus der Breite immer der $k$te Theil von seiner Länge ist, oder in Taf. VI. Fig. 11. $PM = \frac{1}{k} . AD$. Wenn P nach dem Pole C gelangt, so sei die Länge $= \angle BOA$; der Meridian BC heisst der letzte Meridian, der Aequatorbogen AB ist das $k$fache des Kugelhalbmessers.

5) Derjenige Theil der Kugelfläche, welcher zwischen dieser sphärischen Curve, dem Aequator und dem letzten Meridiane liegt, ist dem $\frac{1}{2}k$fachen Quadrate des Kugelhalbmessers gleich.

Denn theilen wir den Aequatorbogen AB in unzählig viele gleich grosse Theile, deren einer DE ist, ist P der auf dem Meridiane CD, Q der auf dem Meridiane CE gelegene Curvenpunkt, sind PM und QN die von P und Q auf die Aequatorebene gefällten Perpendikel, so ist $DE . QN > PQED > DE . PM$; bezeichnet man daher die gesuchte Fläche mit F, so ist:

$$\Sigma DE . QN > F > \Sigma DE . PM.$$

Nun ist aber $QN = \frac{1}{k} AE$, $PM = \frac{1}{k} AD$, mithin geht unsere Ungleichung in die folgende über:

$$\frac{1}{k} \Sigma DE . AE > F > \frac{1}{k} \Sigma DE . AD.$$

Zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Länge AB haben, trägt auf der einen AD und DE ab, errichtet in D und E Perpendikel, welche die Hypotenuse in D' und E' schneiden, so ist, wegen $AD = DD'$, $AE = EE'$, $DE . AE > DEE'D' > DE . AD$ und die gemeinsame Grenze, der sich die Summen

$$\Sigma DE . AE \quad \text{und} \quad \Sigma DE . AD$$

nähern, ist die Fläche des Dreieckes $= \frac{1}{2} AB^2$. Mithin ist unsere gesuchte Fläche

$$F = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} AB^2,$$

d. i. wegen $AB = k . OA$:

$$F = \tfrac{1}{2} k . OA^2,$$

w. z. b. w.

III.

Auf der Oberfläche einer Kugel bewege sich vom Punkte A des Aequators aus ein Punkt P derart, dass der Sinus seiner Breite das $k$fache vom Sinus der Länge ist. Wir nennen wieder denjenigen Meridian, in welchem die Breite ihren höchsten Werth erreicht, den letzten Meridian. Ist $k<1$, so ist dieses der Meridian von 90°, für diesen ist der Sinus der Länge $=1$, der der Breite also $=k$; ist aber $k>1$, so ist der letzte Meridian derjenige, dessen Länge den Sinus $=\frac{1}{k}$ hat, und in welchem der Punkt P die Breite 90° erreicht.

6) Der Theil der Kugelfläche, welcher zwischen der angegebenen sphärischen Curve, dem Aequator und dem letzten Meridiane liegt, ist das $k$fache vom Quadrate des Kugelhalbmessers, wenn $k<1$ ist, dagegen das $(k-\sqrt{k^2-1})$fache desselben Quadrates, wenn $k>1$ ist.

Wir denken uns (Taf. VI. Fig. 10.) DE halbirt, fällen von dem Halbirungspunkte auf OA ein Perpendikel p, legen durch den Halbirungspunkt den Meridian, welcher die sphärische Curve in einem zwischen P und Q liegenden Punkte X (in der Figur nicht angegeben) schneidet, und fällen von X auf die Aequatorebene das Perpendikel p', dann kann man das Flächenelement $DEQP$ $=DE.p'$ setzen. Es ist aber $p'=k.p$, mithin das Flächenelement $=k.DE.p$ und die ganze Fläche

$$F=k\Sigma DE.p.$$

$DE.p$ ist aber das Moment des Bogenelements DE in Bezug auf OA, mithin ist $\Sigma DE.p$ gleich dem Halbmesser OA multiplicirt mit der Projektion des Bogens von A bis zum letzten Meridiane auf OA.

Wenn $k<1$ ist, so hat der letzte Meridian die Länge 90° und die Projektion des Aequatorbogens ist OA, mithin ist in diesem Falle

$$F=k.OA^2.$$

Ist aber $k>1$, so ist für den letzten Meridian der Sinus der Länge $=\frac{1}{k}$, mithin die Projektion des Aequatorbogens

$$= \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{k} . OA,$$

und also:

$$F = (k - \sqrt{k^2 - 1}) . OA^2,$$

womit unsere Behauptungen gerechtfertigt sind.

XLVIII.

Ueber die Behandlung des irreducibeln Falles der cubischen Gleichungen bei'm mathematischen Unterrichte.

Von

Herrn *Heinrich Gretschel*,

Lehrer der Mathematik an der Handelslehranstalt in Leipzig.

Um die drei reellen Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x^3 - px + q = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

für den Fall, dass

$$\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$$

ist, zu finden, geht man gewöhnlich entweder von der goniometrischen Formel

$$\sin^3\varphi - \tfrac{3}{4}\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi = 0$$

aus und kümmert sich nicht um die Cardanische Formel, oder man nimmt letztere zum Ausgangspunkte, bringt die Grössen unter der Cubikwurzel auf die kanonische Form complexer Grössen,

$$r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi),$$

und zieht dann mit Hilfe des Moivre'schen Satzes die Cubikwurzel aus. Der Moivre'sche Satz wird indessen nicht immer in den Elementen der Arithmetik behandelt. Um auch in solchem Falle von der Cardanischen Formel ausgehend zu den bekannten Lösungen des casus irreducibilis zu gelangen, kann man folgenden Weg einschlagen.

Die Cardanische Formel giebt für die Wurzeln der cubischen Gleichung (1) die drei Werthe

$$(2) \qquad x_1 = u+v, \quad x_2 = -\tfrac{1}{2}(u+v) + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}(u-v),$$
$$x_3 = -\tfrac{1}{2}(u+v) - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}(u-v),$$

wobei u und v die Werthe haben:

(3)

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}}.$$

Versucht man nun zwei reelle Grössen a und b so zu bestimmen, dass

$$a + bi = u \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

ist, so ergeben sich durch Erhebung der beiden Seiten dieser hypothetischen Gleichung auf die dritte Potenz die zwei neuen Gleichungen:

$$a^3 - 3ab^2 = -\frac{q}{2}, \quad 3a^2b - b^3 = \sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}} \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Da man zu denselben zwei Gleichungen auch gelangt, wenn man die Gleichung

$$a - bi = v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)^*$$

derselben Behandlung unterwirft, so erkennt man, dass wenn es zwei reelle Grössen a und b giebt, welche einer der beiden Gleichungen (4) und (4)* genügen, dieselben Grössen auch die andere Gleichung befriedigen. Die wirkliche Ermittelung von ein Paar solchen Werthen a und b gelingt aber auf folgende Art.

Die Multiplikation der Gleichungen (4) und (4)* ergiebt das einfache Resultat

$$a^2 + b^2 = \frac{p}{3}.$$

Diese Gleichung legt den Gedanken nahe, dem a und b die Werthe beizulegen:

$$a = \sqrt{\frac{p}{3}} . \sin\varphi, \quad b = \sqrt{\frac{p}{3}} . \cos\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Durch Einschaltung derselben in die erste der Gleichungen (5) geht diese über in

$$3 \sin\varphi \cos^2\varphi - \sin^3\varphi = \sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}};$$

die linke Seite ist aber, wie man aus der Goniometrie weiss, $\sin 3\varphi$. Es wird also φ und damit a und b bestimmt durch die Gleichung:

$$\sin 3\varphi = \sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Andrerseits erhält man durch Einsetzung der Werthe (4) und (4)* für u und v in die Gleichungen (2) die einfacheren Formeln:

$$x_1 = 2a, \quad x_2 = -a + b\sqrt{3}, \quad x_3 = -(a + b\sqrt{3});$$

setzt man jetzt in diese Formeln statt a und b ihre Werthe (6), so entstehen die Gleichungen:

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} . \sin\varphi, \quad x_2 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\sin\varphi\right),$$

$$x_3 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\varphi\right),$$

welche wegen

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^0, \quad \tfrac{1}{2} = \cos 60^0$$

identisch sind mit

$$(8)$$

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} . \sin\varphi, \quad x_2 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} . \sin(60^0 - \varphi), \quad x_3 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} . \sin(60^0 + \varphi)$$

Die Gleichungen (7) und (8) enthalten die gewünschte Lösung.

XLIX.

Unter welchen Verhältnissen ist es für die Staatskasse vortheilhaft, ein deprimirtes Papiergeld oder Banknoten gegen Verzinsung einzuziehen.

Von

Herrn Grafen *L. v. Pfeil*

auf Hausdorf bei Neurode in Schlesien.

---

§. 1.

Es ist ein durch die National-Oekonomie festgestellter Satz, dass der Preis des cirkulirenden Mediums, des Geldes (nicht des Kapitals), und des Papiergeldes insbesondere, von dem Verhältniss abhängt, in welchem dasselbe zu dem Bedürfniss der Cirkulation steht. Steigt die Masse des cirkulirenden Mediums auf das Zweifache, das Zehnfache, so sinkt sein Preis entsprechend auf die Hälfte, auf ein Zehntheil. Die Werthveränderung lässt sich an einer verhältnissmässigen Preissteigerung aller Waaren, bei längeren Perioden besonders deutlich an einer Preissteigerung des Getreides und der Arbeitslöhne erkennen.

Dieses Sachverhältniss, welches bei den edlen Metallen nur in der Weltcirkulation seinen Ausdruck erhält, findet ihn beim Papiergeld eines einzelnen Staates in derjenigen Summe, die er ohne Depression in der Cirkulation ertragen kann, so wie in der Depression des Papiergeldes, wenn diese natürliche Grenze überschritten wird. Betrüge z. B. das Cirkulationsbedürfniss eines Staates 100 Millionen, so wird derselbe 50 Millionen Metall- und 50 Millionen Papiergeld, oder 10 Millionen Metall- und 90 Millionen Papiergeld, oder endlich 100 Millionen Papiergeld allein ohne Depression ertragen. Dagegen werden $133\frac{1}{3}$ Millionen Papiergeld nur 75 % im Werth gegen Silber stehen, 200 Millionen Papier-

geld nur 50%. Die Summe also des ausgegebenen Papiergeldes wird in dem einen wie in dem anderen Falle nur 100 Millionen Silber werth sein *).

Eine solche Depression trifft das ganze Staatseinkommen, in so weit dieses in Papiergeld gezahlt werden darf, und sein Nachtheil äussert sich theils in einer verhältnissmässigen Steigerung der Preise aller Anschaffungen, welche für das Staatsbedürfniss nöthig sind, theils in den vermehrten Aufwendungen für die Verzinsung der Staatsschuld, so wie dem erhöhten Preise aller Staatsanleihen, endlich in einer völlig ungerechtfertigten Erniedrigung aller Gehalte.

Grösser vielleicht als diese Nachtheile sind noch die gefährlichen Erschütterungen im Gewerbebetriebe und in den Besitzverhältnissen, so wie im Kredit aller Landesbewohner.

Wie gross dürfen die Opfer sein, welche der Staat ohne Nachtheil für seine Finanzen bringen darf, um den Werth des cirkulirenden Papiergeldes zu erhöhen und seinen Cours auf Pari zu erhalten?

Die Frage soll nur allein in Beziehung auf das fiskalische Interesse mit gänzlichem Ausschluss der weit wichtigeren Privatinteressen beantwortet werden.

§. 2.

Die Summe des cirkulirenden Papiergeldes in einem Staate sei c. Der Betrag desselben überschreite den Bedarf in dem Verhältniss wie q zu 100, so wird der Cours q und der Werth gegen Silber $\frac{100}{q}$ sein. Um nämlich 100 Fl. in Silber oder deren Werth in Waaren zu kaufen, wird man eine grössere Summe, q Gulden in Papier aufwenden müssen. Endlich wird das sämmtliche Papiergeld im Staate einem Silberwerthe S entsprechen, und dieser wird sein: $S = c \times \frac{100}{q}$.

Soll das Papiergeld auf den Paricours gebracht werden, so darf in der Cirkulation nur verbleiben: $c \times \frac{100}{q} = S$. Es muss

---

*) Nebenius: „Der öffentliche Kredit.“ 2. Aufl. Thl. I. Cap. 3. §§. 9 u. 10. — Auf Währung berechnet, werden 100 Fl. Silber $133\frac{1}{3}$ Fl., resp. 200 Fl. Papier kosten.

also aus dem Verkehr gezogen werden: $c - S = c - c \times \frac{100}{q}$ $= c \times (1 - \frac{100}{q})$.

Es betrage das Einkommen desselben Staates, in so weit es in Papiergeld bezahlt werden darf, eine Summe, m, so wird diese Summe durch die Depression der Valuta herabgedrückt werden auf $m \times \frac{100}{q}$, und der jährliche Verlust für die Staatskasse wird sein: $m - m \times \frac{100}{q} = m \times (1 - \frac{100}{q})$.

Zieht jedoch der Staat, um den Cours wieder auf Pari zu heben, die obige Summe $c \times (1 - \frac{100}{q})$ aus dem Verkehr und verzinst sie mit p Procent, so ist dafür die jährliche Ausgabe gleich dem Betrage der Interessen für diese Summe, mithin $= c \times (1 - \frac{100}{q}) \times \frac{p}{100}$. Endlich ist der Gewinn für die Staatskasse gleich dem Unterschied des Verlustes, den sie durch die Depression der Valuta erlitt, und der Ausgabe, die sie für die Verzinsung des eingezogenen Papiergeldes aufwenden muss. Der Erstere war $m \times (1 - \frac{100}{q})$, der Letztere $c \times \frac{p}{100} \times (1 - \frac{100}{q})$. Mithin ist der Gewinn für die Staatskasse $(m - c \times \frac{p}{100}) \times (1 - \frac{100}{q})$. Es bleibt also ein Gewinn für die Staatskasse, so lange m grösser ist als $c \times \frac{p}{100}$.

Das Ergebniss dieser Erörterung ist in Worten Folgendes:

> Die Staatskasse wird Gewinn haben, wenn sie Papiergeld gegen Verzinsung einzieht, so lange der Betrag einer Verzinsung des ganzen vorhandenen Papiergeldes kleiner bleiben würde als die ganze Staatseinnahme.

Zahlenbeispiel. Das Einkommen eines Staates, so weit es in Papiergeld gezahlt werden darf, betrage 200 Millionen, das Cirkulationsbedürfniss desselben Staates sei 250 Millionen Silber. Das cirkulirende Papiergeld betrage aber 500 Millionen, so wird letzteres zu 200 im Course gegen Silber stehen. Die Staatskasse verliert also durch die Depression des Courses jährlich die Hälfte ihres Einkommens mit 100 Millionen Silber. Zöge der Staat dagegen 250 Millionen Papiergeld ein, und verzinste dieselben mit

8%, so würde er jährlich 20 Millionen zu diesem Zwecke aufwenden müssen. Gegen diese Aufwendung würde sich aber sein Einkommen um 100 Millionen Silber vermehren, bezüglich auf 200 Millionen erhalten. Der Staat würde also durch die Operation 80 Millionen Silber jährlich gewinnen.

Die Richtigkeit des obigen Satzes gilt auch bei einer nur unvollständigen Einziehung von Papiergeld, wie folgende Erörterung zeigt.

Angenommen, es würde nicht, wie es zur Herstellung des Paricourses nothwendig ist, der Betrag $c \times (1 - \frac{100}{q})$ gegen Verzinsung eingezogen, sondern ein geringerer, $c \times (1 - \frac{100}{dq})$, wo d einen ächten Bruch bedeutet, so dass $dq < q$, $\frac{100}{dq} > \frac{100}{q}$ und $c \times (1 - \frac{100}{dq}) < c \times (1 - \frac{100}{q})$ ist, so würde im Verkehr bleiben $c - c \times (1 - \frac{100}{dq}) = c \times \frac{100}{dq}$. Dieser Betrag würde, wie oben dargethan worden ist, den Silberwerth des ganzen Circulationsbedürfnisses, also den Werth von S haben,

Der Betrag des Staatseinkommens war m. Es wurde dasselbe vor der Einziehung von Papiergeld auf den Silberwerth $m \times \frac{100}{q}$ deprimirt, wie gezeigt worden. Nach der Einziehung eines Theils des Papiergeldes wird die Valuta in geringerem Maasse deprimirt werden und das Staatseinkommen sich nur verringern auf $m \times \frac{100}{dq}$. Der jährliche Verlust für die Staatskasse wird also nur bleiben $m - m \times \frac{100}{dq} = m \times (1 - \frac{100}{dq})$.

Auch in diesem Falle wird die Staatskasse Vortheil haben, wenn sie den eingezogenen Betrag des Papiergeldes mit p Procent verzinst, also für diese Verzinsung $c \times (1 - \frac{100}{dq}) \times \frac{p}{100}$ aufwendet, so lange $c \times (1 - \frac{100}{dq}) \times \frac{p}{100}$ kleiner bleibt als $m \times (1 - \frac{100}{dq})$ oder so lange $c \times \frac{p}{100} < m$, das heisst, so lange der Betrag der Verzinsung des ganzen ausgegebenen Papiergeldes kleiner bleiben würde als das ganze Staatseinkommen. Der Gewinn für die Staatskasse, auf Banknoten berechnet, ist ebenfalls

$$c = m \times (1 - \frac{100}{dq}) - c \times (1 - \frac{100}{dq}) \times \frac{p}{100} = (m - c \times \frac{p}{100}) \times (1 - \frac{100}{dq}).$$

Also auch für unvollständige Einziehung von Papiergeld gegen Verzinsung gilt der obige gesperrte Satz in seiner ganzen Ausdehnung als richtig.

Zahlenbeispiel. Das Einkommen eines Staates sei, wie in dem früheren Beispiele, so weit es in Papiergeld gezahlt werden darf, 200 Millionen. Das Cirkulationsbedürfniss desselben Staates sei 250 Millionen. Das cirkulirende Papiergeld betrage aber 500 Millionen, so wird letzteres zu 200 im Course gegen Silber stehen. Die Staatskasse verlor also durch die Depression des Courses jährlich die Hälfte ihres Einkommens mit 100 Millionen Silber. Züge der Staat, um den Cours zu heben, zwar nicht 250 Millionen, sondern nur 50 Millionen ein, und verzinste dieselben mit 8 %, so würde er jährlich 4 Millionen Banknoten zu diesem Zweck aufwenden müssen. Dieser Verwendung gegenüber würde sich aber sein Einkommen, welches von 200 Millionen auf 100 Millionen Silber gesunken war, wieder auf $111\frac{1}{9}$ Millionen Silber heben, der Staat würde also durch die Aufwendung von 4 Millionen Banknoten $11\frac{1}{9}$ Millionen Silber gewonnen haben, oder zum Course von 180 auf Banknoten gerechnet $11\frac{1}{9}$ Millionen mal $\frac{9}{5}$, also 20 Millionen Banknoten.

§. 3.

Oesterreich befindet sich in der Lage, dass sein Papiergeld, oder was praktisch dasselbe ist, das der Bank, den Paricours nicht erreicht. Nach der vorstehenden Darstellung wird er jedes Opfer bringen müssen, um den Paricours herzustellen. Diese Herstellung kann nur allein durch eine verhältnissmässige Einziehung von Banknoten bewirkt werden, keineswegs durch Deponirungen von Silber in der Bank, oder durch Anleihen gewöhnlicher Art, oder auf irgend eine andere Weise. Theorie und Erfahrung beweisen gleichzeitig die Richtigkeit dieser Behauptung.

Nachfolgendes Verfahren dürfte geeignet sein, der Staatskasse das zuviel ausgegebene Papiergeld zuzuführen, ohne deshalb übergrosse Opfer nöthig zu machen, wiewohl auch die grössten zur Erreichung des Zweckes nicht leicht zu gross erscheinen könnten.

Die Staatskasse nehme beliebige Summen von einigem Belang in Banknoten von jedem Einsen-

der des In- und Auslandes in's Depositum und verspreche solche mit monatlich $\frac{1}{2}$ % (oder mehr) ebenfalls in Banknoten zu verzinsen, auch auf Verlangen des Deponenten sofort zurückzuzahlen.

Es dürfte kaum zu bezweifeln sein, dass ein solches Verfahren der Staatskasse sehr grosse Summen in Papiergeld zuführen würde, insbesondere fast den ganzen Betrag derjenigen Summe, welche über das Cirkulationsbedürfniss hinaus gegeben worden ist. Denn jeder Deponirende verliert nicht einen Augenblick die Verfügung über sein Geld, während er gleichwohl einen erheblichen Zinsengenuss davon gewinnt; er wird sich darum jeder Summe zu entäussern suchen, welche ihm für das Bedürfniss seiner laufenden Ausgaben irgend entbehrlich ist. Dabei kann in die Zahlungsfähigkeit der Staatskasse unter den bekannt gemachten Bedingungen niemals der mindeste Zweifel gesetzt werden.

Selbst ausländische Banquiers dürften sich bei einer derartigen Staatsanleihe (denn etwas anderes ist es nicht) stark betheiligen. Einmal würde schon die Bekanntmachung der vorgeschlagenen Maassregel ein erhebliches Steigen der Banknoten in Aussicht stellen und damit dem Aufkäufer von Banknoten einen sicheren Gewinn eröffnen. Ganz abgesehen davon würden ausländische Häuser auch Veranlassung haben, ihre Bestände, ihre Baarbestände zumal, in zur Deponirung angekauften Banknoten zu belegen, so lange sie nicht ein plötzliches starkes Fallen derselben befürchten müssen. Denn, selbst wenn die Banknoten zwischen der Anschaffung und der Verausgabung fallen sollten, so würde der Deponirende noch keinen Schaden haben, so lange die Differenz im Anschaffungs- und Verkaufspreise den inzwischen zu gewinnenden Zinsenbetrag nicht überschreitet.

Der vorgeschlagene Zinsfuss von $\frac{1}{2}$ % monatlich dürfte dem Bedürfniss vielleicht genügen, da er eigentlich nur dem Diskonto, nicht aber der Verzinsung unkündbarer Staatsdarlehen gewährt werden darf, auf welche letztere das starke Angebot und wohl auch ein Mangel an Vertrauen nachtheilig einwirkt.

Nach dem Course der Metalliques mit 67 in Banknoten oder mit 47$\frac{1}{2}$ in Silber berechnet, und die Interessenzahlungen in Silber vorausgesetzt, würde der Zinsfuss für gewöhnliche Staatsdarlehen allerdings über 10 % sein. Sollte indess, wider Erwarten, ein Zinssatz von 6 %, wie er vorgeschlagen wurde, nicht genügen, um der Staatskasse die Banknoten in hinreichender Menge zuzuführen, so würde selbst ein solcher von 7 %, 8 % und mehr immer noch einen grossen Gewinn für die Staatskasse übrig las-

sen, gegenüber dem enormen, durch die Depression der Valuta herbeigeführten Verlust.

Ein übermässig hochgegriffener Zinsfuss dürfte Veranlassung werden, einen grösseren Betrag an Banknoten, als zur Herstellung des Paricourses nothwendig ist, ja alle Banknoten aus dem Verkehr zu ziehen. Wenn dieses auch an sich nicht nachtheilig erscheint, indem sich der Abfluss an Banknoten durch Silber vom Auslande her sofort ersetzen würde, so möchte doch der gegenwärtige Zeitpunkt weniger geeignet sein, die Staatsausgaben zu diesem Zweck über das nothwendige Maass hinaus zu steigern.

Es ist nicht meine Aufgabe, das Rechtsverhältniss der Staatskasse gegenüber der Bank zu beleuchten. Dieses kann berücksichtigt werden, auch wenn der Staat sich zu dem Nothwendigen entschliesst. Eine Vermehrung der Ansprüche des Staats an den Kredit der Bank würde jedoch aus der vorgeschlagenen Maassregel nicht erwachsen, die eingehenden Banknoten vielmehr die Staatskasse in den Stand setzen, einen Theil ihrer Verbindlichkeiten gegen die Bank abzutragen, welche letztere dann die ihr übergebenen Banknoten vernichten könnte.

§. 4.

Es lässt sich mit einiger Sicherheit vorher bestimmen, wie gross die Summe sein kann, welche ein Staat im Verkehr erträgt, und ebenso die Summe, welche ein Staat zuviel an Papiergeld ausgegeben hat und welche daher eingezogen werden muss, um die Valuta auf Pari zu bringen.

In §. 2. war die Summe des cirkulirenden Papiergeldes eines Staates gleich c gesetzt, sein Cours gegen Silber wie q zu 100, und es ergab sich der Silberwerth des sämmtlichen ausgegebenen Papiergeldes: $S = c \times \frac{100}{q}$.

Es stellt S zugleich diejenige Summe dar, welche der Verkehr an Papiergeld ertragen wird, ohne dass dieses der Depression unterliegt.

Ist mithin die Summe des ausgegebenen Papiergeldes, sowie dessen Cours bekannt, so lässt sich daraus diejenige Summe, welche eingezogen werden muss, um den Cours auf Pari zu bringen, durch eine leichte Rechnung finden.

Zahlenbeispiel. Am 30. Juni 1861 betrug die Summe, welche der Kaiserstaat (oder die Bank, was in vorliegendem Falle das-

selbe ist) an Papiergeld ausgegeben hatte*) . . 473,144,397 Fl.

Der Cours betrug zu eben der Zeit . . . . . 140,21.

Es ist mithin in runder Summe zu setzen $c =$ 473,144,400 „
und $q = 140,21$.

Und es ergiebt sich die Summe, welche der Staat
an Papgld. ertragen kann $S = 473,144,400 \times \frac{100}{140,21}$
= 337,454,100

Und endlich die Summe, welche aus dem Verkehr zu ziehen ist, um den Paricours herzustellen 135,690,300 Fl.

Um diese Summe einzuziehen würde zu 6 % ein Aufwand von jährlich 8,141,418 Fl. erforderlich gewesen sein: eine Summe, gar nicht in Vergleich zu stellen mit dem Ausfall, den die Staatskasse durch die Depression des Courses erleidet, und noch weniger zu vergleichen mit dem Schaden, den die Depression dem österreichischen Staats- und Privatcredit zufügt.

Der Betrag des Bankschatzes scheint nach diesen Erörterungen auf den Cours des Papiergeldes nur einen sehr geringen oder gar keinen Einfluss zu üben. Wäre von den am 30. Juni 1861 vorhandenen 89,778,252 Fl. in Gold und Silber ein grösserer Theil zur Einziehung von 80 Millionen Gulden Banknoten verwendet worden, so würden diese zu jener Zeit nicht 140,21, sondern $104\frac{2}{3}$ gestanden haben.

§. 5.

Da über die Wirksamkeit der im §. 3. vorgeschlagenen Maassregel gar keine Erfahrungen vorliegen, so ist es nur möglich, diese Wirksamkeit aus der fingirten Uebertreibung, nämlich dadurch zu beurtheilen, dass man sich die Maassregel bis an ihre äussersten möglichen Grenzen ausgedehnt denkt.

Eine dieser Grenzen würde die sein, wenn die Verzinsung des deponirten Papiergeldes eben so viel oder mehr betrüge, als das ganze Staatseinkommen. Träte diese Grenze ein, so würde, gemäss der Entwickelung im §. 2., die weitere Ausdehnung der Maassregel der Staatskasse Nachtheil bringen. Diese Grenze setzt jedoch eine so ungeheure Papiergeld-Emission voraus, dass sie nur etwa in den französischen Assignaten eine Analogie findet.

Wenn eine zu niedrig gegriffene Verzinsung den Kapital-

*) Die österreichische Nationalbank und ihr Verhältniss zum Staate. Wien bei W. Braumüller. 1861.

besitzern keinen Anreiz böte, ihre Bestände in der Staatskasse zu deponiren, so würde die Maassregel wirkungslos bleiben.

Alle Privatleute, und insbesondere alle Banquiers und Kaufleute, würden trachten, ihren nothwendigen Bestand an Banknoten durch Deponirung derselben so viel als möglich zu beschränken, und zwar würden und könnten sie dieses thun, wie gezeigt wurde, ohne Rücksicht auf ein muthmaassliches Steigen oder Fallen derselben. Es lässt sich jedoch eine Grenze denken, wo das cirkulirende Papiergeld, ohnerachtet seiner mehr als zulässigen Vermehrung, zur Bestreitung des Cirkulationsbedürfnisses nicht mehr ausreichte, indem die Privatleute mehr Papiergeld deponirten, als zur Herstellung des Paricourses nothwendig wäre, und ihr Cirkulationsbedürfniss durch Anschaffungen baaren Geldes befriedigten. In diesem Falle würde schliesslich alles oder fast alles Papiergeld aus dem Verkehr entschwinden. Wollte man dieses vermeiden, so würde es nöthig sein, den Zinsfuss für das einzuziehende Papiergeld herabzusetzen. In §. 3. wurde bereits des Falles gedacht.

Wenn diese Grenze erreicht werden möchte, lässt sich schwer beurtheilen, weil sie ganz davon abhängt, in wie weit Kapitalbesitzer des In- und Auslandes geneigt sein möchten, von einer Deponirung von Papiergeld Nutzen zu ziehen.

Aus allen diesen Erörterungen dürfte hervorgehen, auf der einen Seite, dass die vorgeschlagene Maassregel, selbst wenn sie wider Erwarten den Cours der Banknoten nicht vollständig auf den Silberwerth bringen sollte, gleichwohl für die Staatskasse ungemein vortheilhaft sein müsste, auf der anderen, dass sie in keiner Weise geeignet sein soll, einer in's Unbestimmte ausgedehnten Vermehrung von Papiergeld die Wage zu halten.

L.

Ueber die Bestimmung der Abplattung der Erde aus den gleichzeitigen Angaben eines Quecksilber- und eines Aneroid-Barometers.

Von

Herrn ***Franz Unferdinger***

Professor der Mathematik an der Oberrealschule am Bauernmarkte in Wien.

Da die Erde von der Kugelgestalt abweicht, der Art, dass sie an ihren beiden Polen abgeplattet ist, und da die Erde um eine durch diese Pole gehende Axe rotirt, so entsteht dadurch bekanntlich eine zweifache Zunahme der Schwerkraft vom Aequator gegen die Pole zu und zwar erstens wegen der allmäligen Annäherung gegen den Mittelpunkt der Erdgestalt und zweitens wegen der Abnahme der Fliehkraft. In der That, ist g das Maass der Intensität der Schwere am Aequator und a der Halbmesser des Aequators, so ist in der Breite φ, zu welcher der Radiusvector ϱ gehört, das Maass der Intensität der Schwere gleich $g\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2$. Ist ferner f die Fliehkraft am Aequator und f' jene in der Breite φ, in der Richtung der Schwere gemessen, so ist bekanntlich $f = \frac{g}{289}$, $f' = f\,\mathrm{Cos}^2\varphi$, folglich die Abnahme der Fliehkraft $f - f' = f\,\mathrm{Sin}^2\varphi = g\,\frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{289}$. Um diesen Betrag hat also die Schwerkraft zugenommen und es ist daher ihr Gesammtbetrag g' in der Breite φ durch die Gleichung gegeben:

$$(1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad g' = g\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{\mathrm{Sin}^2\varphi}{289}\right),$$

wenn $a=1$ gesetzt wird, d. h. wenn man voraussetzt, dass ϱ in Theilen des Radius am Aequator ausgedrückt ist.

Ist diese Zunahme der Schwerkraft durch Beobachtungen constatirt und ihr Betrag gemessen, so gestattet dieselbe einen Rückschluss auf die Gestalt, respective auf die Abplattung der Erde. Die Grösse dieser letzteren wurde bisher abgeleitet aus Gradmessungen, aus Pendelschwingungen und (wiewohl mit geringerer Genauigkeit) aus gewissen Mondstörungen. Wir haben es hier mit einer neuen, von Herrn Commodor Wüllersdorf entdeckten und vorgeschlagenen Methode zu thun, welche die fragliche Grösse aus den gleichzeitigen Angaben eines Quecksilber- und eines Aneroid-Barometers zu ermitteln strebt. Meines Erachtens könnte man auch die gleichzeitigen Angaben einer gleicharmigen und einer Feder-Wage für das Gewicht eines und desselben Körpers zu diesem Zwecke verwenden; wir werden hierauf am geeigneten Orte in einer Anmerkung zurückkommen. Die Aufgabe, welche wir uns zur Auflösung in diesen Zeilen gestellt haben, besteht kurz darin, die Grösse der Abplattung der Erde $\left(\frac{1}{300}\right)$ als bekannt vorausgesetzt, den Einfluss zu berechnen, welchen dieselbe auf die Angaben eines Quecksilber-Barometers in verschiedenen Breitengraden ausübt. Das Resultat wird alsdann ein bestimmter Anhaltspunkt sein, um zu entscheiden, ob man durch die bezeichnete Methode hoffen kann, die Erdabplattung zu finden oder ob der bezeichnete Einfluss auf die Angaben eines Quecksilber-Barometers so klein ist und von störenden Umständen derart modificirt wird, dass man auf einen practischen Erfolg verzichten muss.

Unter dem specifischen Gewicht eines Körpers versteht man in der Physik eine Zahl, welche angibt, um wieviel schwerer dieser Körper als ein gleiches Volumen Wasser ist, so dass also das specifische Gewicht des Wassers gleich Eins ist. Die specifischen Gewichte aller übrigen Körper werden nach dieser Einheit gemessen. Dieser Begriff des specifischen Gewichtes wird insolange ausreichend sein, als jene Einheit, mit der man misst, unveränderlich ist, d. h. so lange das absolute Gewicht eines bestimmten Volumens Wasser, z. B. der Volumseinheit, dasselbe bleibt. Da aber das absolute Gewicht eines Körpers abhängt von der Intensität der Schwere, so sieht man, dass auch das absolute Gewicht der Volumseinheit Wasser mit dieser Intensität veränderlich ist. Wenn die Erde an den Polen abgeplattet ist und um eine durch diese Pole gehende Axe rotirt, so wird das absolute Gewicht der Volumseinheit Wasser vom Aequator gegen die Pole

zu immerfort zunehmen und am Pol selbst das Maximum seines Gewichtes aufweisen. Um daher die Begriffe zu fixiren, ist nothwendig, die geographische Breite festzusetzen, in welcher sich jene Volumseinheit Wasser befindet. Nehmen wir als Einheit der specifischen Gewichte das absolute Gewicht der Volumseinheit Wasser am Aequator, und bezeichnen s und s' die specifischen Gewichte eines und desselben Körpers am Aequator und in der Breite φ, so besteht die Proportion:

(2) . . . . $s:s' = g:g'$.

Unter diesem Gesichtspunkte wird das specifische Gewicht eines und desselben Körpers eine mit der geographischen Breite veränderliche Grösse, und ein Quecksilber-Barometer, welches am Aequator den Stand B zeigte, wird in der Breite φ bei unverändertem Luftdruck einen kleineren Stand b zeigen, da sich unter sonst gleichen Umständen die Barometerstände umgekehrt wie die specifischen Gewichte der barometrischen Flüssigkeiten verhalten:

(3) . . . . $B:b = s':s$.

Durch Vereinigung der beiden Proportionen (2) und (3) erhält man:

(4) . . . . $B:b = g':g$,

d. h. bei unverändertem Luftdruck und unter sonst gleichen Umständen verhalten sich die Barometerstände am Aequator und in der Breite φ umgekehrt wie die Intensitäten der Schwere.

Das Aneroid-Barometer, welches den Druck der Luft durch die Elasticität eines Körpers misst, wird von der in verschiedenen Breiten herrschenden Verschiedenheit der Intensität der Schwerkraft nicht afficirt und wird daher, wenn es am Aequator bei dem Stande B mit dem Quecksilber-Barometer übereinstimmt, auch in der Breite φ bei unverändertem Luftdruck und unter sonst gleichen Umständen den Stand B zeigen. Die Proportion (4) bleibt also auch dann noch in Kraft, wenn man unter B und b die gleichzeitigen Angaben eines Aneroid- und eines Quecksilber-Barometers versteht, welche am Aequator in ihren Angaben übereinstimmen, welche Bedeutung der beiden Buchstaben B und b auch in der Folge beibehalten werden soll. Ersetzt man in der Proportion (4) g' durch seinen Werth aus (1) und bestimmt daraus ϱ, so erhält man:

$$\varrho = \left(\frac{B}{b} - \frac{\operatorname{Sin}^2\varphi}{289}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{b}{B}}\left(1 - \frac{b}{B}\cdot\frac{\operatorname{Sin}^2\varphi}{289}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

oder entwickelt:

(5)

$$\varrho = \sqrt{\frac{b}{B}} \left\{ 1 + \tfrac{1}{2}\frac{\text{Sin}^2\varphi}{289}\cdot\frac{b}{B} + \tfrac{3}{8}\left(\frac{\text{Sin}^2\varphi}{289}\cdot\frac{b}{B}\right)^2 + \tfrac{5}{16}\left(\frac{\text{Sin}^2\varphi}{289}\cdot\frac{b}{B}\right)^3 + \ldots \right\}$$ [1],

oder mit hinreichender Annäherung:

$$(6) \ldots\ldots\ldots \quad \varrho = \sqrt{\frac{b}{B}}\left(1 + \frac{\text{Sin}^2\varphi}{578}\right).$$

Mittelst dieser Formel kann man also den Radiusvector ϱ aus den in der bekannten Breite φ beobachteten gleichzeitigen Barometerständen B und b berechnen.

Um eine Vorstellung zu bekommen, um wie viel die beiden Stände B und b von einander verschieden sein können, setzte ich die Erdabplattung $\left(\frac{1}{300}\right)$, respective die entsprechenden Werthe von ϱ als bekannt voraus, und rechnete $\frac{b}{B}$ für die Breiten von 10 zu 10 Graden, wie untenstehend.

φ^0	$\frac{b}{B}$	$336(1-\frac{b}{B})$
0	1·00000	$+0'''\cdot00$
10	0·99976	0·08
20	882	0·40
30	748	0·85
40	584	1·40
50	407	1·99
60	244	2·54
70	108	3·00
80	018	3·30
90	0·98991	3·39

Die dritte Spalte gibt den Werth von $B-b$ in W. Linien, wenn man für B den Werth 336''' adoptirt. Will man diese Zahlen für einen anderen Barometerstand B haben, so braucht man dieselben nur mit $\frac{B}{336}$ zu multipliciren.

Also das Maximum der Abweichung $B-b$, so weit dieselbe von der Abplattung der Erde herrührt, beträgt am Pol $3'''\cdot4$ [2]).

Der Umstand, dass beim Aneroid-Barometer durch Vergrösserung des Apparats auch die Entfernung zweier Zolltheilstriche vergrössert werden kann, bleibt auf die vorhergehenden Rechnungen

ohne Einfluss und kann nur zur grösseren Genauigkeit im Ablesen des Aneroid-Barometers dienlich sein. Das obige Maximum von $3'''.4$ bezeichnet alsdann 3·4 allerdings vergrösserte Linien des Aneroid-Barometers. — Da man a priori nicht annehmen kann, dass Temperatur und Feuchtigkeit in gleichem Maasse und in gleichem Sinne auf das Aneroid-, wie auf das Quecksilber-Barometer wirken, in welchem Falle wegen $d\varrho = \frac{db - dB}{2b}$ eine Veränderung dieser Grössen auf die Werthe von ϱ ohne Wirkung wäre, so ist durchaus nothwendig, die Angaben beider Barometer auf dieselbe Temperatur .... (auf einen gewissen Normalzustand der Atmosphäre) zu reduciren. Es sind also zur Herstellung von Reductionstafeln für das Aneroid-Barometer vorher noch einige physikalische Untersuchungen nothwendig über die Veränderungen, welche der Elasticitätsmodul des vom Luftdruck afficirten Körpers bei verschiedenem Temperatur- und Feuchtigkeitszustand der Atmosphäre erleidet.

Wir gehen nun über zu der Formel, welche aus den Werthen von ϱ die Grösse der Abplattung finden lehrt, und zur Betrachtung des Einflusses, welchen ein Fehler in B und b auf jene Abplattung ausübt.

Die Formel, welche α aus ϱ und φ direct gibt, ist die folgende:

$$(7)\quad \alpha = 1 - \tfrac{1}{2}\{\sqrt{\varrho^2 + 2\,\mathrm{ctg}\,\varphi\sqrt{(1-\varrho^2)}} + \sqrt{\varrho^2 - 2\,\mathrm{ctg}\,\varphi\sqrt{(1-\varrho^2)}}\}^{3)};$$

um logarithmisch rechnen zu können verfährt man indirect nach folgenden zwei Gleichungen:

$$(8) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathrm{Sin}\, x = \frac{2\,\mathrm{ctg}\,\varphi\sqrt{1-\varrho^2}}{\varrho^2},$$

$$(9) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \alpha = 1 - \varrho\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}x,$$

indem man vorher den Hilfswinkel x rechnet, mittelst welches die zweite Gleichung die Abplattung α liefert.

Bezeichnet $d\varrho$ einen Fehler in ϱ und $d\alpha$ den entsprechenden Fehler in α, so gibt die Gleichung (7) durch Differenziation:

$$(10) \;.\;.\;.\;.\; d\alpha = -\varrho\,\frac{1-\alpha}{1-\varrho^2}\cdot\frac{1-(1-\alpha)^2}{2(1-\alpha)^2-\varrho^2}\,d\varrho^{\;4)}.$$

Mit dieser Formel wurde die folgende kleine Tafel gerechnet:

φ^0	$d\alpha$		
0	$-\infty d\varrho =$	$\infty(dB-db)$	0‴·00
10	—33·65 „	7·268 „	0·07
20	8·47 „	1·830 „	0·26
30	4·04 „	0·872 „	0·55
40	2·43 „	0·524 „	0·92
50	1·72 „	0·372 „	1·29
60	1·34 „	0·289 „	1·66
70	1·14 „	0·246 „	1·95
80	1·03 „	0·222 „	2·16
90	—1·00 „	0.216 „	2·22

Ein und derselbe Fehler in ϱ hat also in der Nähe des Aequators einen 34mal grösseren Einfluss, als in der Nähe der Pole. Selbst in der Nähe des Pols geht noch der ganze Fehler in ϱ in α über. Wenn also durch derartige Beobachtungen die Abplattung überhaupt gefunden werden kann, so sind Beobachtungsstationen in hohen Breiten die günstigsten.

Durch Differenziation der Gleichung (6) ergibt sich strenge:

$$(11)\quad d\varrho=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{B}}\left(\frac{db}{b}-\frac{dB}{B}\right) \text{ oder annähernd } d\varrho=\frac{db-dB}{2b}.$$

Dieser Werth, statt $d\varrho$ in die zweite Spalte der oben stehenden Tafel gesetzt, gibt für $b=336'''$ die dritte Spalte, wenn $dB-db$ in Linien ausgedrückt wird. Dieselbe dient zur Beurtheilung des directen Einflusses eines Fehlers $dB-db$ auf die Abplattung α. Will man die Zahlwerthe dieser Spalte für einen anderen Luftdruck b als $336'''$ kennen, so braucht man jene nur mit $\frac{336}{b}$ zu multipliciren.

Wenn die Grösse des Fehlers $dB-db$ den Zahlen der dritten Spalte gleich wird, so ist der daraus entspringende Fehler $d\alpha$ der Abplattung α $(=\frac{1}{300})$ dieser Abplattung selbst gleich, d. h. beträgt z. B. in 70° Breite der Fehler $dB-db$ (die algebraische Differenz der einzelnen Fehler der Barometerstände B, b) 1·95 Linien, so ist der dadurch in α entstehende Fehler gleich $\frac{1}{300}$, man findet also die Abplattung entweder gleich Null oder gleich $\frac{1}{150}$, oder mit anderen Worten, man kann 1 gegen 1 wetten, dass das, was man findet, die Abplattung ist und dass sie es nicht ist. — Auch diese letzte Spalte gilt für $b=336'''$;

will man dieselben für einen anderen Barometerstand b haben, so multiplicire man jene mit $\frac{b}{336}$. Eine in der Natur zulässige Abänderung des Standes b würde die angesetzten Zahlen nicht wesentlich ändern.

Triest, Jänner 1860.

Anmerkungen.

[1]) Bezeichnen B und b die gleichzeitigen Angaben einer Federwage und einer gleicharmigen Wage für das Gewicht eines und desselben Körpers, so gilt die Gleichung (5), folglich auch jene (6) ebenfalls.

[2]) Die Differenz der Längen des Secundenpendels am Aequator und am Pol beträgt 2·3 p. L., allein die Erdabplattung wird nicht hieraus abgeleitet, sondern aus der Verspätung der Uhr ($3^m\,43^s$ in 24^h).

[3]) Da die Ableitung dieser Formel der reinen Mathematik angehört, so haben wir sie im Text übergangen. Sie ist die Auflösung der Aufgabe: Wenn die grosse Halbaxe des Erdsphäroids, die geographische Breite φ eines Ortes, nebst dem zugehörigen Radiusvector ϱ gegeben ist, die Abplattung $\alpha = 1 - \frac{b}{a}$ zu finden.

Legen wir durch den Mittelpunkt der Erde in der Ebene eines Meridianschnittes ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xy, die x-Axe durch die Breite 0°, also die y-Axe durch die Breite 90°, so gelten folgende drei Gleichungen:

$$\text{a) } \varrho^2 = x^2 + y^2, \quad \text{b) } \operatorname{ctg}\varphi = \frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \text{c) } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Da man zur Bestimmung von α nur des Verhältnisses $\frac{b}{a}$ bedarf, so setzen wir zur Einfachheit und in Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden $a = 1$, so dass $\alpha = 1 - b$ wird. Weil nach a) $y^2 = \varrho^2 - x^2$, so erhält man durch Substitution in c) und Auflösung:

$$x^2 = \frac{\varrho^2 - b^2}{1 - b^2} \quad \text{und hiermit} \quad y^2 = b^2 \frac{1 - \varrho^2}{1 - b^2},$$

folglich:

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{\varrho^2-b^2}{1-\varrho^2},\quad \text{und hiermit nach b)}\quad \mathrm{ctg}^2\varphi=b^2\frac{\varrho^2-b^2}{1-\varrho^2}.$$

In dieser Gleichung ist nur mehr die Grösse b unbekannt, sie dient also zur Bestimmung derselben. Geordnet wird $b^4-\varrho^2 b^2+\mathrm{ctg}^2\varphi(1-\varrho^2)=0$; setzt man $\varepsilon^2=1-\varrho^2$, so wird:

$$b^2=\tfrac{1}{2}\{\varrho^2\pm\sqrt{\varrho^4-4\,\mathrm{ctg}^2\varphi\,\varepsilon^2}\},$$

und weil für $\varphi=90^0$ $b=\varrho$ sein muss, so gilt im vorliegenden Falle von den beiden Zeichen das obere. Man hat nun:

$$b^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\varrho^2+\sqrt{[\varrho^4-(2\,\mathrm{cotg}\,\varphi\varepsilon)^2]}},$$

oder durch Transformation mittelst des Sourd'schen Binoms:

$$b=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{\varrho^2+2\,\mathrm{ctg}\,\varphi\varepsilon}+\sqrt{\varrho^2-2\,\mathrm{ctg}\,\varphi\varepsilon}\},$$

und weil $\alpha=1-b$ ist:

$$(7)\quad \alpha=1-\tfrac{1}{2}\{\sqrt{\varrho^2+2\,\mathrm{ctg}\,\varphi\sqrt{(1-\varrho^2)}}+\sqrt{\varrho^2-2\,\mathrm{ctg}\varphi\sqrt{(1-\varrho^2)}}\}.$$

Zum logarithmischen Rechnen führt man einen Hilfswinkel x mittelst der Gleichung ein:

$$(8)\;\ldots\ldots\ldots\quad \mathrm{Sin}\,x=\frac{2\,\mathrm{ctg}\,\varphi\sqrt{1-\varrho^2}}{\varrho^2};$$

hierdurch verwandelt sich (7) in

$$\alpha=1-\frac{\varrho}{2}\{\sqrt{1+\mathrm{Sin}\,x}+\sqrt{1-\mathrm{Sin}\,x}\}.$$

Wird nun x immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ gewählt, so ist nach den Lehren der Goniometrie:

$$\tfrac{1}{2}\{\sqrt{1+\mathrm{Sin}\,x}+\sqrt{1-\mathrm{Sin}\,x}\}=\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}x,$$

und man hat zur Berechnung von α die einfache Formel:

$$(9)\;\ldots\ldots\ldots\quad \alpha=1-\varrho\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}x.$$

4) Zur Herstellung der Differenzialgleichung (10) gehen wir von der endlichen Gleichung (7) aus und setzen für einen Augenblick:

$$h=\mathrm{ctg}\,\varphi,\quad R=\sqrt{\varrho^2+2h\sqrt{(1-\varrho^2)}},\quad R'=\sqrt{\varrho^2-2h\sqrt{(1-\varrho^2)}};$$

dann wird:

$$\alpha = 1 - \tfrac{1}{2}(R+R'), \quad \frac{d\alpha}{d\varrho} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{dR}{d\varrho} + \frac{dR'}{d\varrho}\right),$$

$$\frac{dR}{d\varrho} = \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\varrho^2} - h}{R} d\varrho,$$

mithin

$$\frac{dR'}{d\varrho} = \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\varrho^2} + h}{R'},$$

und

$$\frac{dR}{d\varrho} + \frac{dR'}{d\varrho} = \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\varrho^2}(R+R') + h(R-R')}{RR'},$$

oder, weil $R + R' = 2(1-\alpha)$, $R^2 - R'^2 = 4h\sqrt{1-\varrho^2}$, folglich $R - R' = \frac{2h\sqrt{1-\varrho^2}}{1-\alpha}$ ist:

$$\frac{dR}{d\varrho} + \frac{dR'}{d\varrho'} = \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot \frac{2(1-\alpha)^2\sqrt{1-\varrho^2} + 2h^2\sqrt{1-\varrho^2}}{RR'(1-\alpha)}$$

$$= 2\sqrt{1-\varrho^2}\,\frac{(1-\alpha)^2 + h^2}{2(1-\alpha)RR'};$$

nun ist:

$$(R+R')^2 = 4(1-\alpha)^2 = 2\varrho^2 + 2\sqrt{\varrho^4 - 4h^2(1-\varrho^2)}, \quad R^2 + R'^2 = 2\varrho^2,$$

mithin:

$$RR' = \sqrt{\varrho^2 - 4h^2(1-\varrho^2)} = 2(1-\alpha)^2 - \varrho^2,$$

sonach:

$$h^2 = \frac{(1-\alpha)^2[\varrho^2 - (1-\alpha)^2]}{1-\varrho^2},$$

und es wird durch Substitution der gefundenen Werthe für RR' und h^2:

$$\frac{dR}{d\varrho} + \frac{dR'}{d\varrho} = 2\sqrt{1-\varrho^2}\,\frac{(1-\alpha)^2 + \frac{(1-\alpha)^2[\varrho^2-(1-\alpha)^2]}{1-\varrho^2}}{(1-\alpha)[2(1-\alpha)^2 - \varrho^2]} \cdot \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}},$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dR}{d\varrho} + \frac{dR'}{d\varrho}\right) = \varrho\,\frac{1-\alpha}{1-\varrho^2} \cdot \frac{1-\varrho^2-(1-\alpha)^2+\varrho^2}{2(1-\alpha)^2 - \varrho^2},$$

also schliesslich:

$$(10) \; . \; . \; . \; . \; . \quad d\alpha = -\varrho\,\frac{1-\alpha}{1-\varrho^2} \cdot \frac{1-(1-\alpha)^2}{2(1-\alpha)^2 - \varrho^2} d\varrho.$$

Da ich die für den Zweck dieser Zeilen nothwendigen Formeln (7), (8), (9) und (10) in den mir zugänglichen geodätischen Handbüchern nicht finden konnte, so wird man die hier gegebene selbstständige Ableitung derselben entschuldigen.

Stimmen die beiden Barometer am Aequator nicht überein, wie oben vorausgesetzt wurde, sondern ist dort c die Correction des Quecksilber-Barometers in Bezug auf das Aneroid-Barometer, so sind in den Breiten 10^0, 20^0, 30^0, ... 90^0 die Correctionen $c+0·08$, $c+0·40$, $c+0·85$, ... $c+3·39$, so dass also die beobachteten Gesammt-Correctionen sich mit der geographischen Breite verändern. Diejenigen Grössen, welche in die Abplattungsrechnung übergehen, sind dann die Unterschiede der beobachteten Gesammt-Correctionen in den betreffenden Breiten und der beobachteten Correction am Aequator. — Hierin ist der Fall, dass beide Barometer in irgend einer Breite, z. B. von 50^0 (Breite des Fabrikortes des Aneroid-Barometers) übereinstimmen, auch schon eingeschlossen, dann ist $c = -1·99$.

Poisson bringt im 2. Bande seiner Mechanik (S. 475. der deutschen Uebersetzung von Stern. 1836.) die ähnliche Idee in Vorschlag, das Quecksilber-Manometer zur Bestimmung der verschiedenen Intensität der Schwere in verschiedenen Breiten zu verwenden, macht aber am Schlusse die Bemerkung, dass dieses Verfahren immer nur einer geringeren Genauigkeit fähig ist, als das, welches sich auf die Pendelversuche gründet.

LI.

Das sphärische Dreieck, dargestellt in seinen Beziehungen zum Kreise.

(Fortsetzung der Abhandlung in Thl. XXIX. S. 479. und Thl. XXXIII. S. 14.)

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Professor der Mathematik an der Oberrealschule am Bauernmarkte in Wien.

---

§. 76.

Nach den ersten Gleichungen in den §§. 60. und 65. ist mit Rücksicht auf jene (v) und (d′) die von uns eingeführte Hilfsgrösse

$$M \text{ respect. } M_1 = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c\pm a)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c\mp a)+2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c\pm a)}.$$

Das erste Glied im Zähler ist gleich $\frac{1}{2}\{\operatorname{Sin}(b+c)\pm\operatorname{Sin}a\}$, folglich ist der ganze Zähler:

$$\tfrac{1}{2}\{2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b-c)\pm\operatorname{Sin}a\} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{Sin}b+\operatorname{Sin}c\pm\operatorname{Sin}a);$$

wir können also für M, M_1, M_2, M_3 statt der Ausdrücke (151) die folgenden einfacheren substituiren:

$$(166)\ \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} M &= \frac{\operatorname{Sin}a+\operatorname{Sin}b+\operatorname{Sin}c}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)},\\ M_1 &= \frac{\operatorname{Sin}b+\operatorname{Sin}c-\operatorname{Sin}a}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)},\\ M_2 &= \frac{\operatorname{Sin}a+\operatorname{Sin}c-\operatorname{Sin}b}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)},\\ M_3 &= \frac{\operatorname{Sin}a+\operatorname{Sin}b-\operatorname{Sin}c}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}; \end{aligned}\right.$$

und die Formeln (150) bestimmen die Entfernungen d, d_1, d_2, d_3 der Mittelpunkte der vier Berührungskreise eines sphärischen Dreieckes vom Mittelpunkte des demselben umschriebenen Kreises durch die drei Seiten.

Um diese Distanzen durch die drei Winkel zu ermitteln, haben wir die Formeln (154) gegeben und die entsprechenden Formen für die M gehen aus jenen (166) hervor, wenn man bedenkt, dass für jedes sphärische Dreieck gilt:

$$(167) \ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)} &= \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B \operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}, \\ \frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)} &= \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A \operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}, \\ \frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)} &= \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A \operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}; \end{aligned} \right.$$

$$(168) \ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)} &= \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B \operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}, \\ \frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)} &= \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A \operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}, \\ \frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)} &= \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A \operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}; \end{aligned} \right.$$

wodurch man erhält:

$$(169) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} M &= \frac{\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B + \operatorname{Sin} C}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A \operatorname{Cos}\frac{1}{2}B \operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}, \\ M_1 &= \frac{\operatorname{Sin} B + \operatorname{Sin} C - \operatorname{Sin} A}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A \operatorname{Sin}\frac{1}{2}B \operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}, \\ M_2 &= \frac{\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} C - \operatorname{Sin} B}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B \operatorname{Sin}\frac{1}{2}A \operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}, \\ M_3 &= \frac{\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B - \operatorname{Sin} C}{4\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C \operatorname{Sin}\frac{1}{2}A \operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}. \end{aligned} \right.$$

§. 77.

Lehrsatz. Sind die Seiten eines sphärischen Dreieckes je kleiner als 180°, so ist immer die Summe der Sinus zweier Seiten grösser als der Sinus der dritten, oder es findet immer die Relation statt:

$$(170) \ldots\ldots\ldots \operatorname{Sin} a + \operatorname{Sin} b > \operatorname{Sin} c.$$

Soll dieses der Fall sein, so müssen die drei Längen Sin a,

Sin b, Sin c immer ein geradliniges Dreieck formiren, folglich auch jene 2Sin a, 2Sin b, 2Sin c. Diese sind aber die Sehnen der Bogen $2a$, $2b$, $2c$, welche immer ein Dreieck formiren, da ihre Hälften a, b, c die Seiten des betrachteten Dreieckes sind.

Hieraus folgt, dass die Differenzen

$$\begin{gathered}\operatorname{Sin} b + \operatorname{Sin} c - \operatorname{Sin} a,\\ \operatorname{Sin} a + \operatorname{Sin} c - \operatorname{Sin} b,\\ \operatorname{Sin} a + \operatorname{Sin} b - \operatorname{Sin} c\end{gathered}$$

immer positiv sind, folglich auch M, M_1, M_2, M_3, von welcher Eigenschaft wir in der Folge Gebrauch machen werden.

Zusatz. Wendet man die Relation (170) auf das Polardreieck an und kehrt mittelst der bekannten Relationen §. 16. von den Seiten desselben zu den Winkeln des Hauptdreieckes zurück, so zeigt sich:

$$\operatorname{Sin} A + \operatorname{Sin} B > \operatorname{Sin} C,$$

und es gilt daher auch folgender

Lehrsatz. Sind die Seiten eines sphärischen Dreieckes je kleiner als 180°, so ist immer die Summe der Sinus zweier Winkel grösser als der Sinus des dritten.

Dieser letztere Satz ist insofern merkwürdig, als für die drei Winkel die Relation $A + B > C$ keineswegs allgemein besteht.

§. 78.

Die drei Entfernungen δ_1, δ_2, δ_3 des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der den Nebendreiecken umschriebenen Kreise haben wir in §. 70. gegeben und die Hilfsgrössen M_1, M_2, M_3 gehen aus jenen M_1, M_2, M_3 hervor, wenn wir der Reihe nach b_1, c_1 statt b, c; a_1, c_1 statt a, c; a_1, b_1 statt a, b setzen, wobei a_1, b_1, c_1 die Supplemente von a, b, c bezeichnen. Hierdurch geben die (166):

$$(171) \ldots \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}_1 &= \frac{\operatorname{Sin} b + \operatorname{Sin} c - \operatorname{Sin} a}{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b+c)},\\ \mathrm{M}_2 &= \frac{\operatorname{Sin} a + \operatorname{Sin} c - \operatorname{Sin} b}{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b+c)},\\ \mathrm{M}_3 &= \frac{\operatorname{Sin} a + \operatorname{Sin} b - \operatorname{Sin} c}{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b+c)};\end{aligned}\right.$$

woraus man in Verbindung mit (166) unmittelbar erkennt, dass

$$(161) \quad \ldots\ldots \quad M = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3,$$

$$(172) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{M}_1 &= \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(b+c-a)}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a+b+c)} M_1 = \frac{\mathrm{tg}\,\varrho}{\mathrm{tg}\,\varrho_1} M_1, \\ \mathrm{M}_2 &= \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a+c-b)}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a+b+c)} M_2 = \frac{\mathrm{tg}\,\varrho}{\mathrm{tg}\,\varrho_2} M_2, \\ \mathrm{M}_3 &= \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a+b+c)} M_3 = \frac{\mathrm{tg}\,\varrho}{\mathrm{tg}\,\varrho_3} M_3. \end{aligned} \right.$$

Werden die Gleichungen (172) addirt, so erhält man nach Berücksichtigung der (161) die merkwürdige Relation:

$$(173) \quad \ldots\ldots \quad \frac{M}{\mathrm{tg}\,\varrho} = \frac{M_1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1} + \frac{M_2}{\mathrm{tg}\,\varrho_2} + \frac{M_3}{\mathrm{tg}\,\varrho_3}.$$

Da für das ebene Dreieck die Sinus und Tangenten den Bogen gleich werden, so dass die (166) geben: $M = M_1 = M_2 = M_3 = 1$, so erhält man hierfür die bekannte Gleichung:

$$(174) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}.$$

Diese hier angedeutete Analogie wird später, wenn wir von der geometrischen Bedeutung der M handeln, noch schärfer hervortreten.

§. 79.

Sind h_1, h_2, h_3 die drei Höhen des sphärischen Dreieckes, so hat man zur Bestimmung derselben aus den drei Seiten nach unserer Bezeichnung:

$$(175) \quad \mathrm{Sin}\,h_1 = \frac{2H_1}{\mathrm{Sin}\,a}, \quad \mathrm{Sin}\,h_2 = \frac{2H_2}{\mathrm{Sin}\,b}, \quad \mathrm{Sin}\,h_3 = \frac{2H_3}{\mathrm{Sin}\,c};$$

mittelst dieser und der folgenden aus §. 10.:

$$(12) \quad \mathrm{tg}\,\varrho = \frac{H_1}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a+b+c)}, \quad \mathrm{tg}\,\varrho_1 = \frac{H_1}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(b+c-a)}$$

findet man sogleich:

$$\frac{\mathrm{Sin}\,a}{2\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{\mathrm{tg}\,\varrho}{\mathrm{Sin}\,h_1}, \quad \frac{\mathrm{Sin}\,b}{2\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{\mathrm{tg}\,\varrho}{\mathrm{Sin}\,h_2}, \quad \frac{\mathrm{Sin}\,c}{2\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{\mathrm{tg}\,\varrho}{\mathrm{Sin}\,h_3};$$

$$\frac{\mathrm{Sin}\,a}{2\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)} = \frac{\mathrm{tg}\,\varrho_1}{\mathrm{Sin}\,h_1}, \quad \frac{\mathrm{Sin}\,b}{2\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)} = \frac{\mathrm{tg}\,\varrho_1}{\mathrm{Sin}\,h_2}, \quad \frac{\mathrm{Sin}\,c}{2\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)} = \frac{\mathrm{tg}\,\varrho_1}{\mathrm{Sin}\,h_3};$$

durch deren Vereinigung im Sinne der Gleichungen (166) folgende merkwürdige Ausdrücke für die M entstehen:

$$(176)\ \ldots \begin{cases} M = \operatorname{tg}\varrho\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} h_1} + \frac{1}{\operatorname{Sin} h_2} + \frac{1}{\operatorname{Sin} h_3}\right), \\ M_1 = \operatorname{tg}\varrho_1\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} h_2} + \frac{1}{\operatorname{Sin} h_3} - \frac{1}{\operatorname{Sin} h_1}\right), \\ M_2 = \operatorname{tg}\varrho_2\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} h_1} + \frac{1}{\operatorname{Sin} h_3} - \frac{1}{\operatorname{Sin} h_2}\right), \\ M_3 = \operatorname{tg}\varrho_3\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} h_1} + \frac{1}{\operatorname{Sin} h_2} - \frac{1}{\operatorname{Sin} h_3}\right); \end{cases}$$

welche für das ebene Dreieck nach der oben bereits gemachten Bemerkung, dass alsdann aus (166) folgt: $M = M_1 = M_2 = M_3 = 1$, in die folgenden Relationen übergehen:

$$(177)\ \ldots\ldots \begin{cases} \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}, \\ \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_1}, \\ \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_2}, \\ \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}. \end{cases}$$

§. 80.

Die bei unseren Untersuchungen vorkommende symmetrische Funktion H_1 wird nach §. 10. durch die Gleichung definirt:

(11)

$$H_1{}^2 = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der ersten der goniometrischen Verwandlungsformeln (e) in §. 42., so sieht man, dass auch

$$4H_1{}^2 = 1 - \operatorname{Cos}^2 a - \operatorname{Cos}^2 b - \operatorname{Cos}^2 c + 2\operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c,$$

oder

(178)

$$4H_1{}^2 = (\operatorname{Sin}^2 a + \operatorname{Sin}^2 b + \operatorname{Sin}^2 c) - 2(1 - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c).$$

Wir wollen nun zur Vereinfachung der Transformation

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a = \alpha, \quad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a = \alpha', \quad \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}b = \beta, \quad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b = \beta',$$
$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c = \gamma, \quad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c = \gamma'$$

setzen, so dass

$$(\lambda) \qquad \alpha^2 + \alpha'^2 = \beta^2 + \beta'^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 = 1;$$

und man hat, indem statt a, b, c die halben Seiten eingeführt werden:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c &= (1-2\alpha^2)\,(1-2\beta^2)\,(1-2\gamma^2)\\ &= (1-2\alpha^2)\,(1-2\beta'^2)\,(1-2\gamma'^2)\\ &= (1-2\alpha'^2)\,(1-2\beta^2)\,(1-2\gamma'^2)\\ &= (1-2\alpha'^2)\,(1-2\beta'^2)\,(1-2\gamma^2)\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c &= 1-2\alpha^2-2\beta^2-2\gamma^2+4\alpha^2\beta^2+4\alpha^2\gamma^2+4\beta^2\gamma^2-8\alpha^2\beta^2\gamma^2\\ &= 1-2\alpha^2-2\beta'^2-2\gamma'^2+4\alpha^2\beta'^2+4\alpha^2\gamma'^2+4\beta'^2\gamma'^2-8\alpha^2\beta'^2\gamma'^2\\ &= 1-2\alpha'^2-2\beta^2-2\gamma'^2+4\alpha'^2\beta^2+4\alpha'^2\gamma'^2+4\beta^2\gamma'^2-8\alpha'^2\beta^2\gamma'^2\\ &= 1-2\alpha'^2-2\beta'^2-2\gamma^2+4\alpha'^2\beta'^2+4\alpha'^2\gamma^2+4\beta'^2\gamma^2-8\alpha'^2\beta'^2\gamma^2.\end{aligned}$$

Werden diese vier Gleichungen addirt, die Summe mittelst der obigen Relationen (λ) reducirt und durch 4 abgekürzt, so zeigt sich alsbald:

$$\operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c = 1 - 2\{(\alpha\beta\gamma)^2 + (\alpha\beta'\gamma')^2 + (\alpha'\beta\gamma')^2 + (\alpha'\beta'\gamma)^2\},$$

oder durch Anwendung der in §. 11. unter (14) eingeführten Bezeichnung:

$$(179) \qquad 1 - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c = 2(\varDelta^2 + \varDelta_1{}^2 + \varDelta_2{}^2 + \varDelta_3{}^2).$$

Wenn man nun bedenkt, dass

$$\begin{aligned}2 \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b &= 8\alpha\alpha'\beta\beta'(\gamma^2+\gamma'^2) = 8\varDelta\varDelta_3 + 8\varDelta_1\varDelta_2,\\ 2 \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c &= 8\alpha\alpha'\gamma\gamma'(\beta^2+\beta'^2) = 8\varDelta\varDelta_2 + 8\varDelta_1\varDelta_3,\\ 2 \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c &= 8\beta\beta'\gamma\gamma'(\alpha^2+\alpha'^2) = 8\varDelta\varDelta_1 + 8\varDelta_2\varDelta_3\end{aligned}$$

ist, so erhält man durch Addition dieser drei Gleichungen zu jener (178), indem gleichzeitig für $1 - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c$ der Werth aus (179) substituirt wird:

$$(180)$$
$$4H_1{}^2 = (\operatorname{Sin} a + \operatorname{Sin} b + \operatorname{Sin} c)^2 - 4(\varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3 + \varDelta)^2.$$

Aus der ganzen Entwickelung dieses Paragraphen wird einleuchten, dass vorstehende Formel nichts weiter ist als eine goniometrische Verwandlungsformel, d. h. eine identische Gleichung, giltig für jeden Werth von a, b, c.

Diese Gleichung wird daher auch noch gelten, wenn man $-a$ statt a setzt. Hierdurch ändert sich H_1 nicht, im zweiten Theil hingegen tritt $-\operatorname{Sin} a$ an die Stelle von $\operatorname{Sin} a$, indem gleichzeitig Δ und Δ_1, welche $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a$ enthalten, ihr Zeichen ändern, so dass man auch hat:

(181)

$$4H_1{}^2 = (\operatorname{Sin} b + \operatorname{Sin} c - \operatorname{Sin} a)^2 - 4(\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta)^2,$$

und auch diese Formel ist nichts weiter, als eine goniometrische Verwandlungsformel, oder der zweite Theil ist nur eine andere Form für das Produkt

$$4 \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c) \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a) \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b) \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c).$$

§. 81.

Dividiren wir die Gleichung (180) durch $4\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(a+b+c)$, die Gleichung (181) durch $4\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(b+c-a)$, und verstehen wir nun unter a, b, c die drei Seiten eines sphärischen Dreieckes, so werden die ersten Theile beziehungsweise gleich $\operatorname{tg}^2\varrho$, $\operatorname{tg}^2\varrho_1$, die ersten Glieder der zweiten Theile je gleich M und M_1, und man hat:

$$\operatorname{tg}^2\varrho = M^2 - \left(\frac{\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\right)^2,$$

$$\operatorname{tg}^2\varrho_1 = M_1{}^2 - \left(\frac{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}\right)^2;$$

jetzt ist aber auch nach Gleichung (16) §. 11. unter Anwendung von Gleichung (54) in §. 22.:

$$\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \tfrac{1}{2}H_1(\operatorname{ctg}\varrho + \operatorname{ctg}\varrho_1 + \operatorname{ctg}\varrho_2 + \operatorname{ctg}\varrho_3) = H_1(\operatorname{tg} r + \operatorname{ctg}\varrho),$$

$$\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta = \tfrac{1}{2}H_1(\operatorname{ctg}\varrho_2 + \operatorname{ctg}\varrho_3 - \operatorname{ctg}\varrho_1 - \operatorname{ctg}\varrho) = H_1(\operatorname{tg} r - \operatorname{ctg}\varrho_1);$$

mithin, wenn man diese Werthe substituirt und M, M_1 bestimmt:

$$(182) \quad \left\{\begin{aligned} M^2 &= \operatorname{tg}^2\varrho + (\operatorname{tg} r \operatorname{tg}\varrho + 1)^2, \\ M_1{}^2 &= \operatorname{tg}^2\varrho_1 + (\operatorname{tg} r \operatorname{tg}\varrho_1 - 1)^2, \\ M_2{}^2 &= \operatorname{tg}^2\varrho_2 + (\operatorname{tg} r \operatorname{tg}\varrho_2 - 1)^2, \\ M_3{}^2 &= \operatorname{tg}^2\varrho_3 + (\operatorname{tg} r \operatorname{tg}\varrho_3 - 1)^2; \end{aligned}\right.$$

wodurch die in unseren Distanzformeln (152) vorkommenden Hilfsgrössen M, M_1, M_2, M_3 auf ihre einfachste Form zurückgeführt sind, und man hat nunmehr:

$$(183) \ldots \left\{\begin{aligned} \mathrm{tg}^2 d &= \frac{\mathrm{tg}^2 r - 2\,\mathrm{tg}\, r\, \mathrm{tg}\, \varrho}{\mathrm{tg}^2\varrho + (\mathrm{tg}\, r\, \mathrm{tg}\, \varrho + 1)^2}, \\ \mathrm{tg}^2 d_1 &= \frac{\mathrm{tg}^2 r + 2\,\mathrm{tg}\, r\, \mathrm{tg}\, \varrho_1}{\mathrm{tg}^2\varrho_1 + (\mathrm{tg}\, r\, \mathrm{tg}\, \varrho_1 - 1)^2}, \\ \mathrm{tg}^2 d_2 &= \frac{\mathrm{tg}^2 r + 2\,\mathrm{tg}\, r\, \mathrm{tg}\, \varrho_2}{\mathrm{tg}^2\varrho_2 + (\mathrm{tg}\, r\, \mathrm{tg}\, \varrho_2 - 1)^2}, \\ \mathrm{tg}^2 d_3 &= \frac{\mathrm{tg}^2 r + 2\,\mathrm{tg}\, r\, \mathrm{tg}\, \varrho_2}{\mathrm{tg}^2\varrho_3 + (\mathrm{tg}\, r\, \mathrm{tg}\, \varrho_3 - 1)^2}. \end{aligned}\right.$$

Man sieht also, dass die Ausdrücke für die Distanzen d, d_1, ... wie in den Euler'schen Formeln für das ebene Dreieck $d^2 = r^2 - 2r\varrho$, $d_1{}^2 = r^2 + 2r\varrho_1$, ... nur von den Radien derjenigen Kreise abhängen, deren Mittelpunkts-Entfernung sie bestimmen.

§. 82.

Substituirt man die gefundenen Werthe von M_1, M_2, M_3 in Gleichung (172), so folgt:

$$(184) \ldots \left\{\begin{aligned} M_1{}^2 &= \mathrm{tg}^2\varrho + (\mathrm{tg}\, r_1\, \mathrm{tg}\, \varrho - 1)^2, \\ M_2{}^2 &= \mathrm{tg}^2\varrho + (\mathrm{tg}\, r_2\, \mathrm{tg}\, \varrho - 1)^2, \\ M_3{}^2 &= \mathrm{tg}^2\varrho + (\mathrm{tg}\, r_3\, \mathrm{tg}\, \varrho - 1)^2; \end{aligned}\right.$$

wodurch die Distanzformeln (156) §. 70. übergehen in:

$$(185) \ldots \left\{\begin{aligned} \mathrm{tg}^2\delta_1 &= \frac{\mathrm{tg}^2 r_1 + 2\,\mathrm{tg}\, r_1\, \mathrm{tg}\, \varrho}{\mathrm{tg}^2\varrho + (\mathrm{tg}\, r_1\, \mathrm{tg}\, \varrho - 1)^2}, \\ \mathrm{tg}^2\delta_2 &= \frac{\mathrm{tg}^2 r_2 + 2\,\mathrm{tg}\, r_2\, \mathrm{tg}\, \varrho}{\mathrm{tg}^2\varrho + (\mathrm{tg}\, r_2\, \mathrm{tg}\, \varrho - 1)^2}, \\ \mathrm{tg}^2\delta_3 &= \frac{\mathrm{tg}^2 r_3 + 2\,\mathrm{tg}\, r_3\, \mathrm{tg}\, \varrho}{\mathrm{tg}^2\varrho + (\mathrm{tg}\, r_3\, \mathrm{tg}\, \varrho - 1)^2}. \end{aligned}\right.$$

§. 83.

Addirt man in den ersten zwei Gleichungen (153) beiderseits 1 und stellt im zweiten Theil auf gemeinschaftlichen Nenner, so zeigt sich:

$$1 + \mathrm{tg}^2 d = \frac{(1 + \mathrm{tg}^2 r)(1 + \mathrm{tg}^2\varrho)}{\mathrm{tg}^2\varrho + (\mathrm{tg}\, r\, \mathrm{tg}\, \varrho + 1)^2},$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 d = \frac{(1 + \mathrm{tg}^2 r)(1 + \mathrm{tg}^2\varrho_1)}{\mathrm{tg}^2\varrho + (\mathrm{tg}\, r_1\, \mathrm{tg}\, \varrho - 1)^2};$$

und wenn die (153) durch diese dividirt werden:

$$\mathrm{Sin}^2 d = \frac{\mathrm{tg}^2 r - 2\,\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,\varrho}{(1+\mathrm{tg}^2 r)(1+\mathrm{tg}^2\varrho)} = \mathrm{Sin}^2 r\,\mathrm{Cos}^2\varrho - 2\,\mathrm{Sin}\,r\,\mathrm{Cos}\,r\,\mathrm{Sin}\,\varrho\,\mathrm{Cos}\,\varrho,$$

$$\mathrm{Sin}^2 d_1 = \frac{\mathrm{tg}^2 r + 2\,\mathrm{tg}\,r\,\mathrm{tg}\,\varrho_1}{(1+\mathrm{tg}^2 r)(1+\mathrm{tg}^2\varrho_1)} = \mathrm{Sin}^2 r\,\mathrm{Cos}^2\varrho_1 + 2\,\mathrm{Sin}\,r\,\mathrm{Cos}\,r\,\mathrm{Sin}\,\varrho_1\,\mathrm{Cos}\,\varrho_1;$$

oder endlich:

$$(186)\ .\ .\ \begin{cases} \mathrm{Sin}^2 d = \mathrm{Sin}^2(r-\varrho) - \mathrm{Cos}^2 r\,\mathrm{Sin}^2\varrho, \\ \mathrm{Sin}^2 d_1 = \mathrm{Sin}^2(r+\varrho_1) - \mathrm{Cos}^2 r\,\mathrm{Sin}^2\varrho_1, \\ \mathrm{Sin}^2 d_2 = \mathrm{Sin}^2(r+\varrho_2) - \mathrm{Cos}^2 r\,\mathrm{Sin}^2\varrho_2, \\ \mathrm{Sin}^2 d_3 = \mathrm{Sin}^2(r+\varrho_3) - \mathrm{Cos}^2 r\,\mathrm{Sin}^2\varrho_3. \end{cases}$$

Auf dieselbe Art folgert man aus (185):

$$(187)\ .\ .\ \begin{cases} \mathrm{Sin}^2\delta_1 = \mathrm{Sin}^2(\varrho+r_1) - \mathrm{Sin}^2\varrho\,\mathrm{Cos}^2 r_1, \\ \mathrm{Sin}^2\delta_2 = \mathrm{Sin}^2(\varrho+r_2) - \mathrm{Sin}^2\varrho\,\mathrm{Cos}^2 r_2, \\ \mathrm{Sin}^2\delta_3 = \mathrm{Sin}^2(\varrho+r_3) - \mathrm{Sin}^2\varrho\,\mathrm{Cos}^2 r_3. \end{cases}$$

§. 84.

Durch Einführung der Sinus und Cosinus statt der Tangenten in den Ausdrücken für M (182) erhält man mit Benutzung der Distanzformeln (186):

$$M^2 = \frac{\mathrm{Sin}^2\varrho\,\mathrm{Cos}^2 r + \mathrm{Cos}^2(r-\varrho)}{\mathrm{Cos}^2 r\,\mathrm{Cos}^2\varrho} = \frac{1-\mathrm{Sin}^2(r-\varrho)+\mathrm{Cos}^2 r\,\mathrm{Sin}^2\varrho}{\mathrm{Cos}^2 r\,\mathrm{Cos}^2\varrho}$$
$$= \frac{1-\mathrm{Sin}^2 d}{\mathrm{Cos}^2 r\,\mathrm{Cos}^2\varrho},$$

$$M_1^2 = \frac{\mathrm{Cos}^2 r\,\mathrm{Sin}^2\varrho_1 + \mathrm{Cos}^2(r+\varrho_1)}{\mathrm{Cos}^2 r\,\mathrm{Cos}^2\varrho_1} = \frac{1-\mathrm{Sin}^2(r+\varrho_1)+\mathrm{Cos}^2 r\,\mathrm{Sin}^2\varrho_1}{\mathrm{Cos}^2 r\,\mathrm{Cos}^2\varrho_1}$$
$$= \frac{1-\mathrm{Sin}^2 d_1}{\mathrm{Cos}^2 r\,\mathrm{Cos}^2\varrho_1};$$

also auch:

(188)

$$M = \frac{\mathrm{Cos}\,d}{\mathrm{Cos}\,r\,\mathrm{Cos}\,\varrho},\quad M_1 = \frac{\mathrm{Cos}\,d_1}{\mathrm{Cos}\,r\,\mathrm{Cos}\,\varrho_1},\quad M_2 = \frac{\mathrm{Cos}\,d_2}{\mathrm{Cos}\,r\,\mathrm{Cos}\,\varrho_2},$$
$$M_3 = \frac{\mathrm{Cos}\,d_3}{\mathrm{Cos}\,r\,\mathrm{Cos}\,\varrho_3}.$$

Eine ähnliche Umformung der Ausdrücke (184) für M_1, M_2, M_3 geben folgendes ebenso einfache Resultat:

(189)

$$M_1 = \frac{\operatorname{Cos}\delta_1}{\operatorname{Cos}\varrho \operatorname{Cos} r_1}, \quad M_2 = \frac{\operatorname{Cos}\delta_2}{\operatorname{Cos}\varrho \operatorname{Cos} r_2}, \quad M_3 = \frac{\operatorname{Cos}\delta_3}{\operatorname{Cos}\varrho \operatorname{Cos} r_3}.$$

Substituirt man diese für die M gefundenen einfachen Werthe in die Gleichungen (161) und (173) und reducirt, so folgt:

$$(190) \ldots \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Cos} d}{\operatorname{Cos} r} = \dfrac{\operatorname{Cos}\delta_1}{\operatorname{Cos} r_1} + \dfrac{\operatorname{Cos}\delta_2}{\operatorname{Cos} r_2} + \dfrac{\operatorname{Cos}\delta_3}{\operatorname{Cos} r_3}, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{Cos} d}{\operatorname{Sin}\varrho} = \dfrac{\operatorname{Cos} d_1}{\operatorname{Sin}\varrho_1} + \dfrac{\operatorname{Cos} d_2}{\operatorname{Sin}\varrho_2} + \dfrac{\operatorname{Cos} d_3}{\operatorname{Sin}\varrho_3}; \end{cases}$$

von welchen beiden Gleichungen die letztere als das vollständige Analogon (als eine Verallgemeinerung) der für das ebene Dreieck giltigen Relation

$$(174) \ldots\ldots \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}$$

zu betrachten ist.

Die Gleichungen (188) und (189) können auch in folgender Art angesetzt werden:

$$(191) \ldots \begin{cases} \operatorname{Cos} d = \operatorname{Cos} r \operatorname{Cos}\varrho M, \\ \operatorname{Cos} d_1 = \operatorname{Cos} r \operatorname{Cos}\varrho_1 M_1, \\ \operatorname{Cos} d_2 = \operatorname{Cos} r \operatorname{Cos}\varrho_2 M_2, \\ \operatorname{Cos} d_3 = \operatorname{Cos} r \operatorname{Cos}\varrho_3 M_3; \end{cases}$$

$$(192) \ldots \begin{cases} \operatorname{Cos}\delta_1 = \operatorname{Cos}\varrho \operatorname{Cos} r_1 M_1, \\ \operatorname{Cos}\delta_2 = \operatorname{Cos}\varrho \operatorname{Cos} r_2 M_2, \\ \operatorname{Cos}\delta_3 = \operatorname{Cos}\varrho \operatorname{Cos} r_3 M_3; \end{cases}$$

und diese geben die Distanzen $d, d_1, d_2, d_3;\ \delta_1, \delta_2, \delta_3$, wenn man für die M die nach §. 77. immer positiv zu nehmenden Quadratwurzeln der Ausdrücke (182) und (184) substituirt.

§. 85.

Da nach den Gleichungen (99) in §. 41.:

$$4\varDelta' \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon = 4\varDelta' \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B+C) = 1 + \operatorname{Cos} a + \operatorname{Cos} b + \operatorname{Cos} c,$$
$$4\varDelta'' \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varepsilon_1 = 4\varDelta'' \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(B+C-A) = 1 + \operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} c;$$

so können die Relationen (137) in §. 55. auch auf folgende Art angesetzt werden:

(193)

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\varrho_2 + \operatorname{tg}\varrho_3 - \operatorname{tg}\varrho &= \operatorname{tg} r\ (1 + \operatorname{Cos} a + \operatorname{Cos} b + \operatorname{Cos} c),\\
\operatorname{tg}\varrho + \operatorname{tg}\varrho_2 + \operatorname{tg}\varrho_3 - \operatorname{tg}\varrho_1 &= \operatorname{tg} r_1 (1 + \operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} c),\\
\operatorname{tg}\varrho + \operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\varrho_3 - \operatorname{tg}\varrho_2 &= \operatorname{tg} r_2 (1 + \operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} c),\\
\operatorname{tg}\varrho + \operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\varrho_2 - \operatorname{tg}\varrho_3 &= \operatorname{tg} r_3 (1 + \operatorname{Cos} c - \operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b);
\end{aligned}$$

von welchen die erste für das ebene Dreieck in die Relation

(194) . . . . $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = 4r$

übergeht.

Werden diese vier Gleichungen ihrer Ordnung nach durch $\operatorname{tg} r$, $\operatorname{tg} r_1$, $\operatorname{tg} r_2$, $\operatorname{tg} r_3$ dividirt, indem man dieselben gleichzeitig durch ihre Werthe aus (54) §. 22. ersetzt und dann alle addirt, so folgt als Bedingungsgleichung, durch welche die vier Radien ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 mit einander verbunden sind:

(195) . . .
$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\varrho_2 + \operatorname{tg}\varrho_3 - \operatorname{tg}\varrho}{\operatorname{ctg}\varrho_1 + \operatorname{ctg}\varrho_2 + \operatorname{ctg}\varrho_3 - \operatorname{ctg}\varrho}\\
&+ \frac{\operatorname{tg}\varrho + \operatorname{tg}\varrho_2 + \operatorname{tg}\varrho_3 - \operatorname{tg}\varrho_1}{\operatorname{ctg}\varrho + \operatorname{ctg}\varrho_2 + \operatorname{ctg}\varrho_3 - \operatorname{ctg}\varrho_1}\\
&+ \frac{\operatorname{tg}\varrho + \operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\varrho_3 - \operatorname{tg}\varrho_2}{\operatorname{ctg}\varrho + \operatorname{ctg}\varrho_1 + \operatorname{ctg}\varrho_3 - \operatorname{ctg}\varrho_2}\\
&+ \frac{\operatorname{tg}\varrho + \operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\varrho_2 - \operatorname{tg}\varrho_3}{\operatorname{ctg}\varrho + \operatorname{ctg}\varrho_1 + \operatorname{ctg}\varrho_2 - \operatorname{ctg}\varrho_3}
\end{aligned}\right\} = 2.$$

Eine andere minder durchsichtige Form der Bedingungsgleichung habe ich in §. 13. unter (22) gegeben.

Wendet man die Gleichungen (193) und (195) auf das Polardreieck an, unter Benutzung des

> *Lehrsatzes*: Die Summe der Radien des einem sphärischen Dreieck eingeschriebenen und des seinem Polardreieck umschriebenen Kreises ist constant gleich einem Quadranten und umgekehrt,

welchen ich in §. 21. bewiesen habe, so gelangt man unmittelbar zu folgenden Gleichungen:

(196)

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} r_1 + \operatorname{ctg} r_2 + \operatorname{ctg} r_3 - \operatorname{ctg} r &= \operatorname{ctg}\varrho\ (1 - \operatorname{Cos} A - \operatorname{Cos} B - \operatorname{Cos} C),\\
\operatorname{ctg} r + \operatorname{ctg} r_2 + \operatorname{ctg} r_3 - \operatorname{ctg} r_1 &= \operatorname{ctg}\varrho_1 (1 - \operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} C),\\
\operatorname{ctg} r + \operatorname{ctg} r_1 + \operatorname{ctg} r_3 - \operatorname{ctg} r_2 &= \operatorname{ctg}\varrho_2 (1 - \operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} C),\\
\operatorname{ctg} r + \operatorname{ctg} r_1 + \operatorname{ctg} r_2 - \operatorname{ctg} r_3 &= \operatorname{ctg}\varrho_3 (1 - \operatorname{Cos} C + \operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} B);
\end{aligned}$$

$$(197) \ldots \left\{ \begin{aligned} & \frac{\operatorname{ctg} r_1 + \operatorname{ctg} r_2 + \operatorname{ctg} r_3 - \operatorname{ctg} r}{\operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3 - \operatorname{tg} r} \\ + & \frac{\operatorname{ctg} r + \operatorname{ctg} r_2 + \operatorname{ctg} r_3 - \operatorname{ctg} r_1}{\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3 - \operatorname{tg} r_1} \\ + & \frac{\operatorname{ctg} r + \operatorname{ctg} r_1 + \operatorname{ctg} r_3 - \operatorname{ctg} r_2}{\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_3 - \operatorname{tg} r_2} \\ + & \frac{\operatorname{ctg} r + \operatorname{ctg} r_1 + \operatorname{ctg} r_2 - \operatorname{ctg} r_3}{\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 - \operatorname{tg} r_3} \end{aligned} \right\} = 2,$$

von welchen die letzte **die Bedingungsgleichung** ist, durch welche die vier Radien r, r_1, r_2, r_3 der dem Hauptdreieck und seinen Nebendreiecken umschriebenen Kreise mit einander verbunden sind. Eine andere Form derselben steht unter (60) in §. 23.

§. 86.

Durch Auflösung der Distanzgleichungen (152) in Bezug auf $\operatorname{tg}\varrho$, $\operatorname{tg}\varrho_1$, $\operatorname{tg}\varrho_2$, $\operatorname{tg}\varrho_3$ erhält man:

$$-\operatorname{tg}\varrho = \frac{(M\operatorname{tg} d)^2 - \operatorname{tg}^2 r}{2\operatorname{tg} r}, \quad \operatorname{tg}\varrho_1 = \frac{(M_1\operatorname{tg} d_1)^2 - \operatorname{tg}^2 r}{2\operatorname{tg} r},$$
$$\operatorname{tg}\varrho_2 = \frac{(M_2\operatorname{tg} d_2)^2 - \operatorname{tg}^2 r}{2\operatorname{tg} r}, \quad \operatorname{tg}\varrho_3 = \frac{(M_3\operatorname{tg} d_3)^2 - \operatorname{tg}^2 r}{2\operatorname{tg} r};$$

und durch Addition derselben folgt, indem für die M die Werthe aus (188) gesetzt werden, unter Anwendung der ersten Gleichung in (193) nach einiger Reduction:

$$(198) \quad \left(\frac{\operatorname{Sin} d}{\operatorname{Cos}\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Sin} d_1}{\operatorname{Cos}\varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Sin} d_2}{\operatorname{Cos}\varrho_2}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Sin} d_3}{\operatorname{Cos}\varrho_3}\right)^2$$
$$= 4\operatorname{Sin}^2 r(\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a + \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b + \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c).$$

Da für das ebene Dreieck die Sinus den Bogen gleich werden und die Cosinus gleich 1, so folgt hierfür:

$$(199) \ldots\ldots d^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 12r^2,$$

und diese Gleichung ist der mathematische Ausdruck des

> *Lehrsatzes*: **Die Summe der Quadrate der Entfernungen des Mittelpunktes des einem Dreieck umschriebenen Kreises von den Mittelpunkten seiner vier Berührungskreise ist gleich dem zwölffachen Quadrate des Radius des umschriebenen Kreises,**

eines Satzes, welchen ich bereits in Thl. XXXIII. S. 420. bewiesen habe. Die Gleichung (198), für das sphärische Dreieck giltig, ist als die entsprechende Verallgemeinerung des vorstehenden Satzes zu betrachten, in welcher er als specieller Fall enthalten ist.

Aus der ersten Gleichung in (152) und jenen (156) folgert man mit Rücksicht auf die Werthe von M, M_1, M_2, M_3 aus (188) und (189) ohne Schwierigkeit, dass

$$\left(\frac{\operatorname{Sin} d}{\operatorname{Sin} r}\right)^2 = \frac{(M \operatorname{tg} d)^2}{\operatorname{tg}^2 r} \operatorname{Cos}^2 \varrho = \operatorname{Cos}^2 \varrho \left(1 - \frac{2 \operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg} r}\right),$$
$$\left(\frac{\operatorname{Sin} \delta_1}{\operatorname{Sin} r_1}\right)^2 = \frac{(M_1 \operatorname{tg} \delta_1)^2}{\operatorname{tg}^2 r_1} \operatorname{Cos}^2 \varrho = \operatorname{Cos}^2 \varrho \left(1 - \frac{2 \operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg} r_1}\right),$$
$$\left(\frac{\operatorname{Sin} \delta_2}{\operatorname{Sin} r_2}\right)^2 = \frac{(M_2 \operatorname{tg} \delta_2)^2}{\operatorname{tg}^2 r_2} \operatorname{Cos}^2 \varrho = \operatorname{Cos}^2 \varrho \left(1 - \frac{2 \operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg} r_2}\right),$$
$$\left(\frac{\operatorname{Sin} \delta_3}{\operatorname{Sin} r_3}\right)^2 = \frac{(M_3 \operatorname{tg} \delta_3)^2}{\operatorname{tg}^2 r_3} \operatorname{Cos}^2 \varrho = \operatorname{Cos}^2 \varrho \left(1 - \frac{2 \operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg} r_3}\right).$$

Werden nun diese vier Gleichungen addirt und zur Reduction die erste der Gleichungen (196) benutzt, so gelangt man zu folgender, der Gleichung (198) ähnlichen Beziehung:

$$(200) \quad \left(\frac{\operatorname{Sin} d}{\operatorname{Sin} r}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Sin} \delta_1}{\operatorname{Sin} r_1}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Sin} \delta_2}{\operatorname{Sin} r_2}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Sin} \delta_3}{\operatorname{Sin} r_3}\right)^2$$
$$= 4 \operatorname{Cos}^2 \varrho \left(\operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} A + \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} B + \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} C\right),$$

welche auch aus dieser durch den Uebergang auf das Polardreieck nach Anwendung des Lehrsatzes in §. 70. abgeleitet werden kann.

§. 87.

Werden die zu Anfang des vorigen Paragraphen aufgestellten Werthe für $\operatorname{tg} \varrho$, $\operatorname{tg} \varrho_1$, $\operatorname{tg} \varrho_2$, $\operatorname{tg} \varrho_3$ in die auf Null gebrachte Relation (173) substituirt und dieselbe durch $4k$ dividirt, wobei

$$k = \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} a + \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} b + \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} c,$$

so gelangt man zu folgender Gleichung:

$$\frac{M}{4k \operatorname{tg}^2 r - 4k (M \operatorname{tg} d)^2} + \frac{M_1}{4k \operatorname{tg}^2 r - 4k (M_1 \operatorname{tg} d_1)^2}$$
$$+ \frac{M_2}{4k \operatorname{tg}^2 r - 4k (M_2 \operatorname{tg} d_2)^2} + \frac{M_3}{4k \operatorname{tg}^2 r - 4k (M_3 \operatorname{tg} d_3)^2} = 0;$$

ersetzt man in dieser $4k \operatorname{tg}^2 r$ durch seinen aus (198) folgenden Werth und reducirt, so erhält man:

(201)

$$\frac{\dfrac{\operatorname{Cos} d}{\operatorname{Cos} \varrho}}{\left(\dfrac{\operatorname{Sin} d_1}{\operatorname{Cos} \varrho_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\operatorname{Sin} d_2}{\operatorname{Cos} \varrho_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\operatorname{Sin} d_3}{\operatorname{Cos} \varrho_3}\right)^2 - (4k-1)\left(\dfrac{\operatorname{Sin} d}{\operatorname{Cos} \varrho}\right)^2}$$

$$+\frac{\dfrac{\operatorname{Cos} d_1}{\operatorname{Cos} \varrho_1}}{\left(\dfrac{\operatorname{Sin} d}{\operatorname{Cos} \varrho}\right)^2 + \left(\dfrac{\operatorname{Sin} d_2}{\operatorname{Cos} \varrho_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\operatorname{Sin} d_3}{\operatorname{Cos} \varrho_3}\right)^2 - (4k-1)\left(\dfrac{\operatorname{Sin} d_1}{\operatorname{Cos} \varrho_1}\right)^2}$$

$$+\frac{\dfrac{\operatorname{Cos} d_2}{\operatorname{Cos} \varrho_2}}{\left(\dfrac{\operatorname{Sin} d}{\operatorname{Cos} \varrho}\right)^2 + \left(\dfrac{\operatorname{Sin} d_1}{\operatorname{Cos} \varrho_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\operatorname{Sin} d_3}{\operatorname{Cos} \varrho_3}\right)^2 - (4k-1)\left(\dfrac{\operatorname{Sin} d_2}{\operatorname{Cos} \varrho_2}\right)^2}$$

$$+\frac{\dfrac{\operatorname{Cos} d_3}{\operatorname{Cos} \varrho_3}}{\left(\dfrac{\operatorname{Sin} d}{\operatorname{Cos} \varrho}\right)^2 + \left(\dfrac{\operatorname{Sin} d_1}{\operatorname{Cos} \varrho_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\operatorname{Sin} d_2}{\operatorname{Cos} \varrho_2}\right)^2 - (4k-1)\left(\dfrac{\operatorname{Sin} d_3}{\operatorname{Cos} \varrho_3}\right)^2}$$

$$=0.$$

Für das ebene Dreieck werden die Sinus den Bogen gleich, die Cosinus gleich 1, also $k=3$, $4k-1=11$, und man hat als Bedingungsgleichung zwischen den vier Distanzen d, d_1, d_2, d_3 des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der vier Berührungskreise:

$$(202)\;\ldots\;\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{d_1^2+d_2^2+d_3^2-11d^2} \\ +\dfrac{1}{d^2+d_2^2+d_3^2-11d_1^2} \\ +\dfrac{1}{d^2+d_1^2+d_3^2-11d_2^2} \\ +\dfrac{1}{d^2+d_1^2+d_2^2-11d_3^2} \end{array}\right\}=0,$$

welche ich bereits in meiner Abhandlung: Zur Lehre vom Dreieck, Thl. XXXIII. S. 420., bewiesen habe.

LII.

Strenger Beweis eines bekannten Satzes von dem Krümmungskreise der Curven im Raume oder der Curven von doppelter Krümmung mittelst der Gränzenmethode.

(Ein Nachtrag zu der Abhandlung: „Neue Darstellung der Theorie der Berührung und Krümmung der Curven" in Thl. XXX. Nr. XL.)

Von
dem Herausgeber.

In der oben genannten Abhandlung habe ich, um diese Abhandlung damals nicht zu sehr auszudehnen, einen bekannten Satz von dem Krümmungskreise der Curven von doppelter Krümmung nicht entwickelt, weil ich demselben, so interessant er auch an sich ist, doch keine besondere Wichtigkeit für weitere Anwendungen der Theorie des Krümmungskreises beilegen kann. Da ich aber vor Kurzem durch einen meiner Schüler wieder an diesen Satz erinnert und auf diese Weise veranlasst wurde, den Beweis desselben nach der in der oben genannten Abhandlung überall in Anwendung gebrachten ganz strengen Gränzenmethode, der ich auch in der höheren Geometrie allein Geltung zuerkennen kann, weil sie allein — aber auch in der schönsten und lehrreichsten Weise — zu völliger Strenge, Klarheit und Evidenz führt und vor Fehlschlüssen schützt, zu entwickeln; so will ich diesen Beweis, welcher, wie ich glaube, auch ein gutes Beispiel für die Anwendung der strengen Gränzenmethode liefert, als Nachtrag zu der obigen Abhandlung, und in der Hoffnung, dadurch vielleicht auch manchem Anderen einen Dienst zu erweisen, im Folgenden mittheilen, indem ich mich ganz an die in

Rede stehende Abhandlung anschliessen und auch die dort gebrauchten Bezeichnungen, so weit sie hier zur Anwendung kommen, überall beibehalten werde. Ich wiederhole, dass die Entwickelung des Satzes nach der auch in der höheren Geometrie überall nur in Anwendung zu bringenden strengen Gränzenmethode der alleinige Zweck dieses Aufsatzes war, welcher insofern auch der Tendenz des Archivs ganz entspricht. Werden die Entwickelungen nach dieser Methode auch zuweilen etwas weitläufiger, so ist der Gewinn an Strenge und Evidenz um so grösser, namentlich für den Unterricht.

Wenn wir einen beliebigen, aber bestimmten Punkt einer sogenannten doppelt gekrümmten Curve durch (xyz), die laufenden Coordinaten durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnen, und, wie gewöhnlich, uns x, y, z als sämmtlich von einer Variablen φ abhängig denken, so ist

$$1) \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\mathfrak{x}-x)+\frac{\partial y}{\partial \varphi}(\mathfrak{y}-y)+\frac{\partial z}{\partial \varphi}(\mathfrak{z}-z)=0$$

die Gleichung der Normalebene der Curve in dem Punkte (xyz) *).

Bezeichnen wir nun die Coordinaten eines zweiten Punktes der Curve, eines dem Punkte (xyz) benachbarten Punktes derselben, durch $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$; so ist eben so die Gleichung der diesem zweiten Punkte entsprechenden Normalebene der Curve:

$$2) \quad \left.\begin{array}{l} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\Delta\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\{\mathfrak{x}-(x+\Delta x)\} \\ +\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\Delta\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\{\mathfrak{y}-(y+\Delta y)\} \\ +\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}+\Delta\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\{\mathfrak{z}-(z+\Delta z)\} \end{array}\right\} =0,$$

oder:

$$3) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\Delta\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)(\mathfrak{x}-x)+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\Delta\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)(\mathfrak{y}-y)+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}+\Delta\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)(\mathfrak{z}-z)$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\Delta\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\Delta\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\Delta y+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}+\Delta\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\Delta z.$$

*) A. a. O. S. 371. Nr. 10).

Um nun die Gleichungen der Durchschnittslinie der beiden durch die Gleichungen 1) und 3) charakterisirten Normalebenen zu finden, wenden wir, wie immer in solchen Fällen, am Besten das in dem Aufsatze: „Ueber die Auflösung dreier Gleichungen mit drei unbekannten Grössen, von denen wenigstens zwei lineare Gleichungen sind“ in Theil XXXVII. Nr. XXII. entwickelte Rechnungsverfahren an. Setzen wir nämlich der Kürze wegen:

4)

$$\Sigma^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2,$$

$$\Sigma_1{}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \Delta\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \Delta\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \Delta\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2,$$

$$W = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\Delta\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\Delta\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\Delta\frac{\partial z}{\partial \varphi};$$

also:

5)

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \Delta\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \Delta\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \Delta\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = \Sigma^2 + W;$$

ferner:

6)

$$K = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \Delta\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \Delta\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\Delta y + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \Delta\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\Delta z;$$

so erhalten die in dem vorher genannten Aufsatze durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichneten Grössen im vorliegenden Falle die folgenden Werthe:

7)

$$\mathfrak{A} = \frac{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \Delta\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\Sigma^2 - \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\Sigma^2 + W)\right\}K}{\Sigma^2\Sigma_1{}^2 - (\Sigma^2 + W)^2},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \Delta\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\Sigma^2 - \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\Sigma^2 + W)\right\}K}{\Sigma^2\Sigma_1{}^2 - (\Sigma^2 + W)^2},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \Delta\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\Sigma^2 - \frac{\partial z}{\partial \varphi}(\Sigma^2 + W)\right\}K}{\Sigma^2\Sigma_1{}^2 - (\Sigma^2 + W)^2};$$

oder kürzer:

8)

$$\mathfrak{A}=\frac{(\Sigma^2\varDelta\frac{\partial x}{\partial\varphi}-W\frac{\partial x}{\partial\varphi})K}{\Sigma^2\Sigma_1{}^2-(\Sigma^2+W)^2},$$

$$\mathfrak{B}=\frac{(\Sigma^2\varDelta\frac{\partial y}{\partial\varphi}-W\frac{\partial y}{\partial\varphi})K}{\Sigma^2\Sigma_1{}^2-(\Sigma^2+W)^2},$$

$$\mathfrak{C}=\frac{(\Sigma^2\varDelta\frac{\partial z}{\partial\varphi}-W\frac{\partial z}{\partial\varphi})K}{\Sigma^2\Sigma_1{}^2-(\Sigma^2+W)^2};$$

oder, weil offenbar

$$\Sigma_1{}^2=\Sigma^2+2W+(\varDelta\frac{\partial x}{\partial\varphi})^2+(\varDelta\frac{\partial y}{\partial\varphi})^2+(\varDelta\frac{\partial z}{\partial\varphi})^2,$$

also:

$$\Sigma^2\Sigma_1{}^2-(\Sigma^2+W)^2=\Sigma^2\{(\varDelta\frac{\partial x}{\partial\varphi})^2+(\varDelta\frac{\partial y}{\partial\varphi})^2+(\varDelta\frac{\partial z}{\partial\varphi})^2\}-W^2$$

ist:

8*)

$$\mathfrak{A}=\frac{(\Sigma^2\varDelta\frac{\partial x}{\partial\varphi}-W\frac{\partial x}{\partial\varphi})K}{\Sigma^2\{(\varDelta\frac{\partial x}{\partial\varphi})^2+(\varDelta\frac{\partial y}{\partial\varphi})^2+(\varDelta\frac{\partial z}{\partial\varphi})^2\}-W^2},$$

$$\mathfrak{B}=\frac{(\Sigma^2\varDelta\frac{\partial y}{\partial\varphi}-W\frac{\partial y}{\partial\varphi})K}{\Sigma^2\{(\varDelta\frac{\partial x}{\partial\varphi})^2+(\varDelta\frac{\partial y}{\partial\varphi})^2+(\varDelta\frac{\partial z}{\partial\varphi})^2\}-W^2},$$

$$\mathfrak{C}=\frac{(\Sigma^2\varDelta\frac{\partial z}{\partial\varphi}-W\frac{\partial z}{\partial\varphi})K}{\Sigma^2\{(\varDelta\frac{\partial x}{\partial\varphi})^2+(\varDelta\frac{\partial y}{\partial\varphi})^2+(\varDelta\frac{\partial z}{\partial\varphi})^2\}-W^2}.$$

Setzen wir jetzt:

9)

$$\mathrm{A}=\frac{\partial y}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}+\varDelta\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\varDelta\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial y}{\partial\varphi}\varDelta\frac{\partial z}{\partial\varphi}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\varDelta\frac{\partial y}{\partial\varphi},$$

$$\mathrm{B}=\frac{\partial z}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\varDelta\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}+\varDelta\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial z}{\partial\varphi}\varDelta\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\varDelta\frac{\partial z}{\partial\varphi},$$

$$\mathrm{C}=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\varDelta\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\varDelta\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\varDelta\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\varDelta\frac{\partial x}{\partial\varphi}$$

und bezeichnen durch G einen gewissen Factor, so ist, wegen der Gleichungen 1) und 3), nach den in der vorher genannten Abhandlung bewiesenen Formeln:

10)

$$\mathfrak{x}-x=\mathfrak{A}+GA,\quad \mathfrak{y}-y=\mathfrak{B}+GB,\quad \mathfrak{z}-z=\mathfrak{C}+GC;$$

also:

11)

$$\frac{\mathfrak{x}-x-\mathfrak{A}}{A}=\frac{\mathfrak{y}-y-\mathfrak{B}}{B}=\frac{\mathfrak{z}-z-\mathfrak{C}}{C},$$

welches die gesuchten Gleichungen der Durchschnittslinie der beiden Normalebenen sind.

Wir wollen nun den durch die Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ bestimmten Nachbarpunkt des Punktes (xyz) diesem letzteren Punkte immer näher und näher rücken lassen, natürlich in der gegebenen Curve, welches wir dadurch bewirken, dass wir $\Delta\varphi$ sich der Null nähern lassen, und wollen untersuchen, ob dann die durch die Gleichungen 11) bestimmte Durchschnittslinie der beiden Normalebenen sich einer ihrer Lage nach völlig bestimmten Geraden im Raume immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade als ihrer Gränze oder Gränzlinie nähert. Zu dem Ende drücken wir zunächst die Gleichungen 11) auf folgende Art aus:

12)

$$\frac{\mathfrak{x}-x-\mathfrak{A}}{\frac{A}{\Delta\varphi}}=\frac{\mathfrak{y}-y-\mathfrak{B}}{\frac{B}{\Delta\varphi}}=\frac{\mathfrak{z}-z-\mathfrak{C}}{\frac{C}{\Delta\varphi}}.$$

Nach 9) ist:

$$\frac{A}{\Delta\varphi}=\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\Delta\frac{\partial z}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\Delta\frac{\partial y}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi},$$

$$\frac{B}{\Delta\varphi}=\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\Delta\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\Delta\frac{\partial z}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi},$$

$$\frac{C}{\Delta\varphi}=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\Delta\frac{\partial y}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\Delta\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi};$$

also nach den Begriffen der Differentialrechnung:

$$\text{Lim}\frac{\text{A}}{\Delta\varphi}=\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2},$$
$$\text{Lim}\frac{\text{B}}{\Delta\varphi}=\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2},$$
$$\text{Lim}\frac{\text{C}}{\Delta\varphi}=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$13) \ldots\ldots \begin{cases} A=\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2},\\[2ex] B=\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2},\\[2ex] C=\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\end{cases}$$

setzen:

$$14) \ldots \text{Lim}\frac{\text{A}}{\Delta\varphi}=A,\quad \text{Lim}\frac{\text{B}}{\Delta\varphi}=B,\quad \text{Lim}\frac{\text{C}}{\Delta\varphi}=C.$$

Die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in 8*) können wir auf folgende Art ausdrücken:

$$\mathfrak{A}=\frac{\left(\Sigma^2\dfrac{\Delta\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}-\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{W}{\Delta\varphi}\right)\dfrac{K}{\Delta\varphi}}{\Sigma^2\left\{\left(\dfrac{\Delta\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta\frac{\partial y}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta\frac{\partial z}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}\right)^2\right\}-\left(\dfrac{W}{\Delta\varphi}\right)^2},$$

$$\mathfrak{B}=\frac{\left(\Sigma^2\dfrac{\Delta\frac{\partial y}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}-\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{W}{\Delta\varphi}\right)\dfrac{K}{\Delta\varphi}}{\Sigma^2\left\{\left(\dfrac{\Delta\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta\frac{\partial y}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta\frac{\partial z}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}\right)^2\right\}-\left(\dfrac{W}{\Delta\varphi}\right)^2},$$

$$\mathfrak{C}=\frac{\left(\Sigma^2\dfrac{\Delta\frac{\partial z}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}-\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{W}{\Delta\varphi}\right)\dfrac{K}{\Delta\varphi}}{\Sigma^2\left\{\left(\dfrac{\Delta\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta\frac{\partial y}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta\frac{\partial z}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}\right)^2\right\}-\left(\dfrac{W}{\Delta\varphi}\right)^2}.$$

Nun ist aber nach 4) und 6):

$$\frac{W}{\Delta\varphi}=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\Delta\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\Delta\frac{\partial y}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\Delta\frac{\partial z}{\partial\varphi}}{\Delta\varphi},$$

$$\frac{K}{\varDelta\varphi}=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\varDelta\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\frac{\varDelta x}{\varDelta\varphi}+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\varDelta\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\frac{\varDelta y}{\varDelta\varphi}+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}+\varDelta\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\frac{\varDelta z}{\partial\varphi};$$

also offenbar:

15)

$$\operatorname{Lim}\frac{W}{\varDelta\varphi}=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{K}{\varDelta\varphi}=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=\Sigma^2;$$

wobei man nicht unbeachtet zu lassen hat, dass natürlich

$$\operatorname{Lim}\varDelta\frac{\partial x}{\partial\varphi}=0,\quad \operatorname{Lim}\varDelta\frac{\partial y}{\partial\varphi}=0,\quad \operatorname{Lim}\varDelta\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0$$

zu setzen ist; folglich ist, wenn wir der Kürze wegen:

16)

$$\Sigma'^2=\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)^2,$$

$$T=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}$$

setzen, nach dem Obigen offenbar:

17)

$$\operatorname{Lim}\mathfrak{A}=\frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\Sigma^2-\frac{\partial x}{\partial\varphi}T\right)\Sigma^2}{\Sigma^2\Sigma'^2-T^2},$$

$$\operatorname{Lim}\mathfrak{B}=\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\Sigma^2-\frac{\partial y}{\partial\varphi}T\right)\Sigma^2}{\Sigma^2\Sigma'^2-T^2},$$

$$\operatorname{Lim}\mathfrak{C}=\frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\Sigma^2-\frac{\partial z}{\partial\varphi}T\right)\Sigma^2}{\Sigma^2\Sigma'^2-T^2}.$$

Hieraus sehen wir also, dass die durch die Gleichungen 11) charakterisirten Durchschnittslinien der beiden Normalebenen sich wirklich als ihrer Gränze oder Gränzlinie einer ganz bestimmten Geraden im Raume nähern, welche durch die Gleichungen:

18)

$$\frac{\mathfrak{x}-x-\operatorname{Lim}\mathfrak{A}}{A}=\frac{\mathfrak{y}-y-\operatorname{Lim}\mathfrak{B}}{B}=\frac{\mathfrak{z}-z-\operatorname{Lim}\mathfrak{C}}{C}$$

charakterisirt wird. Sind θ, ω, $\overline{\omega}$ die von einer der beiden Richtungen dieser Geraden mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel; so ist bekanntlich:

$$\frac{\cos\theta}{A}=\frac{\cos\omega}{B}=\frac{\cos\overline{\omega}}{C},$$

mittelst welcher Gleichungen, in Verbindung mit der Gleichung

$$\cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\overline{\omega}^2=1,$$

die in Rede stehenden Winkel leicht bestimmt werden können; für A, B, C sind die Werthe 13) zu setzen.

Fällen wir nun auf diese Gränzlinie von dem Punkte (xyz) eine Senkrechte, deren Gleichungen

$$19)\quad \frac{\mathfrak{x}-x}{A'}=\frac{\mathfrak{y}-y}{B'}=\frac{\mathfrak{z}-z}{C'}$$

sein mögen, und bezeichnen den Durchschnittspunkt dieser Senkrechten mit der Gränzlinie durch (XYZ), so haben wir zur Bestimmung der Coordinaten dieses Durchschnittspunktes die folgenden Gleichungen:

20)

$$\frac{X-x-\mathrm{Lim}\,\mathfrak{A}}{A}=\frac{Y-y-\mathrm{Lim}\,\mathfrak{B}}{B}=\frac{Z-z-\mathrm{Lim}\,\mathfrak{C}}{C},$$

$$\frac{X-x}{A'}=\frac{Y-y}{B'}=\frac{Z-z}{C'};$$

also, wenn wir die vorstehenden gleichen Verhältnisse durch G_1 und G_1' bezeichnen:

$$21)\quad \begin{cases} X-x=\mathrm{Lim}\,\mathfrak{A}+G_1A=G_1'A', \\ Y-y=\mathrm{Lim}\,\mathfrak{B}+G_1B=G_1'B', \\ Z-z=\mathrm{Lim}\,\mathfrak{C}+G_1C=G_1'C'. \end{cases}$$

Weil die durch die Gleichungen 20) charakterisirten Geraden auf einander senkrecht stehen, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$AA'+BB'+CC'=0,$$

also nach 21) offenbar:

$$22)\quad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Ferner übersieht man sogleich, dass

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\Sigma^2-\frac{\partial x}{\partial\varphi}T\right)+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\Sigma^2-\frac{\partial y}{\partial\varphi}T\right)+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\Sigma^2-\frac{\partial z}{\partial\varphi}T\right)$$
$$=\Sigma^2 T-\Sigma^2 T=0,$$

also nach 17):

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}\operatorname{Lim}\mathfrak{A}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\operatorname{Lim}\mathfrak{B}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\operatorname{Lim}\mathfrak{C}=0$$

ist; und da nun nach 13) offenbar auch:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}A+\frac{\partial y}{\partial\varphi}B+\frac{\partial z}{\partial\varphi}C=0$$

ist, so ist nach 21):

$$23)\ \ldots\quad \frac{\partial x}{\partial\varphi}(X-x)+\frac{\partial y}{\partial\varphi}(Y-y)+\frac{\partial z}{\partial\varphi}(Z-z)=0.$$

Endlich ist:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\Sigma^2-\frac{\partial x}{\partial\varphi}T\right)+\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\Sigma^2-\frac{\partial y}{\partial\varphi}T\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\Sigma^2-\frac{\partial z}{\partial\varphi}T\right)$$
$$=\Sigma^2\Sigma'^2-T^2,$$

also nach 17):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\operatorname{Lim}\mathfrak{A}+\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\operatorname{Lim}\mathfrak{B}+\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\operatorname{Lim}\mathfrak{C}=\Sigma^2;$$

und weil nun nach 13) offenbar:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}A+\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}B+\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}C=0$$

ist, so ist nach 21):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}(X-x)+\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}(Y-y)+\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}(Z-z)=\Sigma^2$$

oder:

24)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2-\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}(X-x)-\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}(Y-y)-\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}(Z-z)$$
$$=0.$$

Nach 22), 23), 24) haben wir also jetzt zwischen den Coordinaten X, Y, Z die drei folgenden Gleichungen:

25)

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}(X-x)+\frac{\partial y}{\partial\varphi}(Y-y)+\frac{\partial z}{\partial\varphi}(Z-z)=0,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2-\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}(X-x)-\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}(Y-y)-\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}(Z-z)=0.$$

In der Abhandlung Thl. XXX. Nr. XL. S. 398. 32) ist aber in aller Strenge gezeigt worden, dass ganz durch dieselben Gleichungen die Coordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises der Curve in dem Punkte (xyz) bestimmt werden, woraus sich also unmittelbar ergiebt, dass der Punkt (XYZ) der Krümmungsmittelpunkt der Curve für den in ihr liegenden Punkt (xyz) ist.

Legen wir durch den Punkt (xyz) eine auf der durch die Gleichungen 18) charakterisirten Geraden senkrecht stehende Ebene, deren Gleichung

$$A''(\mathfrak{x}-x)+B''(\mathfrak{y}-y)+C''(\mathfrak{z}-z)=0$$

sein mag; so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{A''}{A}=\frac{B''}{B}=\frac{C''}{C},$$

und folglich:

26) . . . . . $A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0$

die Gleichung der in Rede stehenden Ebene; nach Thl. XXX. S. 381. 24) ist dies aber die Gleichung der Osculations-Ebene der Curve in dem in ihr liegenden Punkte (xyz).

Wir gelangen daher jetzt hierdurch zu dem folgenden Satze:

Die Durchschnittslinien der Normalebene einer Curve in einem Punkte derselben mit den ihr benachbarten Normalebenen der Curve nähern sich einer ihrer Lage nach völlig bestimmten Geraden im Raume als Gränze oder Gränzlinie; — die durch den Punkt der Curve gelegte, auf dieser Gränzlinie senkrecht stehende Ebene ist die Osculations-Ebene der Curve in dem in Rede stehenden Punkte; — und wenn man von diesem Punkte auf die Gränzlinie ein Perpendikel fällt, so ist dessen Fusspunkt der Mittelpunkt des Krümmungskreises der Curve in dem genannten Punkte.

In der Abhandlung Thl. XXX. Nr. XL. habe ich S. 402—409

gezeigt, — und zwar für jede in einer beliebigen Ebene im Raume liegende ebene Curve, indem es mein Zweck war, für jede solche Curve ganz im Allgemeinen die Lage des Krümmungskreises zu bestimmen, — dass sich der Krümmungsmittelpunkt einer solchen Curve auch auffassen lässt als der Gränzpunkt der Durchschnittspunkte der Normale der Curve in dem betreffenden Punkte derselben mit den ihr benachbarten Normalen; diesem für ebene Curven geltenden Satze entspricht gewissermassen der oben für beliebige Curven im Raume bewiesene Satz, dessen mittelst der Gränzenmethode streng geführten Beweis ich im Obigen, zur Vervollständigung meiner früheren, oft genannten Abhandlung, mitgetheilt habe; die in diesem Satze bewiesenen Eigenschaften der Osculations-Ebene und des Krümmungskreises aber zur Grundlage der Theorie dieser wichtigen geometrischen Elemente zu machen und als Definitionen derselben zu benutzen, wie dies, so viel ich weiss, in einigen neueren Schriften geschehen ist, ist gewiss einer guten Methode nicht gemäss und entsprechend; man hat es hier eben mit bemerkenswerthen Eigenschaften der in Rede stehenden anderweitig, und zwar nach meiner Meinung bei Weitem am Besten so, wie in Thl. XXX. Nr. XL. von mir geschehen, definirten geometrischen Elemente zu thun, welche, wie im Obigen gezeigt worden, aus der schon auf andere Weise und auf anderer Grundlage erlangten analytischen Bestimmung derselben abzuleiten sind.

LIII.

Miscellen.

Kennzeichen der Theilbarkeit durch 7, 11, 13.

Von dem Herausgeber.

Es ist, wie man sogleich übersieht, allgemein:

$$a^{2\mu n}-1=(a^{\mu n}+1)(a^{\mu n}-1),$$
$$a^{(2\mu+1)n}+1=a^{2\mu n}(a^n+1)-(a^{2\mu n}-1);$$

und man hat also die folgende Reihe von Gleichungen:

$$a^n+1=a^n+1,$$
$$a^{2n}-1=(a^n+1)(a^n-1),$$
$$a^{3n}+1=a^{2n}(a^n+1)-(a^{2n}-1),$$
$$a^{4n}-1=(a^{2n}+1)(a^{2n}-1),$$
$$a^{5n}+1=a^{4n}(a^n+1)-(a^{4n}-1),$$
$$a^{6n}-1=(a^{3n}+1)(a^{3n}-1),$$
$$a^{7n}+1=a^{6n}(a^n+1)-(a^{6n}-1),$$
$$a^{8n}-1=(a^{4n}+1)(a^{4n}-1),$$
$$a^{9n}+1=a^{8n}(a^n+1)-(a^{8n}-1),$$
$$a^{10n}-1=(a^{5n}+1)(a^{5n}-1),$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen erhellet, dass jede in a^n+1 aufgehende Zahl auch in:

$$a^{2n}-1,\quad a^{3n}+1,\quad a^{4n}-1,\quad a^{5n}+1,\quad a^{6n}-1,\quad a^{7n}+1,\ldots.$$

aufgeht, dass also jede in a^n+1 aufgehende Zahl überhaupt auch in

$$a^{2\mu n}-1 \text{ und } a^{(2\mu+1)n}+1$$

aufgeht.

Ist nun N eine beliebige decadische Zahl, so lässt sich dieselbe immer unter der Form:

$$N = a + b.10^3 + c.10^6 + d.10^9 + e.10^{12} + f.10^{15} + \ldots.$$

darstellen, wo a, b, c, d, e, f,.... Gruppen von drei Ziffern unserer Zahl N bezeichnen; nur die letzte oder höchste Gruppe kann auch bloss aus einer Ziffer oder aus zwei Ziffern bestehen.

Aus vorstehender Gleichung ergiebt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} &N - a + b - c + d - e + f - \ldots. \\ &= b.(10^3 + 1) + c.(10^6 - 1) + d.(10^9 + 1) + e.(10^{12} - 1) + \ldots. \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} &N = a - b + c - d + e - f + \ldots. \\ &+ b.(10^3 + 1) + c.(10^6 - 1) + d.(10^9 + 1) + e.(10^{12} - 1) + \ldots., \end{aligned}$$

woraus mittelst des Obigen unmittelbar der folgende Satz hervorgeht:

Jede in 10^3+1 aufgehende Zahl geht in der Zahl N auf oder nicht auf, jenachdem dieselbe in

$$a - b + c - d + e - f + \ldots.$$

aufgeht oder nicht aufgeht.

Weil nun

$$10^3 + 1 = 1001 = 7.11.13$$

ist, so ergiebt sich der folgende Satz:

Die Zahlen 7, 11, 13 gehen in der Zahl N auf oder nicht auf, jenachdem sie in

$$a - b + c - d + e - f + \ldots.$$

aufgehen oder nicht aufgehen.

Es sei z. B.

$$N = 769857639785432\,96,$$

so ist:

$$\begin{aligned} a &= 296 \\ b &= 543 \\ a - b &= -247 \\ c &= 978 \\ a - b + c &= 731 \\ d &= 763 \\ a - b + c - d &= -32 \\ e &= 985 \\ a - b + c - d + e &= 953 \\ f &= 76 \\ a - b + c - d + e - f &= 877 \end{aligned}$$

und weil nun

$$\frac{877}{7}=125\frac{2}{7},\quad \frac{877}{11}=79\frac{8}{11},\quad \frac{877}{13}=67\frac{6}{13}$$

ist, weil also keine der Zahlen 7, 11, 13 in 877 aufgeht, so geht auch keine dieser Zahlen in der obigen Zahl N auf.

Es sei ferner

$$N=306152,$$

so ist:

$$\begin{aligned} a &= 152 \\ b &= 306 \\ a-b &= -154 \end{aligned}$$

und weil nun

$$\frac{-154}{7}=-22,\quad \frac{-154}{11}=-14,\quad \frac{-154}{13}=-11\frac{11}{13}$$

ist, so gehen 7 und 11 in N auf, wogegen 13 in N nicht aufgeht.

Eine vollkommenere Behandlung dieses einfachen Gegenstandes dürfte vielleicht die folgende sein.

Es sei überhaupt α eine in 10^3+1 aufgehende Zahl, und

$$\frac{N}{\alpha}=q+\frac{r}{\alpha},\quad \frac{a-b+c-d+e-\ldots.}{\alpha}=\pm\left(q'+\frac{r'}{\alpha}\right),$$

wo die Reste r, r' beide kleiner als α sind, und das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem die Grösse

$$a-b+c-d+e-\ldots.$$

positiv oder negativ ist. Weil nun nach dem Obigen:

$$N=a-b+c-d+e-f+\ldots.$$
$$+b.(10^3+1)+c.(10^6-1)+d.(10^9+1)+e.(10^{12}-1)+\ldots.$$

ist, und unter der gemachten Voraussetzung α in

$$b.(10^3+1)+c.(10^6-1)+d.(10^9+1)+e.(10^{12}-1)+\ldots.$$

aufgeht; so ist, wenn G eine gewisse ganze Zahl bezeichnet:

$$\frac{N}{\alpha}=\frac{a-b+c-d+e-\ldots.}{\alpha}+G,$$

also

$$q+\frac{r}{\alpha}=\pm\left(q'+\frac{r'}{\alpha}\right)+G,\quad \text{folglich:}\quad \frac{r\mp r'}{\alpha}=G-q\pm q',$$

wo $G-q\pm q'$, daher auch

$$\frac{r \mp r'}{\alpha}$$

eine ganze Zahl ist. Wenn $a - b + c - d + e - \ldots.$ positiv ist, so muss man das obere Zeichen nehmen, und es ist also in diesem Falle

$$\frac{r - r'}{\alpha}$$

eine ganze Zahl; weil nun $r < \alpha$, $r' < \alpha$ ist, so ist auch jedenfalls val. abs. $(r - r') < \alpha$, also $\frac{\text{val. abs. } (r - r')}{\alpha}$ ein echter Bruch, welcher nur dann eine ganze Zahl sein kann, wie er dies nach dem Obigen ist, wenn $r - r' = 0$ oder $r = r'$ ist. Wenn

$$a - b + c - d + e - \ldots.$$

negativ ist, so muss man das untere Zeichen nehmen, und es ist also in diesem Falle

$$\frac{r + r'}{\alpha}$$

eine ganze Zahl; weil nun $r < \alpha$, $r' < \alpha$ ist, so ist $r + r' < 2\alpha$, $\frac{r + r'}{\alpha} < 2$; also, weil dieser Bruch eine ganze Zahl ist: $\frac{r + r'}{\alpha} = 0$ oder $\frac{r + r'}{\alpha} = 1$, folglich $r + r' = 0$ oder $r + r' = \alpha$, wo die erste Gleichung nur dann Statt finden kann, wenn gleichzeitig $r = 0$, $r' = 0$ ist. Hieraus ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz:

Unter der Voraussetzung, dass α eine in $10^3 + 1$ aufgehende Zahl ist, bleiben bei der Division der Zahlen $a - b + c - d + e - \ldots.$ und N durch α, wenn $a - b + c - d + e - \ldots$ positiv ist, jederzeit gleiche Reste übrig; wenn aber $a - b + c - d + e - \ldots.$ negativ ist, so geht α in N auf, oder die bei der Division von $-(a - b + c - d + e - \ldots.)$ und N durch α übrig bleibenden Reste ergänzen sich gegenseitig zu α, jenachdem α in $-(a - b + c - d + e - \ldots.)$ aufgeht oder nicht aufgeht.

Weil 7, 11, 13 in $10^3 + 1$ aufgehen, so kann man diese Zahlen in dem vorstehenden Satze für α setzen.

Es sei z. B. $N = 84998375$, so ist:

$$\begin{aligned} a &= 375 \\ b &= 998 \\ \hline a - b &= -623 \\ c &= 84 \\ \hline a - b + c &= -539 \\ -(a - b + c) &= 539 \end{aligned}$$

$$\frac{539}{7}=77, \quad \frac{539}{11}=49, \quad \frac{539}{13}=41\frac{6}{13};$$

also gehen 7 und 11 in 84998375 auf, und der bei der Division dieser Zahl durch 13 bleibende Rest ist $13-6=7$. In der That ist:

$$\frac{84998375}{7}=12142625, \quad \frac{84998375}{11}=7727125, \quad \frac{84998375}{13}=6538336\frac{7}{13}.$$

Das obige Kennzeichen der Theilbarkeit durch 7, 11, 13 ist schon anderweitig bekannt (m. s.: Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers, par V. A. Lebesgue. Paris. 1864. p. 13. und ein lesenswerthes Programm der Realschule in Neisse von F. Brilka. Neisse 1863. 4°. S. 20.); vielleicht ist aber die obige theoretische Darstellung nicht ganz ohne Interesse. G.

Berichtigungen.

Herr Major Kerz in Darmstadt hat noch nachträglich einige Berichtigungen zu seiner Abhandlung Nr. XVI. in diesem Theile d. A. eingesandt, die ich nachstehend abdrucken lasse. Ausserdem sind aber in dem Blatt S. 137 und S. 138 von Bogen 10, welches schon einmal umgedruckt und dem Heft 2. als Carton beigegeben worden ist, noch einige Versehen stehen geblieben, weshalb ich, um so viel als irgend möglich überall die mir so sehr am Herzen liegende Correctheit zu erzielen, dieses Blatt noch ein zweites Mal umdrucken und dem vorliegenden Heft 4. dieses Theils, an dessen Schluss, nachstehend als Carton beifügen lasse, indem ich bemerke, dass jetzt nur dieses zum zweiten Male umgedruckte, nachstehend hier beigefügte Blatt, als das allein richtige zu betrachten und in Heft 2. für S. 137. und S. 138. einzuheften ist. G.

Berichtigungen zu der Abhandlung Nr. XVI. in diesem Theile.

Seite 127. Zeile 5. v. u. setze: $\pm 27q$ anstatt: „$+27q$".
- 130. 6. Vertikalspalte, setze: $D=0{,}0$ anstatt: „$D=0{,}00$".
- 131. 3. - - $D=0{,}0$ - „$D=0{,}00$".
- 134. 6. - - $D=0{,}0$ - „$D=0{,}000$".
- 140. 3. - Für die Werthe von 099854 abwärts ist $D=0{,}0$.
- 148. 3. - setze: $D=1$ anstatt: „$D=2$".
  In derselben Spalte ist für die Werthe von 0532 abwärts $D=2$.
- 149. 3. Vertikalspalte setze: $D=3$ anstatt: „D".
  6. - für die Werthe 9548 und 9894 ist $D=3$; für die Werthe von 0592 bis einschliesslich 2720 ist $D=4$.
- 169. 9. Zeile v. o. setze: 0,0002399988 anstatt: 0,000239998.

Tabelle I.

P	R	$D=0,0$	P	R	$D=0,0$
3,90	3,159	7887	3,95	3,564875	8466
3,91	3,237871	8002	3,96	3,649536	8584
3,92	3,317888	8117	3,97	3,735373	8702
3,93	3,399057	8233	3,98	3,822392	8821
3,94	3,481384	8349	3,99	3,910599	8940
3,95	3,564875		4,00	4,000000	

Anhang zu Tabelle I.

Q	P	C	P	C	P	C	P	C	P	C	Q
	0,000	—	0,95	—	1,03	+	1,50	+	2,20	—	
1. 9.		0,00006		0,01		0,01		0,001		0,000	1. 9.
2. 8.		00010		01		02		001		000	2. 8.
3. 7.		00014		02		03		002		001	3. 7.
4. 5. 6.		00016		03		04		002		001	4. 5. 6.
	0,050	—	0,96	—	1,04	+	1,60	+	2,30	—	
1. 9.		0,00006		0,01		0,01		0,001		0,001	1. 9
2. 8.		00010		02		01		001		001	2. 8.
3. 7.		00015		03		02		001		001	3. 7.
4. 5. 6.		00017		04		03		002		001	4. 5. 6.
	0,070	—	0,97	—	1,05	+	1,70	+	2,60	—	
1. 9.		0,00006		0,02		0,01		0,001		0,001	1. 9.
2. 8		00011		03		01		001		001	2. 8.
3. 7.		00015		04		01		001		002	3. 7.
4. 5. 6.		00018		05		02		001		003	4. 5. 6.
	0,120	—	0,98	—	1,10	+	1,80	+	2,70	—	
1. 9.		0,003		0,03		0,01		0,0002		0,002	1. 9.
2. 8.		004		05		01		0003		003	2. 8.
3. 7.		004		06		01		0004		004	3. 7.
4. 5. 6.		003		08		01		0004		005	4. 5. 6.
	0,24	—	0,990	—	1,20	+	1,90	+	2,80	—	
1. 9.		0,00		0,00		0,002		0,0001		0,00	1. 9.
2. 8.		00		00		004		0002		00	2. 8.
3. 7.		00		00		005		0003		01	3. 7.
4. 5. 6.		00	0,999	00		006		0003		01	4. 5. 6.
	0,80	—	1,01	+	1,30	+	2,00	—	2,900	—	
1. 9.		0,00		0,03		0,002		0,0001		0,02	1. 9.
2. 8.		00		05		003		0001		03	2. 8.
3. 7.		01		07		004		0002		03	3. 7.
4. 5. 6.		01		09		004		0002		02	4. 5. 6.
	0,90	—	1,02	+	1,40	+	2,10	—	2,930	—	
1. 9.		0,01		0,02		0,001		0,0001		0,02	1. 9.
2. 8.		01		04		001		0002		04	2. 8.
3. 7.		01		06		002		0003		04	3. 7.
4. 5. 6.		02		07		003		0004		02	4. 5. 6.
	0,95		1,03		1,50		2,20		2,940		

Anhang zu Tabelle I.

Q	P	C	P	C	P	C	P	C	P	C	Q
	2,940	—	2,980	—	3,020	+	3,090	+	3,40	+	
1. 9.		0,03		0,1		0,1		0,02		0,001	1. 9.
2. 8.		05		1		2		04		002	2. 8.
3. 7.		05		1		2		04		003	3. 7.
4. 5. 6.		03		1		1		02		004	4. 5. 6.
	2,950	—	2,990	—	3,030	+	3,10	+	3,50	+	
1. 9.		0,04		0,2		0,1		0,01		0,001	1. 9.
2. 8.		06		4		1		01		001	2. 8.
3. 7.		06		4		1		01		002	3. 7.
4. 5. 6.		04	2,995	2		1		01		003	4. 5. 6.
	2,960	—	3,005	+	3,050	+	3,20	+	3,80	+	
1. 9.		0,05		0,3		0,04		0,003		0,001	1. 9.
2. 8.		07		5		06		004		001	2. 8.
3. 7.		07		5		06		006		002	3. 7.
4. 5. 6.		05		3		04		007		002	4. 5. 6.
	2,970	—	3,010	+	3,070	+	3,30	+	4.		
1. 9.		0,06		0,2		0,03		0,002			1. 9.
2. 8.		08		4		05		003			2. 8.
3. 7.		08		4		05		004			3. 7.
4. 5. 6.		06		2		03		005			4. 5. 6.
	2,980		3,020		3,090		3,40				

Literarischer Bericht
CLXV.

Galileifeier.

Ich freue mich, nach mir freundlichst gemachter Anzeige, mittheilen zu können, dass am 18ten Februar d. J., dem dreihundertjährigen Geburtstage des grossen Galilei, auch in Frankfurt an der Oder durch den Oberlehrer Herrn Doctor G. Emsmann eine würdige Feier dieses denkwürdigen Tages in dem physikalischen Lehrzimmer der Realschule vor den Schülern der drei obersten Klassen veranstaltet worden ist.

Greifswald im Mai 1864.

Grunert.

Dr. Franz Woepcke.

(Der folgende kurze Necrolog des der Wissenschaft leider vor Kurzem entrissenen, hauptsächlich um die Geschichte der Mathematik so vielfach verdienten, Dr. F. Woepcke ist auf meine Bitte mir von seinem würdigen 81 Jahr alten Vater, dem Herrn Post-Director a. D. Woepcke in Dessau, mitgetheilt worden, wofür ich demselben meinen innigsten und aufrichtigsten Dank sage. G.)

Franz Woepcke wurde am 6. Mai 1826 geboren, sein Vater war damals Post-Director in Wittenberg. Letzterer, dessen Gesundheit durch viele körperliche Leiden sehr zerstört war, trat im Jahre 1833 in den Ruhestand, und siedelte mit seiner Familie nach Dessau über.

Hier besuchte Franz Woepcke das mit sehr guten Lehrkräften ausgestattete Gymnasium mit solchem Erfolge, dass er schon im April 1843 im noch nicht vollendeten 17ten Lebensjahre die Universität in Berlin beziehen konnte.

Er widmete sich dem Studium der Mathematik und den damit verwandten Wissenschaften. Im Juli 1847 promovirte er daselbst, hielt sich noch einige Monate dort auf, und ging den 1. März 1848 ganz von Berlin ab.

Theils durch eigene Neigung, theils durch den Rath hervorragender Männer der Wissenschaft bewogen, unter denen ich A. v. Humbold nennen darf, der seiner in späteren Jahren auch vortheilhaft im Cosmos erwähnte, fasste er den Entschluss, die Geschichte der Mathematik vorzugsweise zu seinem Studium zu machen, weil auf diesem Felde noch Manches zu thun übrig sei, das aber nur dann mit Erfolg bearbeitet werden konnte, wenn ein Mathematiker mit seiner Wissenschaft zugleich völlige Kenntniss der orientalischen Sprachen, namentlich des Arabischen, verband, um die betreffenden Werke der Araber u.s.w. im Originale lesen können.

Deshalb ging er im April 1848 nach Bonn und hörte bei Professor Freytag ein Privatissimum zur Erlernung der arabischen Sprache.

Er verweilte hier zwei Jahre, habilitirte sich am Anfangs des Jahres 1850 daselbst als Privat-Docent, nahm aber gleich Urlaub auf ein Jahr, um in Paris nun das Studium der arabischen mathematischen Handschriften zu beginnen. Er ging dahin im April desselben Jahres ab. Später hat er in Paris auch das Persische erlernt und Sanscrit studirt. Nach Bonn ist er nicht wieder zurückgekehrt. Ein sehr freundliches Entgegenkommen Seitens namhafter französischer Gelehrten wurde ihm bald zu Theil, wozu ihm seine grosse Gewandtheit in der französischen Sprache sehr behülflich war; dieselben lernten auch bald die Gediegenheit seiner wissenschaftlichen Kenntnisse schätzen. Er ward Mitglied der Société asiatique, die Benutzung der Bibliotheken, auch der kaiserlichen, wurde ihm mit grösster Liberalität gewährt, bald durfte er auch Manuscripte mit in seine Wohnung nehmen. Bereits im Jahre 1851 gab er L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi heraus, in welcher Schrift er darthat, bis zu welchem Punkte die Araber in der Wissenschaft gelangt waren, was früher nicht festgestellt war.

Im Jahre 1853 folgte Extrait du Fakhri. Dieses Werk wurde der Akademie überreicht und von ihr würdig befunden auf kaiserliche Kosten gedruckt zu werden.

Ausserdem sind mehrere kleinere Arbeiten, auch viele Aufsätze in Zeitschriften, seiner Feder entflossen.

Sie erfreueten sich alle vielseitiger Anerkennung der gelehrten Welt. Besonders war auch dieses hinsichtlich seines letzten Werkes:

Mémoire sur la propagation des Chiffres indiens, das im Spätjahre 1863 erschien, der Fall. Es ist auf Kosten der Société asiatique gedruckt, bei der er zuletzt Membre du Conseil war.

Seine Gesundheit war von Kindheit an sehr schwankend, und wurde durch vieles anhaltendes, oft nächtliches Arbeiten, Mangel an Bewegung in späteren Jahren, immer mehr untergraben, namentlich litt er oft bei geringster Erkältung an einer Affection der Respirations - Organe.

Nach einer im Spätjahr 1863 nach London unternommenen Reise in wissenschaftlichen Angelegenheiten, von der er am 6ten December nach Paris zurückkehrte, auf der Ueberfahrt aber einen heftigen Sturm und sonstiges Unwetter zu überstehen hatte, fühlte er sich gleich sehr unwohl. Im Januar 1864 stellte sich ein bedeutendes Geschwür am Kinnbacken ein, das durch Ausnehmen eines Zahnes beseitigt schien, aber es entstanden an derselben Stelle Drüsengeschwülste, welche eine so üble Wendung nahmen, dass er am 25sten März 1864 seinen Leiden erlag. Während seines langen Aufenthaltes in Paris hatte er sich, ausser der Anerkennung seiner wissenschaftlichen Verdienste durch viele namhafte Gelehrte, auch allgemeiner Werthschätzung wegen seines freundschaftlichen Wesens und seines ehrenhaften Wandels zu erfreuen.

Besonders erfreuete er sich der Freundschaft des als Mensch und Gelehrter gleich hochstehenden Professors Mohl, Mitglieds der Akademie, der ihm stets ein väterlicher Freund und Rather war, und ihm auch in edelster und theilnehmendster Weise auf seinem letzten Krankenlager durch öftere Besuche das Entferntsein von liebenden Verwandten weniger schmerzlich machte.

In dem Schreiben, worin dieser treffliche Mann den hochbetagten Eltern des Verstorbenen seinen Tod anzeigte, sagt er von letzterem:

> „Ich sehe mit grösster Freude die zunehmende Achtung, in die er bei den Gelehrten sich gesetzt hatte, und das Anerkennen seines Verdienstes und seines liebenswürdigen Characters in dem fremden Lande. Die Gewissenhaftigkeit seiner Arbeiten hatte das grösste Vertrauen erregt."

Die Société asiatique hatte dem Dr. Woepcke die Uebersetzung des Albiruni anvertrauet. Er hatte die Arbeit erst in Etwas begonnen als sein Tod erfolgte.

So weit der würdige Vater des so früh Vollendeten; ich füge nur noch hinzu, dass derselbe mir, wenn auch persönlich unbekannt, stets ein sehr lieber, von mir hochgeachteter Freund gewesen ist; möge er tüchtige Nachfolger auf der so ruhmvoll betretenen Bahn finden! Die Geschichte der Mathematik bedarf solcher Arbeiter, wie F. Woepcke einer der ausgezeichnetsten war.

Grunert.

Ich bitte sehr, mir recht bald aus kundiger Feder eine Biographie meines, leider nun auch verstorbenen unvergesslichen Freundes Gerling zum Abdruck im Archiv einzusenden. Seit längerer Zeit habe ich einer solchen schon ohne besondere Aufforderung mit Verlangen entgegengesehen. Grunert.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Für die Portepeefähnrichs- und Seekadetten-Prüfung in der Königlich Preussischen Armee und Marine bearbeitet von F. Baron Haller von Hallerstein, Oberst u. s. w. Erster Theil. Arithmetik. — Zweiter Theil. Geometrie. — Fünfte Auflage. Berlin. Nauck und Comp. 1863. 8°.

Ueber ein so weit verbreitetes, vielfach gebrauchtes, allgemein bekanntes und in fünfter Auflage vorliegendes Buch, wie das obige, über dessen Werth das Publikum längst entschieden hat, noch ein besonderes Urtheil auszusprechen und seinen Inhalt ausführlich anzugeben, hat das Archiv nie für angemessen gehalten, selbst wenn der Inhalt und die Bearbeitung dem Zwecke des Buchs so gut entsprechen wie im vorliegenden Falle. Aber einer wesentlichen Erweiterung, welche demselben durch Herrn Dr. Ligowski, Lehrer am Seekadetten-Institut u. s. w. in Berlin, in dieser neuen Auflage zu Theil geworden ist, und wodurch dieselbe sich von allen früheren Auflagen unterscheidet, müssen wir besonders gedenken.

Dem zweiten Theile ist nämlich in zwei Anhängen durch Herrn Dr. Ligowski, ausser den Elementen der sphärischen Trigonometrie an sich (S. 273 — S. 300.), die Anwendung der Stereometrie (S. 256 — S. 272.) und der sphärischen Trigonometrie

(S. 301 — S. 319) auf nautische Astronomie beigefügt worden, um das Buch auch für nautische Lehranstalten in ausgedehnterer Weise brauchbar zu machen. In der sphärischen Trigonometrie ist in anerkennungswerther und zweckmässiger Weise, welcher man immer grösseren und allgemeineren Eingang wünschen muss, der Gebrauch des Supplementardreiecks ganz vermieden worden. Die Anwendungen auf nautische Astronomie betreffen die deutliche Entwickelung der astronomischen Grundbegriffe mit besonderer Rücksicht auf die verschiedenen Arten der Zeit u. s. w., und ausserdem die Lösung aller in der Praxis des Seemanns vorzugsweise in Anwendung kommenden astronomischen Aufgaben, stets natürlich mit gehöriger Rücksicht auf alle nothwendigen Correctionen wie Kimm, Parallaxe, Vergrösserung des Halbmessers, Refraction u. s. w. Zahlreiche zweckmässige Uebungsbeispiele sind diesen Anhängen wie allen übrigen Abschnitten des empfehlenswerthen Buchs in seinen beiden Theilen beigegeben.

Geometrie.

Kegelschnittkantige Pyramiden und curvenkantige Prismen, von krummen Seitenflächen begränzte Körper, welche sich kubiren lassen. Von H. C. E. Martus, ord. Lehrer der Mathematik und Physik an der Königstädtischen Realschule in Berlin. Mit 3 Figurentafeln. Berlin. J. Springer. 1863. 4°.

Der Herr Verf. hat in dieser Schrift verschiedene Körperformen betrachtet, welche er Curvenkantige Prismen (II.), Parallelkantige Pyramiden (III.), Kreiskantige Pyramiden (IV.), Ellipsenkantige Pyramiden (V.), Hyperbelkantige Pyramiden (VI.) nennt, deren Definition und Entstehung in der Schrift selbst nachgesehen werden muss, weil dieselben sich hier unmöglich hinreichend deutlich mit derjenigen Kürze angeben lassen, welche von der Beschränktheit des in diesen literarischen Berichten uns gebotenen Raumes gefordert wird.

Alle diese Körperformen gestatten aber eine elementare Behandlung, welche ihnen von dem Herrn Verf. in sehr ausführlicher und lehrreicher Weise gewidmet worden ist, wobei er auch den Schwerpunkt und andere bemerkenswerthe Punkte nicht unberücksichtigt gelassen hat. Unter den genannten neuen Körperformen sind mehrere der Körper, welche in den gewöhnlichen

Elementen der Stereometrie betrachtet werden, als besondere Fälle enthalten, und nicht wenige der von dem Herrn Verf. gefundenen Sätze und Relationen erscheinen als Verallgemeinerungen allgemein bekannter Beziehungen, wodurch natürlich die Betrachtung noch lehrreicher wird. Vorzugsweise und hauptsächlich hat aber der Herr Verf. sein Augenmerk auf die Bestimmung des Inhalts der betrachteten Körper gerichtet, und dieselbe lediglich auf den bekannten und bereits mehrfach nach verschiedenen Gesichtspunkten betrachteten Satz gegründet, mittelst welches man, wenn der Inhalt der parallelen Querschnitte eines Körpers sich als eine — meistens ganze rationale algebraische — Function ihrer Entfernungen von einer gewissen festen Ebene oder einem gewissen festen Punkte ausdrücken lässt, den Inhalt des Körpers mittelst einer einfachen allgemeinen Formel, deren eigentlicher Grund natürlich in der Integralrechnung zu suchen ist, finden kann. Aus verschiedenen Gesichtspunkten und unter verschiedenen Formen (was aber doch zuletzt im Princip immer auf Dasselbe hinauskommt), in grösserer oder geringerer Allgemeinheit, ist dieser stereometrische Satz behandelt worden u. A. von Brix (Elementar-Lehrbuch der dynamischen Wissenschaften. Anhang. S. 130 — S. 148.), Ligowski (in einer besonderen Schrift: Inhaltsberechnung der Körper nach einer einzigen Formel. Berlin. 1847. und im Archiv. Thl. XXVI. 1856. S. 204), Matzka (Archiv. Thl. XXXIII. 1859. S. 121.), und von dem Herausgeber des Archivs (Archiv. Thl. X. 1847. S. 260.)*). Für den Fall, wenn der Querschnitt Q sich als eine ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades seiner Entfernung x von einer gewissen festen Ebene, also durch eine Formel von der Form

$$Q = a + bx + cx^2$$

ausdrücken lässt, und demnach, wenn V den Inhalt des Körpers bezeichnet,

$$V = ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3$$

ist, hat der Herr Verf. in dem Abschnitte I. oder der Einleitung einen einfachen, dem Zwecke der Schrift, bei'm Unterrichte in der elementaren Stereometrie als Hülfsmittel zu Uebungen der Schüler

---

*) Ich erlaube mir auch auf meine Abhandlung: Ueber die näherungsweise Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale. Archiv. Thl. XIV. S. 225. zu verweisen, deren sehr allgemeiner Inhalt mit dem vorliegenden elementaren Gegenstande wenigstens sehr nahe zusammenhängt. Grunert.

benutzt zu werden, völlig entsprechenden Beweis des obigen Satzes vorangeschickt, und dadurch eine sichere Grundlage für seine weiteren Betrachtungen gewonnen. Wir glauben schliesslich die Schrift Lehrern recht sehr zur Beachtung empfehlen zu dürfen, welche darin vielfachen Stoff zu zweckmässigen stereometrischen Uebungen für ihre Schüler finden werden, wobei das Buch treffliche Dienste zu leisten geeignet ist.

Risposta di Fortunato Padula al programma destinato a promuovere e comparare i metodi per l'invenzione geometrica presentato a' Matematici del Regno delle due Sicilie. Napoli. Stamperia e Cartiera del Fibreno. Largo S. Domenico Maggiore. N. 3. 1839. 4^{0}.

Die obige grössere, etwa 15 Bogen, nebst zwei Figurentafeln, starke Schrift des hochverdienten Herrn Prof. F. Padula in Neapel ist zwar schon im Jahre 1839 erschienen, und ihre jetzige Anzeige dürfte daher als eine sehr verspätete betrachtet werden. Weil aber die italienische Literatur bei uns in Deutschland im Ganzen noch so wenig bekannt und verbreitet ist, ja auch jetzt immer noch italienische Werke auf dem Wege des Buchhandels nur mit Schwierigkeiten bezogen werden können, wie uns nur erst neuerlichst unter Inanspruchnahme unserer Vermittelung *) von verschiedenen Seiten her mehrfach bemerklich gemacht worden ist, die Schrift auch einen ähnlichen Zweck verfolgt wie verschiedene andere in neuerer Zeit, namentlich in Frankreich, erschienene Werke: so halten wir es für zweckmässig, jetzt noch eine kurze Anzeige von derselben zu liefern und sie der Beachtung unserer Leser recht sehr zu empfehlen. Wie der Titel besagt, bezweckt Herr Padula in dieser Schrift eine Vervollkommnung und Vergleichung der verschiedenen Methoden der geometrischen Erfindung oder der verschiedenen Methoden zur Auflösung geometrischer Aufgaben zu geben, und erreicht diesen Zweck mit tiefer Kenntniss der gesammten Geometrie und ihrer Literatur. In letzterer Beziehung beschränkt sich Herr P. freilich, neben den älteren allgemein bekannten berühmten Mathematikern, hauptsächlich auf sein Vaterland — mit besonderer Rücksicht auf Flauti, Fergola u. s. w. — und die Leistungen neuerer französischer Geometer, gewiss weil zur Zeit des Erscheinens der Schrift die deutsche Literatur noch weit weniger als jetzt in Italien bekannt und ver-

---

*) Wir werden in solchen Fällen unsere Vermittelung immer sehr gern eintreten lassen, wenn sie von uns verlangt wird, und erbieten uns dazu bereitwilligst. G.

breitet war, wodurch aber eben deshalb, — und zugleich genauerer Kenntniss der italienischen Literatur wegen, — diese Schrift für deutsche Leser um so interessanter wird, und wiederholt zur Beachtung empfohlen werden muss. Die Charakterisirung der verschiedenen geometrischen Methoden nimmt die erste Abtheilung ein; die zweite ebenso interessante Abtheilung giebt verschiedenartige schöne Auflösungen der drei folgenden schon öfter und eifrig behandelten Probleme, die bekanntlich ihren Ursprung in Italien haben:

I. In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen (Giordano di Ottajano).

II. In ein Dreieck drei Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt (Malfatti).

III. In eine dreiseitige Pyramide vier Kugeln zu beschreiben, von denen jede die drei anderen und drei Seiten der Pyramide berührt. (Erweiterung des Problems von Malfatti auf den Raum). Bei diesem letzteren Probleme haben auch die Arbeiten Steiner's Berücksichtigung gefunden.

Astronomie und Gnomonik.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. apostol. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte. Dritter Folge zwölfter Band. Jahrgang 1862. Wien 1863. 8⁰.

Der vorhergehende Band dieser höchst verdienstlichen, in der regelmässigsten Folge ohne alle Unterbrechung fortschreitenden Annalen ist im Literar. Nr. CLIX S. 14. angezeigt worden. Der vorliegende Band enthält nach der gewöhnlichen Einleitung die Beobachtungen am Meridiankreise vom Jahre 1860, nebst den Resultaten der Beobachtungen am Meridiankreise. I. Planeten- und Cometenpositionen aus den Jahren 1860 bis 1862, beobachtet von Dr. Edmund Weiss. II. Mittlere Positionen von Fixsternen bezogen auf den Anfang des Beobachtungsjahrs, dann Planeten- und Cometen-Beobachtungen am Refractor von sechs Zoll Oeff-

nung. Vom October 1860 bis Ende Mai 1862. Von Dr. Carl Hornstein, Adjunct der k. k. Sternwarte, hierauf Zonenbeobachtungen am Mittagsrohre, endlich die Meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1861, Tafeln zur Reduction der Zonenbeobachtungen und Uebersicht der Zonen. Möge die Vorsehung dem verdienten Herrn Herausgeber noch lange ungeschwächte Kraft vergönnen zur unausgesetzten Fortsetzung dieser höchst verdienstlichen Publicationen!

Zugleich mit diesem Bande der Annalen ist auch erschienen ein neuer Band der älteren Wiener meteorologischen Beobachtungen, deren Veröffentlichung in höchst anerkennungswerther Weise auf Kosten der kais. österreichischen Regierung geschieht. Die vorhergehenden Bände dieser sehr verdienstlichen Publication sind in früheren Nummern des Literarischen Berichts (Nr. CXLI. S. 12.—Nr. CXLVI. S. 9.—Nr. CLIX. S. 15.) von uns angezeigt; der jetzt vor uns liegende neue Band hat den Titel:

Meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte in Wien von 1775 bis 1855. Auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow, Director, und Edmund Weiss, Adjunct der k. k. Sternwarte. Vierter Band 1823—1838.

Theorie und Construction der Sonnen-Uhren auf Ebenen, Kegel-Cylinder- und Kugelflächen, nebst einer historischen Skizze über die Gnomonik, von Dr. Rudolf Sonndorfer. Mit 7 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Wien. W. Braumüller. 1864.

Ein recht sehr zu empfehlendes Schriftchen über Gnomonik, welches sich vor anderen Schriften dieser Art besonders dadurch auszeichnet, dass in demselben wohl zum ersten Male eine ausführlichere und durchgreifendere Anwendung der descriptiven Geometrie zur Construction der Sonnenuhren gemacht worden ist, so dass dasselbe zugleich als eine lehrreiche Anwendung der letzteren schönen Wissenschaft angesehen werden kann. Ausserdem hat aber auch die analytisch-trigonometrische Methode ausgedehnte Anwendung gefunden und eine historische Skizze ist vorausgeschickt, Alles durch sehr sorgfältige und saubere Zeichnungen erläutert, und die nöthigen Tafeln, z. B. am Ende eine Tafel der Zeitgleichung, sind beigefügt. Die Schrift ist, wie ge-

sagt, Allen denen, welche sich für die Gnomonik an sich, aber auch für Anwendungen der feineren Geometrie interessiren, recht sehr zu empfehlen. — Wir bemerken noch, dass in der Abhandlung: Gnomonik für jede beliebige Ebene im Raume, mit Rücksicht auf die Anwendung der neueren Geometrie zur Ausführung gnomonischer Constructionen. Von dem Herausgeber des Archivs. (Archiv. Thl. XXXVI. S. 101.) wohl zuerst Anwendungen der neueren Geometrie, namentlich der Theorie der Aehnlichkeitsaxen der Kreise, auf die Gnomonik gemacht worden sind, bei gleichzeitiger ausführlicher Anwendung der analytischen Geometrie.

Nautik.

Sur une méthode nouvelle proposeé par M. de Littrow, pour déterminer en mer l'heure et la longitude; par H. Faye, membre de l'Institut et du Bureau des longitudes. Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, séance du 7. Mars 1864. Vienne. C. Gerold. 1864. 8°.

Mit Rücksicht und Verweisung auf meinen Aufsatz im Archiv. Thl. III. 1843. S. 107—S. 112. habe ich im Literar. Ber. Nr. CLX. S. 4., worauf ich hier verweise, die von Herrn Director v. Littrow empfohlene Methode der Längenbestimmung durch Differenzen von Circummeridianhöhen, welche sich bei der berühmten Weltumsegelung der Novara auch praktisch vollkommen bewährt hat, ausführlicher besprochen, so dass dieselbe als allen sich dafür interessirenden Lesern vollkommen bekannt vorausgesetzt werden kann. Um diese Methode in Frankreich bekannter zu machen und zur Anwendung zu empfehlen, hat Herr Faye dieselbe zum Gegenstande einer Mittheilung an die Académie des Sciences gemacht, und sie mit verschiedenen lehrreichen eigenen Bemerkungen und Discussionen begleitet. Die Schrift ist in zwei Abtheilungen getheilt, nämlich- §. I. Emploi de la méthode à la mer und §. II. Emploi de la méthode à terre, indem Herr Faye diese Methode mit einigen von ihm angegebenen und empfohlenen Modificationen auch auf dem Lande bei Reisen u. s. w. für zweckmässig anwendbar hält. Es is sehr dankenswerth, dass von der Abhandlung des Herrn Faye in Wien der vorliegende besondere Abdruck veranstaltet worden ist, welchen wir allen wissenschaftlichen Seeleuten, namentlich aber den Lehrern

der Nautik an den nautischen Lehranstalten recht sehr zur Beachtung empfehlen. G.

M. vergl. über Nautik oben auch unter „Systeme, Lehr- und Wörterbücher" die nautischen Zusätze von Dr. Ligowski zu dem Lehrbuche der Elementar-Mathematik von Haller von Hallerstein.

Physik.

Lehrbuch der Fisik für Unter-Realschulen. Von Dr. Fr. Jos. Pisko, Lehrer der Fisik an der Kommunal-Oberrealschule auf der Wieden und der damit in Verbindung stehenden Gewerbeschule in Wien. Sechste, sehr vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 485 in den Text aufgenommenen Holzschnitten. Brünn. C. Winter. 1864. 8°.

Die fünfte Auflage dieses Elementar-Lehrbuchs der Physik und sein Verhältniss zu dem grösseren empfehlenswerthen physikalischen Lehrbuche des Herrn Vfs. sind den Lesern aus dem Literar. Ber. Nr. CLX. S. 6. bekannt. Die Verbesserungen in dieser sechsten Auflage waren vorzüglich auf die Erneuerung der meisten Figuren und auf die grösstmögliche Deutlichkeit im Beibringen der Grundlehren gerichtet. Die Zeichnungen sind alle nach den Apparaten des physikalischen Kabinets der Lehranstalt, an welcher der Herr Verf. als Lehrer wirkt, aufgenommen, und liefern hierdurch zugleich den Beweis von der grossen Reichhaltigkeit und Zweckmässigkeit dieses Kabinets und von der — übrigens längst schon bekannten — Sorgfalt und Liebe, mit welcher der physikalische Unterricht auf den Schulen in Oesterreich gepflegt wird. Die dargestellten Apparate sind fast sämmtlich von dem geschickten Mechaniker Herrn Hauck in Wien gefertigt.

Vermischte Schriften.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura dei Professori G. Battaglini, V. Janni e N. Trudi etc. (S. Liter. Ber. Nr. CLXIV. S. 16).

Anno I. — Novembre 1863. Nota sulla dipendenza duplo-anarmonico, per G. Battaglini p. 321. — Sopra talune proprietà delle soluzioni intere e positive dell' equazione, nota per E. Fergola. p. 328. — Nota sulle curve di terzo grado per N. Salvatore Dino, discepolo del professore Sannia. p. 334. — Sul criterio degli equimoltiplici adoperato dagli antichi geometri nella teorica delle proporzioni, nota per N. Trudi. p. 337. — Teorema 1°. p. 339. — Teorema 2°. p. 340. — Teorica de contravarianti, dei covarianti, e degli invarianti per G. Janni (Continuazione vedi p. 253.) p. 340. — Sul momento di una forza presa rispetto ad un asse per V. Janni. (Continuazione vedi p. 282.) p. 351.

Anno I. — Dicembre 1863. Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti per Eugenio Beltrami. (Continuaz. v. p. 208.) p. 354. — Area di un segmento di sezione conica, per L. Cremona. p. 360. — Nota sul parallelogrammo delle forze, per G. Battaglini. p. 365. — Intorno alle condizioni di equilibrio di un sistema di forma invariabile. Per G. Battaglini p. 367. — Soluzioni delle questioni 13, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25. Per G. Battaglini. p. 369. — Indice.

So haben also jetzt die verdienstvollen Herren Herausgeber dieses trefflichen, von uns in früheren literarischen Berichten schon mehrfach zu sorgfältigster Beachtung empfohlenen Journals, durch welches das mathematische Studium bei der kräftigen Unterstützung, welche demselben durch die erleuchtete Königlich italienische Regierung überall zu Theil wird, gewiss wesentlich gefördert werden wird, die Freude der Vollendung des ersten Jahrgangs dieses ausgezeichneten wissenschaftlichen Unternehmens, wozu wir ihnen aufrichtigst Glück, und dem Journal selbst ungehinderten Fortgang und immer grösseren Aufschwung wünchen.

Grunert.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia*), A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CLXIV. S. 18. wo, wie wir beiläufig bemerken, statt „**di** Barnaba Tortolini“ zu setzen ist: „**da** Barnaba Tortolini.)

---

*) Jetzt in Mailand.

Tom V. Nr. 3. Dei momenti d'inerzia, e di elasticità delle Sezioni. Del Dot[r]. Domenico Cipoletti. p. 113. — **Rivista bibliographica.** — Manuscrit 951 du Supplément arabe de la Bibliothèque impériale de Paris. Par M. Woepcke. p. 147. — Sopra alcune formole nel calcolo delle differenze finite. Articolo del Prof. B. Tortolini. p. 181.

2

Tom. V. Nr. 4. Mémoire sur l'intégration sous forme finie de l'équation différentielle linéaire du second ordre. Par le P. Pepin. p. 183. - Lettera del *S*ig. W. Roberts all' Editore. p. 225. — Sulla Projezione Iperbolica di una Cubica Gobba. Nota del Professore L. Cremona. p. 227. — Pubblicazioni Recenti p. 231.

Tom. V. Nr. 5. Sulla Risolvente di Malfatti per le equazioni del Quinto grado. Memoria del Prof. F. Brioschi. p. 233. — Intorno ad un problema di Meccanica applicata. Memoria del Dottor D. Cipoletti. p. 251. — **Rivista bibliographica.** — Les Signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyen - âge. Examen de l'ouvrage allemand intitulé: Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker von Dr. Moritz Cantor. Halle. 1863. in 8°. Par Th. Henri Martin. p. 257.

Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae Vol. IV. Fasciculus posterior. Upsaliae. C. A. Leffler. 1863. 4°. (M. vergl. Literar. Ber. Nr. CLXI. S. 13.)

Der IV. Band. Fasc. I. dieser sehr wichtigen Societäts-Schriften ist in der vorher genannten Nummer des Literar. Ber. angezeigt worden. Der neueste uns vorliegende (Vol. IV. Fasc. II.) enthält die folgenden hierher gehörenden Abhandlungen: Einige mathematische Aufsätze von R. Hoppe, Dr. Ph. und Privatdocent in Berlin. I. Relationen zwischen den Cosinus der Richtungswinkel einer Geraden gegen beliebig viele regelmässig liegende Axen. II. Ueber sphärische Curven und deren Polaren. III. Rollcurven. — Ausserdem enthält dieser Band die von den Herren Nordlund und Wackerbarth augenscheinlich mit grösster Vollständigkeit und Sorgfalt angestellten und bearbeiteten meteorologischen Beobachtungen für 1860 unter dem besonderen Titel: Résultats des observations météorologiques faites au nouvel

Observatoire d'Upsal pendant l'année 1860. Latitude: 59°. 51'. 31,5". Longitude: à l'est de l'Observatoire de Paris 1^h. 1^m. 10^s. Upsal. C. A. Leffler. 1863. 4°.

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften in München. (Vgl. Literar. Ber. Nr. CLXIV. S. 15.)

1863. II. Heft IV. Dieses Heft enthält keine in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze.

1864. I. Heft I. Steinheil: Ueber einen neuen Meridiankreis seiner Construction (mit einer Tafel). S. 1. (Das neue Instrument ist ausführlich beschrieben, durch eine Zeichnung erläutert, und rücksichtlich der von ihm dargebotenen Vortheile vollständig charakterisirt.)

1864. I. Heft II. Steinheil: Der Astrograph. Ein Apparat zum Zeichnen des durch Fernröhre betrachteten Sternhimmels. S. 103. (Ein Instrument dieser Art hat Herr v. Steinheil bekanntlich schon vor mehr als 30 Jahren construirt und in Schumacher's Jahrbuch 1838 beschrieben. Wir machen auf das neue Instrument sehr aufmerksam, weil mittelst desselben nach den Angaben seines berühmten Erfinders graphisch eine grosse Genauigkeit zu erzielen sein muss, selbst eine weit grössere Genauigkeit als die Sternaufnahmen von Argelander durch Beobachtung ergeben haben.) — Jolly: 1) Ueber die Ausdehnung des Wassers von 30° C. bis 100° C. S. 141. — 2) Ueber eine Federwage zu exacten Wägungen. S. 162.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLX. S. 11.)

Jahrgang 1863. Januar—Juni. S. 106—S. 110. Herr Böhm theilt einen in der k. Hof- und Staatsbibliothek in München aufbewahrten, bis jetzt nicht veröffentlichten Brief Tycho Brahe's vollständig mit, auf den er von Herrn Oberbibliothekar Halm in München aufmerksam gemacht wurde. Der Brief ist an Tycho's Freund, den seiner Zeit bekannten und berühmten Doctor Camerarius in Nürnberg, gerichtet und enthält manches Interessante als Beitrag zur Charakteristik des unsterblichen Mannes und der Sitten der damaligen Zeit. Er hat die Unterschrift:

„Datae Vrainburgi die 21 Octobris anno 1590.
Tycho Brahe manu propria."

Jahrgang 1863. Juli — December. S. 58 — S. 59. Herr Matzka trug eine Prioritätsreclamation des Herrn Prof. Spitzer in Wien gegen Herrn Popper vor, betreffend die sehr anerkennungswerthen Erweiterungen, welche die von dem Engländer Weddle im Jahre 1843 zuerst veröffentlichte Methode der Auflösung der numerischen Gleichungen durch Herrn Prof. Spitzer schon im Jahre 1851 erhalten hat, gegen die von Herrn Joseph Popper in den Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften 11. Band der V. Folge, erst im Jahre 1861 veröffentlichten „Beiträge zu Weddle's Methode der Auflösung numerischer Gleichungen." — S. 77 bis S. 82. Herr Gustav Skřivan theilt einen einfachen Beweis des Gauss'schen Theorems von der Convergenz der unendlichen Reihen mit, auf den wir die Leser des Archivs aufmerksam machen. — S. 82 — S. 85. Herr Pierre theilt seine interessanten Ergebnisse einiger Untersuchungen mit, welche er im Laufe des Sommers mit Aesculin und Fraxin unternommen hat, nebst den Fluorescenzerscheinungen bei'm Purpurin.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLVII. S. 14.)

Aus dem Jahre 1862. Nr. 497 — 530. — L. Schläfli: Elementare Bestimmung der Beschleunigung der elliptischen Planetenbewegung. Nr. 505 — 508. S. 65 — 82. — Perty: Ueber Mikroskopie und Teleskopie. Nr. 505 — 508. S. 83 — 95. — Nachtrag zu Prof. Perty's Aufsatz über Mikroskopie und Teleskopie. Nr. 511. S. 117 — 118. — R. Th. Simler: Beiträge zur Statistik der Wärmeverhältnisse der Luft und der Gewässer in den Schweizeralpen. Nr. 520 — 521. S. 185 — 200. — H. Wild: Bericht über die meteorologischen Arbeiten im Kanton Bern im Jahr 1861. Nr. 524 — 527. S. 217 — 237. — H. Wild: Resultate der meteorologischen Beobachtungen vom 1. December 1860 bis 30. November 1861. Nr. 524 — 527. S. 237 — 242. — F. Hermann: Ueber Verbesserungen an Waagen. Nr. 528. S. 249 — 254. — L. Schläfli: Ueber den Gebrauch des Integrationsweges. Nr. 529 — 530. S. 257 — 268.

Aus dem Jahre 1863. Nr. 531 — 552. — Lauterburg: Von den Rechenmaschinen. Nr. 531 — 537. S. 20 — 29. — R. Th. Simler: Ein Hand- und Reisespectroscop. Nr. 538 — 542. S. 62 — 70. — Perty: Ueber Conservation mikroskopischer Organismen. Nr. 538 — 542. S. 94 — 97. — Wild: Nachrichten von der Sternwarte in

Bern aus den Jahren 1861—62. Nr. 543—545. S. 99—118. — Wild: Bericht der meteorologischen Centralstation in Bern vom Jahre 1862. Nr. 546—547. S. 119—132.

Die k. Akademie der Wissenschaften in Wien hat vom Anfange dieses Jahres an die Einrichtung getroffen, dass kurze Berichte über ihre Sitzungen, unmittelbar nachdem dieselben stattgefunden, in einzelnen Bogen unter Kreuzband durch die Post versandt werden. Auf diese Art werden die Arbeiten der Akademie in der kürzesten Zeit allen sich dafür Interessirenden bekannt, was oft von grosser Wichtigkeit sein kann und in jeder Beziehung nachahmungswerth ist, auch in der erfreulichsten und rühmlichsten Weise von Neuem Zeugniss ablegt, wie sehr und wie eifrig die k. Akademie der W. bemüht ist, ihre Arbeiten so schnell als möglich zum Gemeingut des wissenschaftlichen Publikums zu machen, was dankbarlichst anerkannt werden muss. Bis jetzt (Mitte Mai 1864) sind uns mit grösster Regelmässigkeit und Schnelligkeit pro 1864 Berichte über 12 Sitzungen in eben so vielen Nummern zugegangen, von denen die letzte über die Sitzung vom 28. April 1864 referirt.

Die Anzeige einer grösseren Anzahl von Heften des Monatsberichts der königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin hat wegen etwas verspäteter Zusendung der Hefte an uns bis jetzt nicht gegeben werden können, und kann auch leider in dieser Nummer nicht mehr Platz finden, wird aber in der nächsten Nummer bestimmt erscheinen.

Im Begriff diese Nummer zu schliessen, geht mir noch folgende mich sehr betrübende Nachricht zu, die daher nur noch hier am Schluss Platz finden kann:

In der ersten Hälfte des März 1864 starb in Regensburg

Professor von Schmöger,

eines der ältesten Mitglieder der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. Es wird recht sehr um Einsendung eines Necrologs dieses verdienten Mathematikers, Astronomen und Physikers gebeten, der auch den Herausgeber des Archivs vielfach mit seiner Freundschaft beehrte. G.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LXV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Nel trecentesimo natalizio di Galileo in Pisa il 18 febbrajo 1864. — Cinque lettere inedite di Galileo. — Lettere a Galileo. — Una particolarità ignota della vita di Galileo del prof. F. Selmi. — Pisa e la sua università ai tempi di Galileo del prof. F. Buonamici. — Saggio diconcetti di Plauto e Terenzio, col volgar. fiorentino da un manuscritto di Galileo. 8⁰. Pisa. 1 l. 50 c.

Arithmetik.

Köhler, Manuale logarithmico-trigonometrico. Nona ediz. ster. Prima versione ital. Lex.-8⁰. geh. Leipzig. 1 Thlr.

K. H. Schellbach, Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen. gr. 8⁰. geh. Berlin. 2 Thlr.

A. Zillmer, Betrachtungen über die einfache Zinsrechnung mit besonderer Rücksicht auf den Oettinger'schen Beweis für die Unrichtigkeit dieser Rechnung. gr. 8⁰. Stettin. geh. 10 Ngr.

Geometrie.

A. E. Aderholdt, Lehrbuch der Planimetrie. Ein Schulbuch mit vielen Uebungsaufgaben. 8⁰. geh. Dresden. 15 Ngr.

H. Balsam, Leitfaden der Planimetrie nebst einer Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben und einer geschichtlichen Uebersicht. 2. Aufl. gr. 8⁰. Stettin. 15 Ngr.

G. Battig, Leitfaden für den Unterricht in der Raumlehre. Zunächst für Seminarien und Präparanden-Anstalten. 2. Aufl. gr. 8⁰. geh. Breslau. 12 Ngr.

C. Glasl, Lehrbuch der Geometrie für Unter-Realschulen. 5. Aufl. gr. 8⁰. geh. Wien. 1 Thlr.

M. Job, Lehrbuch der Planimetrie. Für Schulen und zum Privatgebrauch. 1. Abtheil. gr. 8⁰. geh. Dresden. 20 Ngr.

J. Sarres, Geometrische Untersuchungen über Kegelschnitts- und Kreisbüschel und deren Anwendung auf Erzeugung von Curven 3. u. 4. Ordnung. 4⁰. geh. Wittenberg. 10 Ngr.

Trigonometrie.

A. Junge, Tafel der wirklichen Länge der Sinus und Cosinus für den Radius 1000000 und für alle Winkel des ersten Quadranten von 10 zu 10 Secunden. Fol. geh. Leipzig. 28 Ngr.

Geodäsie.

M. R. Pressler, Mathematische und polytechnische Brieftasche mit Ingen.-Messknecht. 3. Aufl. gr. 8⁰. cart. Dresden. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

Astronomie.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Herausgegeben von C. v. Littrow. 3. Folge. 12. Bd. Jahrg. 1862. gr. 8⁰. geh. Wien. 3 Thlr. 17 Ngr.

A. Graef, Der nördliche Sternhimmel. Kpftf. gr. Fol. Weimar. 5 Ngr.

C. Linsser, Ueber die Flecken und die Rotation des Mars. gr. 8⁰. geh. Halle a./d. S. 4 Ngr.

United States. Astronomical and meteorological observations made at the U. S. Naval Observatory during the year 1862. By Capt. J. M. Gillis. 4⁰. (Washington.) London.

Th. Oppolzer, Bahnbestimmung des Planeten „Concordia." Lex.-8⁰. geh. Wien. 4 Ngr.

Nautik.

Annuario maritimo per l'anno 1864 compilato dal Lloyd austriaco. 14. Annata. gr. 8⁰. geh. Wien. 1 Thlr. 10 Ngr.

Physik.

Meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte in Wien von 1755—1855. Herausgegeben von C. von Littrow und E. Weiss. 4. Bd. 1823—1838. gr. 8⁰. geh. Wien. 3 Thlr. 17 Ngr.

Encyklopädie, allgemeine, der Physik. Herausgegeben von G. Karsten. 14. Lief. Lex.-8⁰. geh. Leipzig. 2 Thlr. 20 Ngr.

J. Frick, Die physikalische Technik, oder Anleitung zur Anstellung von physikalischen Versuchen und zur Herstellung von physikalischen Apparaten mit möglichst einfachen Mitteln. 3. Aufl. gr. 8⁰. geh. Braunschweig. 2 Thlr. 25 Ngr.

A. Kunzek, Lehrbuch der Experimental-Physik zum Gebrauche in Gymnasien und Realschulen, sowie zum Selbstunterrichte. 7. Aufl. gr. 8⁰. geh. Wien. 28 Ngr.

Negretti and Zambra, A treatise on meteorological instruments explanatory of their scientific principles, method of construction and practical utility. Royal-8⁰. Cloth. 5 s.

M. A. F. Prestel, Die jährliche und tägliche Periode in der Aenderung der Windrichtungen über der deutschen Nordseeküste, sowie der Winde an den Küsten des rigaischen und finnischen Meerbusens und des weissen Meeres. gr. 4⁰. Jena. geh. 1½ Thlr.

A. Riedel, Das Sechstagwerk der Bibel. Der Naturwissenschaft, besonders der Gas- und Feuertheorie gegenüber erläutert. 8⁰. geh. Augsburg. 6 Ngr.

J. F. J. Schmidt, Feuermeteor am 18. October 1863. Lex.-8⁰. geh. Wien. 10 Ngr.

A. v. Waltenhofen, Ueber das elektromagnetische Verhalten des Stahles. Lex.-8⁰. geh. Wien. 6 Ngr.

Vermischte Schriften.

Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturwissensch. Classe. 22. Bd. gr. 4⁰. geh. Wien. 13⅓ Thlr.

H. Hertzer, Mathematische Tabellen, Formeln u. Constructionen zum Gebrauch für Techniker. Lex. 8⁰. geh. Berlin. 2 Thlr.

H. Lieber, Formeln der Elementar-Mathematik. gr. 8⁰. geh. Pyritz. 6 Ngr.

Literarischer Bericht

CLXVI.

Am 1. Juni 1864 um $4\frac{1}{2}$ Uhr Nachmittags starb plötzlich, im 65sten Lebensjahre,

Josef Knar,

der Philosophie und sämmtlicher Rechte Doctor, k. k. jubil. Professor der Mathematik an der Universität in Graz. Das Archiv verdankt ihm einige grössere werthvolle Arbeiten. Die zweite Abtheilung seiner letzten Arbeit über die harmonischen Reihen (s. Thl. XLI. Nr. XXVIII.) wird in einem der nächsten Hefte erscheinen. Ein ausführlicher Necrolog ist uns für eine der nächsten Nummern des Literarischen Berichts gütigst zugesagt worden und wird unzweifelhaft erscheinen.

Mathematisches und physikalisches Unterrichtswesen.

Achter Jahresbericht über die Wiener Kommunal-Oberrealschule auf der Wieden. Veröffentlicht am Schlusse des Schuljahrs 1863. Wien. Selbstverlag der Realschule. 1863. 4°.

Wir glauben unsere Leser auf dieses Programm aus doppelter Rücksicht aufmerksam machen zu müssen. — Die erste Abtheilung (S. 1.—S. 56.) desselben hat den Titel: Die Unterrichts- und Erziehungsgegenstände auf der Londoner Weltausstellung im Jahre 1862. Von Dr. V. Teirich. Der Herr Verfasser wurde im vorigen Jahre mit Unterstützung der Gross-Kommune Wiens zum Besuche der Industrie-Ausstel-

lung nach London geschickt, um die dort ausgestellten Unterrichtsmittel in Augenschein zu nehmen. Das vorliegende Programm enthält den sehr interessanten und eingehenden Bericht über diese Reise unter folgenden Rubriken: I. Allgemeine Betrachtungen. II. Allgemeine Karakteristik der Schulausstellungen der verschiedenen Kulturstaaten (Oesterreich, Grossbritannien und Irland, Frankreich, Belgien, die deutschen Zollvereinsstaaten, Schweiz, Russland, Dänemark, Holland, Schweden, Norwegen, Italien, die englischen Kolonieen und Amerika). III. Die bemerkenswerthen Gegenstände in der Londoner Schulausstellung nach den einzelnen Ländern und Fächern geordnet. (Wir heben hier nur aus: die Unterrichtsmittel für den Rechenunterricht, für die Arithmetik, für Geographie, Naturgeschichte, Physik, Chemie, Technologie, Geometrie und lineares Zeichnen). Alle Lehrer der realen Unterrichtsfächer müssen auf diesen vielfach interessanten und lehrreichen Bericht aufmerksam gemacht werden. — Die zweite Abtheilung (S. 1.—S. 36.) hat den Titel: Ueber einige neuere akustische Gegenstände. Von Dr. Fr. Josef Pisko. In lehrreicher Weise beschreibt Herr Pisko die akustischen Apparate von R. König (Nachfolger von Marloye) in Paris, die er auf der Londoner Industrie-Ausstellung zu sehen Gelegenheit hatte, und erläutert seine Beschreibungen durch gut ausgeführte Holzschnitte. Die beschriebenen Apparate gehören an: I. der Tonschreibekunst oder Fono- und Vibrografie; II. der Anwendung der Optik in der Akustik; III. den Saiten und Stäben; IV. der Luft als tönenden Körper (Pfeifen). Die Anzahl der beschriebenen und abgebildeten Apparate ist zwölf. Ueber die meisten spricht Herr Pisko sein Urtheil aus, giebt Andeutungen über Einrichtung und Gebrauch, Geschichte der Erfindung u. s. w. Wir halten diese Abhandlung für einen recht guten Beitrag zur praktischen Akustik und zum Unterrichte in der Akustik überhaupt, verweisen deshalb auch alle Lehrer der Physik auf dieselbe und empfehlen sie ihnen zur sorgfältigen Beachtung, da sie schwerlich anderwärts eine so vollständige Darstellung dieser Apparate finden werden.

Arithmetik.

Elementi di Algebra per R. Rubini. Seconda edizione accresciuta e migliorata. Napoli. Tipografia di Achille Morelli. Strada S. Sebastiano n. 51 p. p. 1864. 8°.

In dem Literarischen Berichte Nr. CLXII. S. 4. hatten wir das Vergnügen, den höchst verdienstlichen „Complemento agli Ele-

menti d'Algebra" desselben Herrn Verfassers anzuzeigen. Die „Elementi di Algebra" liegen uns jetzt in einer so eben erschienenen, vermehrten und verbesserten zweiten Auflage vor. Die erste Auflage ist uns unbekannt geblieben und wir können daher über das Verhältniss beider Auflagen zu einander nicht berichten. Was aber die zweite Auflage betrifft, so haben wir uns sehr gefreuet, in derselben ein sehr vollständiges, sehr deutliches und überall in streng wissenschaftlicher Darstellung verfasstes, sich in mehreren Beziehungen vor anderen Büchern dieser Art auszeichnendes Lehrbuch der elementaren Algebra oder allgemeinen Arithmetik anzutreffen, welches wir auch deutschen Lesern recht sehr zu sorgfältigster Beachtung empfehlen. Dasselbe enthält natürlich zunächst die sämmtlichen gewöhnlichen Lehren der elementaren Algebra, wie sie sich auch in unseren deutschen Lehrbüchern finden, überall durch zweckmässige Beispiele erläutert. Ausser diesen Lehren enthält das vorliegende Lehrbuch aber noch vieles Andere, was sich in unseren deutschen Lehrbüchern, wenigstens meistens, noch nicht findet, hauptsächlich wohl deshalb, weil diese Bücher vorzugsweise als Lehrbücher für Schulen verfasst werden, und man deutschen Schülern — die freilich varia et multa im reichlichsten Maasse zu lernen haben — die Erlernung solcher feineren algebraischen Lehren wohl noch nicht zumuthen zu dürfen glaubt, und, aus dem angegebenen Grunde, nach unserer Meinung allerdings auch nicht darf, wenigstens nicht unbedingt. Zu diesen feineren algebraischen Lehren, welche die Lehrer der Mathematik in sehr schöner, ganz elementarer und für Schüler höherer Lehranstalten völlig geeigneter Weise in dem vorliegenden ausgezeichneten Buche entwickelt finden, rechnen wir die folgenden: Die Lehre von den Ungleichheiten oder Ungleichungen (Lezione XIII. Delle ineguaglianze. Wer weiss, wie häufig sich Anfänger bei der Beurtheilung solcher Fälle, wenn sie namentlich mit negativen Grössen in Conflict kommen, irren, wird gewiss erkennen, wie nothwendig es ist, dass die Lehre von den Ungleichungen in ihren ersten Elementen immer mehr Aufnahme in die elementare Algebra finde). — Begriff und elementare Hauptsätze von den Gränzen. (Lezione XIV. e XV. Quantità variabile e quantità costante. Limite. Quantità finite, infinitesime e finite. Sehr verdienstlich ist es, dass der Herr Verfasser der „**Gränze**", die ja der fortwährende Begleiter des Mathematikers in seinem ganzen wissenschaftlichen Leben, bei fast allen seinen Untersuchungen und Arbeiten ist, hier schon in den ersten Elementen eine besondere, eingehendere Betrachtung gewidmet hat, was wir sehr zur Nachahmung empfehlen). — Vieles

für die Elemente Wichtige aus der höheren Zahlenlehre in sehr zweckmässiger Darstellung. (Lezione.XVI. Rappresentazione algebrica de' numeri. Proprietà che se ne deducono. — Lez. XVII. Divisibilità di alcune particolari forme di numeri. — Lez. XVIII. Di alcune proprietà delle potenze e radici de' numeri. — Lez. XIX. Problemi diversi su i numeri. — Lez. XX. Proprietà dei residui, e loro applicazione a talune regole d'Aritmetica.) — Eine eingehende Darstellung der in allen Beziehungen so ungemein wichtigen Lehre von den Mittelgrössen. (Lez. XXXVII.) — Eine sehr vollständige Theorie der Kettenbrüche mit Anwendungen auf die unbestimmte Analytik, auch mit Rücksicht auf Formen des zweiten Grades. (Lez. XL.—XLII.) — Auf S. 278. in der Lehre von den Logarithmen sagt der Herr Verfasser: „Crediamo necessario aggiungere poche parole sul modo di calcolare con una sola lettura nelle Tavole il logaritmo della somma o della differenza di due numeri, dati per mezzo de' loro logaritmi“ und giebt hier eine zwar kurze, aber sehr deutliche Erläuterung der Gauss'schen Tafeln und ihres Gebrauchs, mit besonderer Hinweisung auf die auch von uns schon mehrfach dringend empfohlenen fünfstelligen Logarithmentafeln von Hoüel, von denen, wie wir zu unserer Freude deutschen Lesern mittheilen können, bei der, wie sich bei der Trefflichkeit des Buchs voraussehen liess, sehr bald nöthig gewordenen zweiten Auflage auch eine Ausgabe mit deutsch geschriebener Einleitung erscheint, wodurch gewiss diesen ausgezeichneten Tafeln auch in Deutschland bald allgemeiner Eingang verschafft werden wird, was wenigstens sehr zu wünschen ist. — Das letzte Kapitel handelt: Dei determinanti, mit besonderer Rücksicht auf Elimination aus Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten, und enthält, als eine wahre Bereicherung der Elemente, in einfacher Darstellung alle diejenigen Sätze von den Determinanten, welche sich nach unserer Meinung irgend in die Elemente der Algebra aufnehmen lassen, weshalb wir uns entschlossen haben, dieses Kapitel unseren deutschen Lesern so bald als möglich in einem der nächsten Hefte des Archivs in deutscher Uebersetzung mitzutheilen.

Wir hoffen, dass hieraus genugsam erhellen wird, wie sehr das vorliegende elementare algebraische Lehrbuch verdient, allen Lehrern der Mathematik dringend empfohlen zu werden, und wie deutlich dasselbe den Beweis liefert, dass auf den italienischen Unterrichtsanstalten der mathematische Unterricht wahrlich auf keiner niedrigen Stufe stehen kann,

wie dies auch von vorn herein zu erwarten war, bei dem grossen Interesse, das in jenem classischen Lande zu allen Zeiten den mathematischen und naturwissenschaftlichen Studien zugewandt worden ist.

Mémoire sur une méthode pour déduire quelques intégrales définies, en partie très générales, prises entre des limites 0 et ∞ et contenant des fonctions circulaires directes. Par D. Bierens de Haan. Mémoire publié par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. Harlem. Les Héritiers Loosjes. 1862. 4[0]. p. 1.— p. 199.

Alle Leser des Archivs wissen aus unseren früheren literarischen Berichten, wie sehr Herr Bierens de Haan, jetzt Professor der Mathematik an der Universität in Leiden, sich durch seine grossen Tafeln der bestimmten Integrale und andere Arbeiten über diese Integrale um die Wissenschaft verdient gemacht hat. In der vorliegenden grossen, durch die holländische Gesellschaft der Wissenschaften in Harlem in verdienstlichster Weise publicirten Abhandlung hat Herr B. de H. eine grosse Anzahl, grösstentheils bis jetzt noch nicht behandelter, zwischen den Gränzen 0 und ∞ genommener, theils einfacher, theils doppelter Integrale nach eigenthümlichen Methoden entwickelt, über deren Natur im Allgemeinen wir am Besten den Herrn Verfasser selbst sprechen lassen. Nachdem er hervorgehoben, dass es überhaupt keine allgemeinen Methoden zur Entwickelung oder Auswerthung bestimmter Integrale gebe, und dadurch speciellen Methoden ihren wohlbegründeten und sich von selbst verstehenden grossen Werth vindicirt hat, fährt er folgendermaassen fort: „Lorsqu'on emploie des séries pour l'évaluation d'une intégrale définie, le résultat peut se présenter comme une série de quantités constantes ou comme une série d'intégrales définies. Quand les valeurs de ces dernières sont inconnues, on se trouve conduit à une de ces relations, dont il a été question plus haut *); mais quand la valeur en est connue, on se trouve ramené après leur évaluation à une nouvelle série. Or, ces séries — les dernières tout comme celles que nous obtenions d'abord, — peuvent quelquefois être réduites à une telle forme, et alors il n'y a que la réduction d'une intégrale définie à une série. Le premier de ces cas admet quelquefois une solution bien simple, lorsque la série est de na-

*) Weiter oben sagt der Herr Verfasser: „Maintefois le travail“ (die Bearbeitung eines best. Integr. durch Reihen) „ne nous ramène qu'à une autre fonction aussi inconnue que l'intégrale cherchée.“

ture à être sommée moyennant le théorème de Taylor; et c'est de ce cas-ci que traitera ce Mémoire." — On y trouvera en premier lieu divers théorèmes généraux, qui par leur spécialisation donneront lieu ensuite à des évaluations d'intégrales définies nouvelles, dont plusieurs comportent elles-mêmes une généralité assez grande, en ce qu'elles contiennent un nombre arbitraire de certains facteurs. Celles-ci, soit par des équations de condition entre les constantes, soit par la différentiation par rapport à quelque constante qui se trouve dans l'intégrale définie, donneront lieu enfin dans divers cas à des résultats bien simples et remarquables. Enfin nous déduirons encore des résultats obtenus quelques intégrales définies doubles, du genre des fonctions réciproques de Cauchy." — Mittelst dieser hier durch den Herrn Verfasser selbst etwas näher charakterisirten Methode hat derselbe eine grosse Menge bemerkenswerther Integrale entwickelt, und wir halten daher dieses Werk sowohl in Rücksicht auf die angewandte Methode, als auch rücksichtlich der durch dieselbe gewonnenen Resultate für einen wichtigen Beitrag zur Integralrechnung, auf den wir unsere Leser durch diese, hier durch den Raum nur gestatteten, wenigen Bemerkungen recht sehr aufmerksam zu machen wünschen.

Herr Professor Houël in Bordeaux hat mir folgende Berichtigungen zu der Vega-Hülsse'schen Sammlung mathematischer Tafeln gesandt. Grunert.

„A propos de ce recueil *), il s'en fait, à ce qu'il paraît, en ce moment une nouvelle édition. Je saisis l'occasion pour vous prier de signaler dans votre Journal quelques erreurs que j'ai découvertes dernièrement.

Page 576.	Au lieu de	lisez
$\log\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$	9,436 8(653)	9,436 8(581),
$\log\frac{1.3....9}{2.4....10}$	9,391 100(5)	9,391 100(6),
$\log\frac{1.3....11}{2.4....12}$	9,353 31(19)	9,353 31(20),
$\log\frac{1.3....13}{2.4....14}$	9,32(0) 1273	9,32(1) 1273,
$\log\frac{1.3....23}{2.4....24}$	9,207 311(9)	9,207 311(8).

*) Nämlich der vorher genannten Sammlung Vega-Hülsse. G.

Page 839.	Au lieu de	lisez
Log. 2π	0,79817 98(734)	0,79817 98(684),
Decad. Erg. desselb. . .	9,20182 01(266)	9,20182 01(326),
Länge des Sterntages in mittl. Sonnentagen	0,9972 69(6)7	0,9972 69(5)7.

Il est probable que ces fautes sont loin d'être les seules que contiennent ces pages. Aussi ne les indiqué-je que pour signaler le besoin d'une révision de ces parties de cet important recueil. Je crois avoir déjà indiqué une faute dans la 1re éd. des tables de Zech, page 802., argument 0,13030. Au lieu de (2)622, il faut lire (3)622. Je ne sais si cette correction a été faite dans la 2e édition *).

Les fautes que j'indique pour la page 576., et qui proviennent en droite ligne du vieux Vega de 1783, existent (sauf la première) dans la 6e édition des tables de Köhler.

Mr. Schrön s'est-il décidé à ajouter à ses tables un tableau d'une demi-page renfermant les constantes dont on a si souvent besoin **)?"

Geometrie.

Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola gobba; per L. Cremona. (Memoria letta nella sessione 26 novembre 1863 ed inserita nel tomo III (serie 2a) delle Memorie dell' Accademia delle scienze. Bologna.) 4°.

Der um die neuere Geometrie, namentlich um die rein geometrische Theorie der Curven, schon so vielfach verdiente Herr Verfasser theilt in dieser interessanten Abhandlung eine Reihe rein geometrischer Untersuchungen über die doppelt gekrümmten Curven der dritten Ordnung mit, auf welche wir unsere Leser recht sehr aufmerksam machen. Er geht dabei von einigen Eigenschaften der Kegelschnitte aus, die entweder bekannt oder mittelst der in der trefflichen „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane" des Herrn Verfas-

---

*) Dieser Fehler ist in der zweiten Auflage (ich habe den besonderen Abdruck der Zech'schen Tafel, Berlin 1863, vor Augen) verbessert. Grunert.

**) Herr Prof. Schrön wird durch eine kurze baldige Beantwortung dieser Frage im Archiv mich sehr verbinden. Grunert.

sers *) enthaltenen Grundlagen leicht zu beweisen sind, wodurch er, was sehr dankbar anzuerkennen ist, — indem er diese Sätze der Abhandlung in deutlicher und bestimmter Fassung vorausschickt, — das Verständniss dieser letzteren sehr erleichtert. Auszüge gestatten, wie wir schon öfters in ähnlichen Fällen bemerkt haben, solche rein geometrische Arbeiten, bei denen, mehr als bei fast allen übrigen mathematischen Untersuchungen, die Darstellung sich in einer fortwährenden strengen systematischen Folge bewegt, die nirgends eine Unterbrechung erlaubt, nicht; die Folgerungen sind im Einzelnen zwar meistens leicht und leicht verständlich, aber der systematische Zusammenhang muss vom Anfange bis zum Ende mit der grössten Strenge und Consequenz ohne alle Unterbrechung festgehalten werden, wodurch namentlich der grosse logische Scharfsinn der Urheber solcher Untersuchungen sich kund giebt. Jedoch auch ohne uns auf einzelne Mittheilungen einlassen zu können, dürfen wir den Lesern eine Reihe sehr interessanter Resultate versprechen, die theilweise bekannt **), theils dem eigenen Scharfsinne des Herrn Verfassers zu verdanken sind. Die Schrift beweist zugleich von Neuem, wie eifrig das Studium der neueren Geometrie in Italien betrieben wird, und wir können nur wünschen, noch recht oft solchen interessanten und wichtigen Arbeiten des von uns hochverehrten Herrn Verfassers auf diesem Gebiete zu begegnen.

Trigonometrie.

Tafel der wirklichen Länge der Sinus und Cosinus für den Radius 100000 und für alle Winkel des ersten Quadranten von 10 zu 10 Secunden, für Markscheider, Geometer, Eisenbahn-Ingenieure, Mechaniker, Astro-

---

*) Dass von diesem ausgezeichneten Werke eine deutsche Uebersetzung in der Verlagsbuchhandlung des Archivs erscheint, ist schon mehrmals bemerkt worden. Der Druck nähert sich jetzt stark seiner Vollendung, die dadurch einigermassen verzögert worden ist, dass der Herr Verfasser die Uebersetzung mit einer grösseren Anzahl sehr werthvoller Zusätze begleitet, durch welche derselben in der erfreulichsten Weise noch ein besonderer selbstständiger Werth verliehen werden wird.

**) Der Herr Verfasser verweist selbst auf: Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série. T. I. Paris 1862. p. 287. — Chasles: Propriétés des courbes à double courbure du troisième ordre in den Comptes rendus de l'Acad. des sciences. 10. août 1857. — Crelle's Journal Bd. 58. S. 147.

nomen und Mathematiker, insbesondere für Diejenigen, welche bei trigonometrischen Berechnungen die Thomas'sche Rechenmaschine benutzen. Herausgegeben von Dr. August Junge, Professor der höheren Mathematik und Lehrer der praktischen Markscheidekunst an der k. Bergakademie in Freiberg. Leipzig. A. Felix. 1864. 4°.

Was diese Tafeln enthalten und zu welchem Gebrauch sie bestimmt sind, sagt der sehr ausführliche Titel. Vielleicht mögen sie zu diesem Gebrauch auch recht zweckmässig sein. Druck und Papier sind sehr gut. Dass sie zu allgemeinerem Gebrauch tauglich sind und sich dessen erfreuen werden, bezweifeln wir sehr. Allerdings sind wir der Meinung, und haben dies schon öfters ausgesprochen, dass Tafeln der sogenannten natürlichen Linien oder Functionen in vielen Fällen besonders bequem, namentlich bequemer als die logarithmischen Tafeln sind. Auch haben wir schon öfters die Herausgabe solcher Tafeln in recht zweckmässiger Form als sehr wünschenswerth bezeichnet. Die vorliegenden Tafeln haben aber unseren Wünschen nicht entsprochen. Sollen solche Tafeln wirklich brauchbar sein, so müssen sie alle trigonometrischen Functionen, hauptsächlich aber auch die Secanten und Cosecanten, enthalten, da letztere dienen, weitläufige Divisionen mit dem Cosinus und Sinus in einfachere und leichtere Multiplicationen mit der Secante und der Cosecante zu verwandeln. Die Schiffer werden selbst die Beifügung der Sinusversus und Cosinusversus wünschen. Fünf Decimalen scheinen uns vollständig ausreichend zu sein, so wie das blosse Fortschreiten durch die einzelnen Minuten. Eine sehr gute Tafel dieser Art, für sechs Decimalen, die **alle acht** Functionen liefert, enthalten die Tafeln von Joseph Hantschl (Wien 1833), auch die Tafeln von Sherwin (3. edition. London 1742), letztere jedoch ohne die Sinusversus und Cosinusversus. Die Tafeln von Hantschl sollten einmal, auf fünf Decimalen abgekürzt, in recht bequemem Format, mit deutlichen Ziffern und auf recht gutem weissen Papier wieder abgedruckt werden; **dadurch** würde einem Bedürfnisse wirklich abgeholfen werden.

Optik.

Determinazione di un apparecchio fotografico acromatico a tutte le distanze dell' oggetto e formato con

la combinazione di due lenti composte, ambedue di fuoco positivo, ovvero una di fuoco positivo e l'altre di fuoco negativo o virtuale. Nota del Dott. A. Forti, Professore d'Algebra e Trigonometria al R. Liceo di Pisa. Pisa, Tipografia Pieraccini. 1862. 8°.

Dimostrazione della similitudine della immagine con l'oggetto riprodotto conservata anche per campi assai grandi da un apparato fotografico determinato analiticamente acromatico a tutte le distanze dell' oggetto e preceduta da cenni storici della teorica dell' acromatismo degli stromenti ottici del Dott. Angelo Forti, Prof. d'Algebra e Trigonometria al R. Liceo di Pisa. Pisa, Tipografia Pieraccini. 1863. 8°.

Herr Professor Angelo Forti in Pisa hat sich neuerlich durch mehrere optische Untersuchungen und Berechnungen, die sich hauptsächlich an die von dem berühmten Mossotti in seiner „Nuova teoria degli stromenti ottici" entwickelten allgemeinen Formeln anschliessen, vortheilhaft bekannt gemacht, von denen in dem Archiv noch weiter die Rede sein wird. Für jetzt wollen wir unsere Leser nur auf die obigen Untersuchungen und Berechnungen über einen neuen photographischen Apparat aufmerksam machen, der uns alle Beachtung zu verdienen scheint. Dieser Apparat entspricht den Bedingungen des Achromatismus für jede Entfernung des Objects und giebt ein dem Object ähnliches Bild selbst noch bei einem Gesichtsfelde von 40 Graden. Herr Forti hat ausserdem auch cylindrische Linsen statt der sphärischen vorgeschlagen, namentlich für alle die Fälle, wo es auf ein grosses Gesichtsfeld nicht unbedingt ankommt. Die beiden Flächen einer Linse müssten senkrecht auf einander sein, damit der Brennpunkt eines Punktes ein Punkt sei. Alle in den obigen Schriften niedergelegten Untersuchungen scheinen uns mit vollständiger Sachkenntniss angestellt und die numerischen Rechnungen mit grosser Sorgfalt und Genauigkeit geführt zu sein, weshalb wir nochmals recht sehr auf dieselben aufmerksam machen. Freilich ist es bekannt genug, dass sich über den Werth neu angegebener und berechneter, gewissermassen theoretisch construirter optischer Apparate immer nur erst endgültig vollständig urtheilen lässt, wenn dieselben mit grösster Sorgfalt wirklich praktisch ausgeführt worden sind, schon deshalb, um beurtheilen zu können, ob die Technik auch der Theorie mit hinreichender Genauigkeit zu folgen im Stande ist. Deshalb — und weil der neue photographische Apparat des Herrn Forti allerdings Beachtung zu verdienen scheint — ist es sehr erfreulich — und

liefert von Neuem den deutlichsten Beweis, wie sehr die Regierung des neuen Italien bemühet ist, alle, Empfehlung verdienende wissenschaftliche Unternehmungen kräftigst zu unterstützen und zu fördern — dass der k. italienische Minister des öffentlichen Unterrichts, Herr Amari, die Anfertigung dieses neuen photographischen Apparats durch Herrn Mertz in München auf Staatskosten befohlen hat. Wir sehen mit Verlangen und grossem Interesse weiteren Mittheilungen über diesen Gegenstand entgegen und hoffen dann die aus der Prüfung des von der k. italienischen Regierung anzufertigen befohlenen neuen Instruments hervorgegangenen Resultate unseren Lesern überhaupt, namentlich aber auch den optischen Künstlern, in einem besonderen, diesem Gegenstande gewidmeten Aufsatze mittheilen zu können.

Vermischte Schriften.

Monatsbericht der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin. (Vergl. Literar. Bericht Nr. CLXI. S. 15.)

Juni 1863. Hagen: Ueber die Wirkung des Windes auf trockenen Sand. S. 269—272.

Juli 1863. Kummer: Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen. S. 324—336. (Unter die untersuchten Flächen gehört die von Ch. Dupin mit dem Namen Cyclide belegte Fläche, deren Gleichung in die Form

$$b^2 = \sqrt{(ax-ek)^2 + b^2y^2} + \sqrt{(ex-ak)^2 - b^2z^2}$$

gebracht werden kann; ferner die von Steiner vor einer Reihe von Jahren entdeckte Fläche, der einzigen, auf welcher unendlich viele Schaaren von Kegelschnitten liegen, deren Gleichung in allgemeinster Form:

$$Aq^2r^2 + Br^2p^2 + Cp^2q^2 + 2Dpqrs = 0$$

ist, wo p, q, r, s beliebige lineare Functionen der Coordinaten und A, B, C, D beliebige Constanten sind.) Ueber die Erfindung dieser Fläche durch Steiner giebt Herr Weierstrass in dem folgenden Aufsatze (S. 337—338.) weiteren Aufschluss. Auf beide vorhergehende Aufsätze machen wir die Leser, als besonders interessant für höhere Geometrie, recht sehr aufmerksam. — Kronecker: Ueber die Klassenzahl der aus Wurzeln der

Einheit gebildeten complexen Zahlen. S. 340—345. — Riess: Ueber den Einfluss von Metallhüllen auf die Magnetisirung durch den elektrischen Entladungsstrom. S. 346—358.

August 1863. Dove: Ueber Compensation gleichzeitiger Witterungserscheinungen. S. 373. (Blosse Anzeige eines gehaltenen Vortrags.) — Poggendorff: Ueber die thermischen Eigenschaften elektrischer Funken. S. 379. (Wie vorher.) — Volkmann: Ueber identische Netzhautstellen; mitgetheilt von Herrn du Bois-Reymond. S. 394—395.

September und October 1863. Dove: Ueber die Entstehung eines schwarz glänzenden Körpers aus der Combination farblos durchsichtiger Körper. S. 397—398. — Dove: Ueber ein vom Mechanikus Geissler in Berlin construirtes neues Maximumthermometer. S. 398—399. — Magnus: Ueber die Verdichtung von Dämpfen an der Oberfläche fester Körper. S. 439. (Blosse Anzeige eines gehaltenen Vortrags.)

November 1863. Riess: Ueber die Ablenkung der Magnetnadel durch die Nebenströme der Leydener Batterie. S. 482—486. — Dove: Ueber den Unterschied der auf der Palette des Malers entstehenden Mischfarben und der auf dem Farbenkreisel hervortretenden. S. 490—502. S. 544—551. — Poggendorff: Ueber den Extrastrom des Inductionsstroms. S. 502—512. — Schröter: Ueber die Steiner'sche Fläche vierten Grades, mitgetheilt von Hrn. Kummer. S. 520—538. — Kummer: Ein Gypsmodell der Steiner'schen Fläche. S. 539.

December 1863. Enthält in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze nicht.

Januar 1864. Heine: Ueber lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, so wie über die Existenz und Anzahl der Lamé-schen Functionen erster Art, mitgetheilt von Hrn. Kronecker. S. 13—22. — Dove: Ueber ein neues polarisirendes Prisma. S. 42.

Februar 1864. Enthält keine in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze.

(Weitere Hefte des „Monatsberichts" sind bis jetzt bei uns nicht eingegangen.)

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LXVI.

Arithmetik.

F. E. Feller und C. G. Odermann, Das Ganze der kaufmännischen Arithmetik. Herausgegeb. von Odermann. 9. Aufl. gr. 8°. Leipzig. geh. 1 Thlr. 18 Ngr.

F. Herold, Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra. gr. 8°. Nürnberg. geh. 20 Ngr.

W. Nerling, Sammlung von Beispielen u. Aufgaben aus der Buchstabenrechn. u. Algebra. 2. Aufl. gr. 8°. Dorpat. geh. 18 Ngr.

G. di Vega, Manuale logaritmico-trigonometrico. 40. Ristampa. Nuova ediz. ster. completamente riveduta per cura del Dott. C. Bremiker. 2. Tiratura. Lex.-8°. Berlin. geh. 2 Thlr.

F. Zech, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 4 Stellen. 16°. Tübingen. geh. 15 Ngr.

Geometrie.

E. v. Hunyady, Ueber die fundamentalen Eigenschaften der algebraischen Curven und eine Eintheilung der Linien III. und IV. Ordnung. gr. 4°. Göttingen. geh. 16 Ngr.

J. Lodl, Anfangsgründe im Zeichnen, der Geometrie, Planimetrie. Neue Ausg. gr. 8°. Mit Atlas in 4°. Prag. geh. 1 Thlr.

— — Dasselbe in böhmischer Sprache. Nove rydani. gr. 8°. Mit Atlas gr. 4°. Ebendas. 1 Thlr.

R. O. Meibauer, Theorie der geradlinigen Strahlensysteme des Lichts. Eine Erweiterung der Gauss'schen Theorie von den Krümmungsmaassen der Flächen. gr. 4°. Berlin. geh. 15 Ngr.

M. Sadebeck, Elemente der ebenen Geometrie. Leitfaden für den Unterricht an Gymnasien u. höheren Bürgerschulen. gr. 8°. 6. Aufl. Breslau. geh. 12 Ngr.

W. Schütte, Elemente der analytischen Geometrie d. Ebene für höhere Lehranstalten und zum Selbststudium. gr. 8°. Breslau. geh. 20 Ngr.

Trigonometrie.

B. Féaux, Ebene Trigonometrie und elementare Stereometrie. 2. Aufl. gr. 8°. Paderborn. geh. 12 Ngr.

Geodäsie und praktische Geometrie überhaupt.

Generalbericht über die mitteleuropäischen Gradmessungen pro 1863. gr. 4⁰. Berlin. geh. 20 Ngr.

K. A. v. Klein, Neues System, Höhen u. Entfernungen leicht und sicher zu bestimmen oder die Chorographimetrie, zum Gebrauch in Schulen eingerichtet von einem Lehrer. 7. Aufl. 8⁰. Wiesbaden. geh. 10 Ngr.

Mechanik.

P. Zech, Sammlung von Aufgaben aus der theoretischen Mechanik. gr. 8⁰. Stuttgart. geh. 12 Ngr.

Physik.

A. W. Fils, Höhenmessungen von dem Kreise Weissensee im Königl. Regierungsbez Erfurt. 8⁰. Ilmenau. geh. 5 Ngr.

Fortschritte der Physik im Jahre 1862. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 18. Jahrg. Redigirt von E. Jochmann. I. Abth. gr. 8⁰. Berlin. geh. $1\frac{5}{6}$ Thlr.

K. W. Knochenhauer, Ueber den Zusammenhang des Magnetismus mit den Oscillationen des Batteriestroms. Lex.-8⁰. Wien. 3 Ngr.

F. A. Schneider, Nachrichten über die Fortschritte der Astrometeorologie. gr. 4⁰. (Berlin.) Leipzig. geh. 1 Thlr. 10 Ngr.

F. Unferdinger, Aufstellung einer neuen Pendelformel und Darstellung einer Methode aus der Länge des Secundenpendels in verschiedenen Breiten die Fliehkraft und die Form und Grösse der Erde zu bestimmen. Lex.-8⁰. Wien. geh. 3 Ngr.

C. R. Wolff, Hypsometrie des Regierungsbezirks Frankfurt. gr. 8⁰. Frankfurt a. d. O. geh. 1 Thlr.

Th. v. Zollikofer und J. Gobanz, Höhenbestimmungen in Steiermark. 4⁰. Mit 1 Karte. Graz. geh. $2\frac{1}{4}$ Thlr.

Vermischte Schriften.

B. Féaux, Mathematisch-physikalisches Vademecum für Studirende, Techniker u. Dilettanten. 16⁰. Paderborn. cart. 10 Ngr.

Rendiconti delle adunanze del R. Instituto Lombardo di scienze, lettere ed arti. Classe di scienze mathematiche e naturali. Vol. I. Fasc. 1. 8⁰. Milano. Prezzo di 10 fasc. 6 l.

Sitzungs-Anzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. Jahrg. 1864. N⁰. 1. gr. 8⁰. Wien. Preis für den vollständ. Jahrg. 1 Thlr.

Literarischer Bericht

CLXVII.

Ferdinand v. Schmöger,

dessen Tod im Literar. Ber. Nr. CLXV. S. 16. (am Ende) vorläufig angezeigt worden ist, war geboren zu München am 8. Januar 1792 und starb zu Regensburg am 4. März 1864. Er war Professor der Physik am Lyceum zu Regensburg. Es folgt ihm das Lob eines wohlwollenden, nüchternen, bescheidenen Charakters, eines sorgfältigen Lehrers nach. Ganz besonders thätig war er auf dem Gebiete der Witterungskunde und die durch ihn bekannt gemachten vieljährigen Beobachtungen (von 1774 bis 1834) haben im Anschlusse an die von Placidus Heinrich die Meteorologie von Regensburg wesentlich bereichert. Wir besitzen von ihm eine Kosmographie (1817, zweite Auflage 1820), Elemente der Astronomie und Chronologie (1830) und mehrere kleinere Schriften. (Sitzungsberichte der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München. 1864. I. Heft III. S. 196.).

Julius Zech.

In der Nacht vom 12. auf den 13. Julius 1864 starb der oben genannte ausgezeichnete Mathematiker in dem Bade Berg bei Stuttgart an einem organischen Leiden, was im letzten Winter sich entwickelt hatte. Er war im Jahre 1821 in Stuttgart geboren, seit 1845 an der Universität in Tübingen Lehrer für Mathematik und Astronomie, seit 1856 ordentlicher Professor und Director der Sternwarte. Seine „Tafeln der Additions- und Subtractions-Logarithmen für sieben Stellen. Zweite Auflage. Berlin. 1863.“ sind allen Mathematikern bekannt, und das Archiv verdankt ihm einige Beiträge im 16ten Theile. Das Vorstehende ist entlehnt aus: Allgemeine Zeitung. 1864. Nr. 198. S. 3211.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Dreizehnter Jahrgang. 1863.

Auf die Wichtigkeit dieses Almanachs in literarischer und literarhistorischer Beziehung ist schon mehrmals hingewiesen worden (die Anzeige des 12. Jahrgangs. 1862. s. m. im Literar. Bericht Nr. CLVIII. S. 3.), und auch der vorliegende 13. Jahrgang enthält wieder mehrere interessante und wichtige Beiträge. Zuvörderst liefert der Bericht des General-Sekretärs und Sekretärs der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse, des Herrn Professor Dr. Schrötter, ein sehr interessantes und erfreuliches Bild von der fortwährenden erfolgreichen und weitgreifenden Thätigkeit dieser Klasse. Ausserdem enthält dieser Jahrgang zwei sehr ausführliche Nekrologe von Carlini und Kreil *), mit sehr werthvollen, ganz vollständigen Verzeichnissen der von diesen beiden trefflichen Gelehrten publicirten Schriften. Der Necrolog Kreil's wird dadurch noch interessanter und wichtiger, weil er zugleich eine vollständige Geschichte der Entstehung und Gründung der grossartigen k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien enthält, deren erster Director bekanntlich Kreil war, und deren Verwaltung jetzt in die Hände des völlig sachkundigen und geschickten Herrn Jelinek übergegangen ist. Das Hauptverdienst um die Gründung der genannten wichtigen Anstalt, die schon so Vieles und Grossartiges auf dem Felde der Meteorologie und des Erdmagnetismus geleistet hat, hat sich natürlich die k. Akademie der Wissenschaften selbst erworben, insbesondere die von derselben am 18. Januar 1849 niedergesetzte Commission, bestehend aus den Herren Freih. von Baumgartner, von Ettingshausen, Stampfer, Schrötter, von Kunzek, Gintl, zu denen zur „Leitung sämmtlicher auf die meteorologischen Beobachtungen sich beziehenden Geschäfte" später noch die Herren Koller und Doppler hinzutraten. Dass es Kreil nicht vergönnt gewesen ist, die Bearbeitung einer Klimatologie des Kaiserstaates, als der Hauptaufgabe seines Lebens, zu vollenden, ist jedenfalls sehr zu beklagen; jedoch hat in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse vom 15. Mai d. J. Kreil's altbewährter Freund, Herr Hofrath Koller, das nahezu vollendete Manuscript der Klimatologie von Böhmen,

---

*) M. s. den Nekrolog von Carlini im Literar. Ber. Nr. CLIX. S. 1., den Nekrolog von Kreil im Literar. Ber. Nr. CLVII. S. 8.

mit dessen Verhältnissen sich Kreil so gern und so vollständig bekannt gemacht hatte, vorgelegt, so dass man wohl auf eine baldige Publication dieses wichtigen Werkes hoffen darf. Der Bericht über Kreil's Leben schliesst mit den Worten: „Was er zur Ehre Oesterreichs in der Wissenschaft geleistet, wird niemals untergehen. Kreil wird stets als der Begründer der systematischen Durchforschung des Vaterlandes auf dem Gebiete der Meteorologie und der Lehre vom Erdmagnetismus mit Ehren genannt werden. Mögen seine Nachfolger auf der von ihm eröffneten Bahn rüstig vorwärts schreiten!“ in die wir von ganzem Herzen einstimmen.

Astronomie.

Zeitschrift für populäre Mittheilungen aus dem Gebiete der Astronomie und verwandter Wissenschaften. Herausgegeben von Professor Dr. C. A. F. Petersen, Director der Sternwarte in Altona. Band II. Heft 3 und 4. Altona 1863. — Band III. Heft 1. Altona 1864. 8°.

Wir freuen uns, die Fortsetzung dieser verdienstlichen Zeitschrift (m. vergl. Literar. Ber. Nr. CXLIX. S. 4.) anzeigen zu können, und wünschen ihr auch bei den jetzigen veränderten politischen Verhältnissen in den Ländern ihres Erscheinens von Herzen einen ganz ungestörten Fortgang, da sie, wie wir bei unseren früheren Anzeigen schon mehrfach bemerkt haben, uns sehr geeignet scheint, zur Verbreitung astronomischer Kenntnisse in weiteren, auch nicht streng wissenschaftlichen Kreisen wesentlich beizutragen.

Die vorliegenden Hefte enthalten eine ausführliche Abhandlung: Einige Zusammenstellungen als Beitrag zu der Frage, ob ausser Mercur und Venus in dem Raume zwischen Sonne und Erde noch andere planetenartige Körper vorhanden sind. Von Herrn Kriegsrath C. Haase in Hannover. Band II. S. 165.—S. 256. Band III. S. 1.—S. 64. — Natürlich mit ganz besonderer Rücksicht auf die bekannten angeblichen Entdeckungen des Arztes Edmund Lescarbault zu Orgères in Frankreich (Eure-et-Loire) enthält diese ausführliche Abhandlung eine sehr verdienstliche Zusammenstellung aller älteren und neueren Beobachtungen, welche zur Beantwortung der in dem Titel der Abhandlung angegebenen Frage dienen können, und auf welche bei der Beantwortung dieser Frage zurückzugehen ist, mit vielen sehr einsichtsvollen kritischen Bemerkungen und Ausführungen des Herrn Verfassers, welche bei einem Gegen-

stande wie der vorliegende natürlich von der grössten Bedeutung sind, und auf die hier so sehr viel ankommt, wenn Sicheres und Unsicheres, Wahres und Falsches gehörig und streng von einander geschieden werden soll. Wir machen daher Alle, welche sich für die mehrgenannte Frage interessiren, auf diese Abhandlung recht sehr aufmerksam, und glauben, dass sie von Keinem entbehrt werden kann und unberücksichtigt bleiben darf.

Physik.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. Sechste umgearbeitete und vermehrte Auflage. Erster Band. 1862. — Zweiter Band. 1863. Braunschweig. Friedrich Vieweg und Sohn.

In schönster, dem Werke durch die berühmte Verlagshandlung zu Theil gewordener, äusserer Ausstattung, der sich kaum ein anderes Werk zur Seite stellen lassen dürfte, liegt uns die sechste Auflage des allgemein bekannten und weit verbreiteten Müller-Pouillet'schen Lehrbuchs der Physik jetzt vollständig vor, und damit eine Darstellung der gesammten neueren Physik, so weit sie in ein Lehrbuch gehört und ohne tiefer gehende und strengere mathematische Begründung sich geben lässt. Niemand, der sich mit Physik eingehender beschäftigt, wird daher dieses Werk entbehren können. Einrichtung und Tendenz sind natürlich im Ganzen in dieser neuen Auflage völlig dieselben geblieben wie in den früheren Auflagen, so dass also bei der ungemein grossen Verbreitung, die das Buch gefunden hat, darüber hier gar nichts zu sagen ist. Wir können unseren Lesern aber die Versicherung geben, dass das Werk in seiner neuesten Auflage mehrfache Verbesserungen erhalten hat und dass Alles, wenn auch zum Theil nur in kürzeren Notizen, nachgetragen worden ist, womit die Physik seit dem Erscheinen der fünften Auflage wahrhaft bereichert worden ist. Eine wesentliche Veränderung, welche die Darstellung einer wichtigen Lehre in dieser neuen Ausgabe erfahren hat, giebt der Herr Verfasser in der Vorrede zum zweiten Theile selbst an, indem er sagt: „In dieser neuen Auflage habe ich nun auch den Standpunkt verlassen, welchen ich bei der Entwickelung der Theorie der Volta'schen Säule in den früheren Auflagen eingenommen hatte, indem ich die Lehre von der Elektricitätserregung durch Metallcontact gänzlich fallen liess und nach Schönlein die Berührungsstelle von Metall und Flüssigkeit als den alleinigen Sitz der elektromotorischen Kraft annehme. Unser

Lehrbuch steht also in dieser Beziehung ohngefähr auf demselben Standpunkte, welchen auch Wiedemann in seiner Lehre vom Galvanismus und Jamin in seinem Cours de physique vertritt." Dass der Abschnitt über Muskel- und Nervenstrom abgekürzt worden ist, finden wir bei dem vorliegenden überreichen eigentlich physikalischen Stoff ganz gerechtfertigt, da diese Dinge doch mehr in das Gebiet der Physiologie, als in das der eigentlichen Physik gehören, und gegenwärtig auch in allen besseren physiologischen Lehrbüchern ausführlich behandelt zu werden pflegen.

Vermischte Schriften.

Monatsbericht der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin. (Vergl. Literar. Bericht Nr. CLXVI. S. 11.)

März 1864. Magnus: Ueber die Beschaffenheit der Sonne. S. 166—167.

April 1864. Dove: Ueber die optischen Eigenschaften des Carthamin. S. 236—238. — Dove: Ueber die optischen Eigenschaften des Quarzes. S. 239—243. — Kummer: Ueber die Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten. S. 246—260. (Die allgemeinste Gleichung aller Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten ist:

$$\begin{gathered} a^2q^2r^2 + b^2r^2p^2 + c^2p^2q^2 + d^2p^2s^2 + e^2q^2s^2 + f^2r^2s^2 \\ + 2bcp^2qr - 2acpq^2r - 2abpqr^2 - 2cdp^2qs + 2cepq^2s - 2depqs^2 \\ + 2bdp^2rs + 2bfr^2s + 2dfprs^2 + 2aeq^2rs + 2afgr^2s + 2efqrs^2 \\ - 4gpqrs = 0, \end{gathered}$$

wo a, b, c, d, e, f, q Constanten und p, q, r, s beliebige lineare Functionen der Coordinaten sind. Es lässt sich leicht übersehen, dass die allgemeine Gleichung der Flächen des vierten Grades mit 16 singulären Punkten 18 Constanten enthält). — Borchardt: Ueber die Multiplicatoren höherer Ordnungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen. S. 276. (Blosse Mittheilung des Titels einer gelesenen Abhandlung.) — Kummer: Ueber die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten Ordnung und die der ersten Klasse. S. 282. (Blosse Mittheilung des Titels einer gelesenen Abhandlung.)

Mai 1864. Kronecker: Ueber den Gebrauch der Dirich-

let'schen Methoden in der Theorie der quadratischen Formen. S. 285—303. — Borchardt: Anwendung der Theorie der Multiplicatoren höherer Ordnungen auf die isoperimetrischen Differentialgleichungen. S. 307. (Blosse Mittheilung des Titels einer gelesenen Abhandlung.) — Du Bois-Reymond: Ueber die räumliche Ausbreitung des Schlages der Zitterfische. S. 317—354.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXIII. S. 15).

Band XLVII. Heft V. v. Littrow: Ueber die Methode der Längenbestimmung durch Circummeridianhöhen und deren Anwendung während der Weltumsegelung S. M. Fregatte Novara. S. 394. — Koller: Bericht über ein nahezu vollendetes handschriftliches Werk des verstorbenen Akademikers Dr. K. Kreil über die Klimatologie von Böhmen. S. 427. — Pechmann: Ueber die Abweichung der Lothlinie bei astronomischen Beobachtungsstationen und ihre Berechnung als Erfordernisse einer Gradmessung. S. 432.

Band XLVIII. Heft I. und II. Puschl: Notiz über die Molecularbewegung in Gasen. S. 35. — Šubic: Ueber die absolute Grösse der inneren Arbeit, des Aequivalents der Temperatur und über den molecularen Sinn der specifischen Wärme. S. 62. — Freih. v. Wüllerstorf: Bemerkungen über die physikalischen Verhältnisse des adriatischen Meeres. S. 85. — v. Vivenot jun.: Ueber einen neuen Verdunstungsmesser und das bei Verdunstungsbeobachtungen mit demselben einzuschlagende Beobachtungsverfahren. S. 110. — Lippich: Ueber die Natur der Aetherschwingungen im unpolarisirten und theilweise polarisirten Lichte. S. 146.

Band XLVIII. Heft III. Schrauf: Beitrag zu den Berechnungsmethoden des hexagonalen Krystallsystems. S. 250. — Mach: Zur Theorie des Gehörorgans. S. 283. — Oppolzer: Bahnbestimmung des Planeten (58) „Concordia.“ S. 315. — Otto von Littrow: Ueber einen Heliostaten nach August's Princip. S. 337.

Band XLVIII. Heft IV. v. Waltenhofen: Ueber das elektromagnetische Verhalten des Stahles. S. 518. — Schmidt: Feuermeteor am 18. October 1863. S. 551. — Haidinger: Herrn Director Julius Schmidt's Feuermeteor am 18. October 1863. S. 559. — v. Waltenhofen: Ueber eine anomale Magnetisirung des Eisens. S. 564.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa,

F. Brioschi a Pavia *), A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4⁰. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXV. S. 12.)

Tom. V. No. 6. Sopra la curvatura di alcune linee prodotte dall' intersezione di due superficie del secondo grado. Memoria del Prof. B. Tortolini. p. 305. — Intorno ad una problema indeterminato. Lettere indirizzate dal Signor V. A. Lebesgue e dal Signor A. Genocchi a D. B. Boncompagni. p. 328. — Sulla teoria delle Coniche. Nota del Prof. L. Cremona. p. 330. — **Rivista Bibliographica.** Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra: Notizia Bibliographica del Prof. L. Cremona. p. 332. — Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-âge. Examen de l'ouvrage allemand intutilé: Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker von Dr. Moritz Cantor. (Halle 1863. 8⁰.) Par Th. Henri Martin. Continuazione e fine. p. 337. — Pubblicazioni Recenti. p. 392. — Indice generale di tutti gli articoli. p. 393. — Avvertenza pel registro. p. 394.

Tom. VI. No. 1. Intorno alla riduzione degl' integrali ellittici. Nota del Professore Angelo Genocchi. p. 5. — Intorno ad un modo di condurre le normali, e di determinare i punti dell' Ellisse. Nota 1ª di Enrico Egger. p. 18. — La Trajettoria dell' Ugenio, ortografia della curva pei corsi dei cunei nelle volte a botte obblique, è l'Evolvente della Catenaria. Nota 2ª del medesimo. p. 19. — In aggiunta a quella del Professore Azzarelli intitolata „Alcune proprietà d'una curva trascendente." Tom. V. pag. 72. Nota 3ª del medesimo. p. 21. — Sur les trajectoires sous un angle quelconque donné, d'un système de coniques, planes et sphériques, homofocales. Par Mr. W. Roberts. p. 28. — **Rivista bibliographica.** Sopra la trasformazione del Sig. Jerrard per l'equazioni di quinto grado. Articolo del Prof. B. Tortolini. p. 33. (Mit besonderer Beziehung auf und im Anschluss an Archiv. Thl. XLI. S. 105. theilt Herr Tortolini, ganz wie an dieser Stelle des Archivs geschehen, den Hauptinhalt der merkwürdigen und seltenen Bring'schen Dissertation mit, aus welcher hervorgeht, dass die gewöhnlich nach Jerrard benannte Transformation der Gleichungen des fünften Grades Erland Samuel Bring, der Professor Historiarum in Lund war, schon im vorigen Jahrhundert gefunden hat, und dass also diese **Bring'sche** (nicht mehr Jerrard'sche) **Transformation** entschieden und durchaus eine **schwedische Erfindung** ist, worauf nicht oft genug hingewiesen und aufmerksam gemacht werden kann, weshalb auch Herr

*) Jetzt in Mailand.

Tortolini besonderen Dank verdient, dass er zur weiteren Verbreitung dieser merkwürdigen Thatsache auch das Seinige beizutragen nicht unterlassen hat.) — Risoluzione di problemi relativi all' ellisse ed al circolo. Articolo del Prof. Barnaba Tortolini. p. 43.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura dei Professori G. Battaglini, V. Janni e N. Trudi etc. (S. Literar. Ber. Nr. CLXV. S. 11.)

Anno II. Gennaio 1864. Riduzione in Serie delle Facoltà analitiche; per Novi. p. 1. — Lezioni sulla teoria delle funzioni Jacobiane ad un solo argomento; per Brioschi. p. 8. — Sulla necessaria esistenza di una radice reale od immaginaria in ogni equazione algebrica; per G. Foscolo. p. 13. — Sulla teoria delle coniche; per L. Cremona. p. 17. — Sul processo del massimo comun divisore fra due funzioni intere di una variabile; per N. Trudi. p. 21. — Intorno al metodo di approssimazione di Newton; per A. Genocchi. p. 27. — Quistioni. p. 29. — Soluzione delle Quistioni 1, 2, 14, 15.... p. 30.

Anno II. Febbraio 1864. Lezioni sulle funzioni Jocobiane ad un solo argomento; per F. Brioschi. p. 33. — Riduzione in serie delle facoltà analitiche; per G. Novi. p. 40. — Dimostrazione d'un Teorema intorno ai prodotti d'alcune somme di quadrati; per A. Genocchi. p. 47. — Soluzione delle quistioni 28 e 29; per V. Janni. p. 49. — Soluzione delle quistioni 28 e 29; per Battaglini. p. 52. — Problemi sulle Coniche; per E. d'Ovidio. p. 58. — Quistioni. p. 62. — Sullo dimostrazione del parallelogrammo delle forze; per A. Dorna. p. 63.

Anno II. Marzo 1864. Sulla stabilità dell' equilibrio; per A. Dorna. p. 65. — Sulle derivate di ordine superiore delle funzioni composte; per P. Tardy. p. 73. — Considerazioni sulle curve piane del terz' ordine; colle soluzioni delle quistioni 26 e 27; per L. Cremona. p. 78. — Soluzione delle Quistioni 26 e 27; per G. Battaglini. p. 86. — Quistioni. p. 91. — Metodo elementare per calcolare speditamente valori prossimi del rapporto della circonferenza al diametro; e per trovare tanti termini quanti si vogliano delle serie circolari; per G. Mazzola. p. 92. — Soluzione della questione 694 de' Nouvelles Annales; per Luigi Ferrara. p. 95.

Rendiconto delle sessioni dell' Accademia delle

scienze dell' Istituto di Bologna. Anno accademico 1863—1864. Bologna 1864.

Auch dieses neue „Rendiconto“ (der Bericht für 1862—1863 ist im Literar. Ber. Nr. CLXII. S. 19. angezeigt worden) liefert wiederum den Beweis von der grossen und höchst regelmässigen Thätigkeit der berühmten Akademie der Wissenschaften in Bologna. Unsere Leser wissen schon aus früheren Anzeigen, dass in diesem „Rendiconto“, welches jährlich am Schluss der Sitzungen abgestattet wird, nur der Inhalt der gelesenen und späterhin zu veröffentlichenden Abhandlungen kurz angezeigt wird, so dass wir also auch hier uns darauf beschränken müssen, die gelesenen Abhandlungen grösstentheils nur nach ihren Titeln anzuzeigen und über dieselben, wenn sie in unsere Hände gelangen, so weit sie vorzugsweise in den Kreis unserer Zeitschrift gehören, ausführlicher Bericht zu erstatten, wie dies auch früher meistens von uns geschehen ist.

3ª sessione ordinaria, 26. Novembre 1863. Legge il Prof. Cav. Luigi Cremona: Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola gobba. p. 25. (Diese schöne, für die geometrische Theorie der Curven wichtige und interessante Abhandlung ist bereits im Literarisch. Berichte Nr. CLXVI. S. 7. ausführlicher von uns angezeigt worden.) — 14ª sessione ordinaria, 3. Marzo 1864. Legge il Prof. Commend. Gherardi una Nota: Sul ripartimento della Imposta fondiaria. p. 68. (Diese, in staatswissenschaftlicher Rücksicht interessante Abhandlung, welche mathematisch gehalten ist, war von dem Herrn Verfasser unter dem 9. Februar dem Minister der Finanzen mitgetheilt worden und verdient zu weiterer Beachtung empfohlen zu werden. Bezug ist in derselben genommen auf die Schrift: Baravelli, Saggio di un metodo di perequazione dell' imposta ec. Bologna 1863.) In derselben Sitzung theilte Herr Commendatore Gherardi eine an Prof. Cav. Fiorelli in Neapel gerichtete, hier mitgetheilte „Lettera sopra un singolare esperimento del Magnetismo delle terre cotte“ mit. p. 71. — 15ª sessione ordinaria, 10. Marzo 1864. Legge il Dott. Giulio Casoni: Dei Venti nel clima di Bologna. p. 75. — 22ª sessione ordinaria, 12. Maggio 1864. Legge l'Accademico Pensionato Prof. Lorenzo Della Casa una Memoria intitolata: Ulteriori osservazioni sulla induzione elettrostatica. p. 150. — Legge il Prof. P. Domenico Chelini: Delle sezioni del cono e della Prospettiva per ciò che riguarda l'insegnamento della Geometria analitica. p. 152. (Wir hoffen von dieser Abhandlung nächstens eine ausführlichere Anzeige liefern zu können.) — 23ª ses-

sione ordinaria, 19. Maggio 1864. Il Prof. Respighi legge una sua relazione sulla Cometa VI. 1863. da lui scoperta in questo Osservatorio nella sera del 28 p. p. Decembre. p. 153. (Herr Respighi giebt folgende parabolische Elemente des obigen von ihm entdeckten Cometen:

Durchgang durch das Perihel $\tau = 1863$. Dec. $27^t,800441$ Berlin. m. Z.
Länge des Perihels $\pi = 60^0.24'.34'',9$ } Mittler. Aequin. 1864,0.
Länge des Knoten $\Omega = 304.43.25,3$ }
Neigung $i = 64.28.15,6$.
Logarithmus der Perihel-Distanz $\log q = 9,8873328$.)

Preisfragen

der physikalisch-mathematischen Klasse der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften für die Jahre 1866 und 1867.

Bekannt gemacht in der öffentlichen Sitzung am Leibnizischen Jahrestage den 7. Juli 1864.

I.

(Aus dem Steiner'schen Legate.)

In einer in den Monatsberichten der Akademie vom Januar 1856, sowie in dem 53. Bande des Crelle'schen Journals veröffentlichten Abhandlung hat Steiner eine Reihe von Fundamental-Eigenschaften der Flächen dritten Grades mitgetheilt, und dadurch den Grund zu einer rein geometrischen Theorie derselben gelegt. Die Akademie wünscht, dass diese ausgezeichnete Arbeit des grossen Geometers nach synthetischer Methode weiter ausgeführt und in einigen wesentlichen Punkten vervollständigt werde. Dazu würde es zunächst nothwendig sein, die grösstentheils nur angedeuteten oder ganz fehlenden Beweise der aufgestellten Hauptsätze zu geben; dann aber müsste die Untersuchung auch auf die von Steiner nicht berücksichtigten Fälle, in denen die zur geometrischen Construction der in Rede stehenden Flächen dienenden Elemente zum Theil imaginär sind, ausgedehnt werden. Ausserdem ist eine genaue Charakterisirung der verschiedenen Gattungen von Raumcurven, in welchen zwei solche Flächen sich schneiden können, zwar nicht unumgänglich erforderlich, würde aber von der Akademie als eine wichtige Ergänzung der Steiner'schen Theorie betrachtet werden.

Die ausschliessende Frist für die Einsendung der dieser Aufgabe gewidmeten Schriften, welche nach der Wahl der Bewerber in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache abgefasst sein können, ist der 1. März 1866. Jede Bewerbungsschrift ist mit einem Motto zu versehen und dieses auf dem Aeussern des versiegelten Zettels, welcher den Namen des Verfassers enthält, zu wiederholen. Die Ertheilung des Preises von 600 Thalern geschieht in der öffentlichen Sitzung am Leibnizischen Jahrestage im Monat Juli des Jahres 1866.

II.

Die Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen, welche schon jetzt fast in allen Theilen der Mathematik die Lösung von Aufgaben möglich gemacht hat, für welche die früher der Analysis zu Gebote stehenden Hülfsmittel nicht ausreichten, ist ohne Zweifel noch zahlreicher weiterer Anwendungen fähig; und es stellt daher die Akademie folgende Preisfrage:

> „Es soll irgend ein bedeutendes Problem, dessen Gegen-
> „stand der Algebra, Zahlen-Theorie, Integral-Rechnung,
> „Geometrie, Mechanik und mathematischen Physik an-
> „gehören kann, mit Hülfe der elliptischen oder der Abel-
> „schen Transcendenten vollständig gelöst werden."

Die ausschliessende Frist für die Einsendung der dieser Aufgabe gewidmeten Schriften, welche nach der Wahl der Bewerber in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache abgefasst sein können, ist der 1. März 1867. Jede Bewerbungsschrift ist mit einem Motto zu versehen und dieses auf dem Aeussern des versiegelten Zettels, welcher den Namen des Verfassers enthält, zu wiederholen. Die Ertheilung des Preises von 100 Ducaten geschieht in der öffentlichen Sitzung am Leibnizischen Jahrestage im Monat Juli des Jahres 1867.

Quaestiones quas Academiae Regiae scientiarum Borussicae classis physica et mathematica certamini litterario in a. 1866 et 1867

proponit, promulgatae in conventu sollemni anniversario Leibnitii memoriae dicato d. 7. m. Julii a. 1864.

I.

(*Ex pecunia a Steinero instituendis certaminibus litterariis legata.*)

Quum Ill. Steinerus commentatione egregia, quae anno MDCCCLVI

in relationibus Academiae menstruis prodiit *), fundamenta posuerit quibus superficierum tertii ordinis theoria geometrica superstrui potest, Academia scientiarum viros in methodis syntheticis versatos cohortatur, ut quae a praestantissimo geometra inchoata sunt compleant atque perficiant. Quem ad finem id potissimum spectandum erit, primum ut propositionum praecipuarum demonstrationes ab ipso auctore non nisi primis lineis designatae diligenter elaborentur; deinde ut disquisitio geometrica ad eos quoque casus nondum satis exploratos extendatur, in quibus evenit ut elementa quaedam ad superficiei constructionem a Steinero adhibita non sint realia. Praeterea etsi Academia non postulat, ut lineae duplicis curvaturae ex intersectione duarum superficierum tertii ordinis prodeuntes accuratius examinentur, tamen rem gravissimam facturum esse censet, qui hanc partem Steinerianae doctrinae suppleverit.

Constitutae sunt Calendae Martiae anni MDCCCLXVI, ultra quas nullae commentationes ad certamen admittentur. Addendae sunt ex more solito commentationibus schedulae, quae nomen auctoris contineant, obsignatae atque iisdem inscriptionibus, quae commentationibus praefixae sunt, insignitae. Praemium, quod est DC Ioachimicorum, adiudicabitur in conventu sollemni Leibnitiano, qui habebitur mense Iulio anni MDCCCLXVI. In conscribendis commentationibus lingua uti licet sive Germanica sive Latina sive Gallica.

II.

Theoria functionum ellipticarum et Abelianarum iam in omnibus fere matheseos partibus problematum, quae antehac difficillima videbantur, solutionem perfectam suppeditavit. Neque dubitandum est quin plura adhuc nec minus gravia eiusdem generis restent, quae novos geometrarum conatus exspectant. Quam ob rem Academiae scientiarum visum est hanc publice proponere quaestionem:

> ,,ut problema quodcunque maioris momenti, cuius argumentum
> ,,ex algebra, doctrina numerorum, calculo integrali, geome-
> ,,tria, disciplina mechanica et physica mathematica sumi potest,
> ,,transcendentium ellipticarum aut Abelianarum ope absol-
> ,,vatur.‘‘

Constitutae sunt Calendae Martiae anni MDCCCLXVII, ultra quas nullae commentationes ad certamen admittentur. Addendae sunt ex more solito commentationibus schedulae quae nomen auctoris contineant, obsignatae et iisdem inscriptionibus, quae commentationibus praefixae sunt, insignitae. Praemium quod est centum ducatorum aureorum adiudicabitur in conventu sollemni Leibnitiano, qui habebitur mense Iulio anni MDCCCLXVII. In conscribendis commentationibus lingua uti licet sive Germanica sive Latina sive Gallica.

---

*) Videas etiam diarii Crelliani vol. LIII.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LXVII.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Arroneet, Grundriss der Mathematik für Gymnasien. gr. 8⁰. Leipzig. 22½ Ngr.

Arithmetik.

Du Bois-Reymond, Beiträge zur Integration der partiellen Differentialgleichungen mit 3 Variablen. I. Heft. Die Theorie der Charakteristiken. gr. 8⁰. Leipzig. 1 Thlr. 22 Ngr.

T. Franke, Die Elemente der Zahlenlehre. gr. 8⁰. Leipzig. 18 Ngr.

Frickhöffer, Uebungsbuch zum schriftlichen und mündlichen Rechnen. Neu bearbeitet von J. Welker. 2. Hft. 4. Aufl. 8⁰. Wiesbaden. 4 Ngr.

H. P. G. Grünfeld, Rechenbuch für Elementarschulen. 9. Aufl. 8⁰. Schleswig. cart. ⅓ Thlr.

— — für Mittel- und Oberklassen in Volksschulen. 1 Thl. 11. Aufl. Ebendas. 8⁰. geb. 15 Ngr.

Heyer, Rechenbuch für Volksschulen. 1. Thl. 11. Aufl. 12⁰. Hannover. 4 Ngr.

Köhler, Logarithm.-trigonom. Handbuch. 9. Ausg. Lex.-8⁰. Leipzig. 27 Ngr.

Köppen, Aufgabensammlung zum Rechnen. 1.—3. Hft. 8⁰. Worms. 7 Ngr.

E. L. Kraft, Zinstafeln zur sicheren Berechnung der Zinsen von 1—200,000 Fl. Capital von 1—365 Tagen. 5. Aufl. gr. 8⁰. Stuttgart. In engl. Einband. 1 Thlr. 2 Ngr.

C. W. Petersen, Kleines Rechenbuch. 2. Aufl. 8⁰. Schleswig. cart. 5 Ngr.

L. Sobolewski, Grössere Aufgabensammlung für das Tafelrechnen. 2. Hft. 1. u. 2. Abth. gr. 8⁰. Glogau. 3 Ngr.

— — Auflös. dazu. 2. Hft. 1. Abth. gr. 8⁰. Ebendas. 3 Ngr.

— — Musterbeispiele von angewandten Aufgaben für Kopfrechnen. 2. Hft. 1. Abth. gr. 8⁰. Ebend. 3 Ngr.

E. Stoffel, De l'intégration des équations aux différentielles

partielles du premier ordre. — Étude sur les étoiles doubles. gr. 4. Strassbourg. 1 Thlr. 20 Ngr.

J. Strehl, Methodik der Rechenkunst. Neu bearbeitet von Schubert. 3. Aufl. 8⁰. Wien. 1 Thlr.

A. Stubba, Anweisung für den Rechenunterricht in Schulen u. Schullehrer-Seminaren. 2 Thle. 3. Aufl. 8⁰. Leipz. 1 Thlr. 27 Ngr.

Tabellen zur Erleichterung der vier ersten Rechnungsarten und des grossen Einmaleins. 8⁰. Wien. 1 Ngr.

G. v. Vega, Logarithm.-trigonometrisch. Handbuch. 48. Aufl. 9. Abdr. Bearb. v. C. Bremiker. gr. 8⁰. Berlin. 1 Thlr. $7\frac{1}{2}$ Ngr.

Wiener, Zinses-Zins- und Renten-Rechnung. 3. Aufl. 8⁰. Darmstadt. 24 Ngr.

Geometrie.

Cours de géométrie et trigonométrie avec de nombreux exercices à l'usages des collèges et des établissements d'instruction privée. gr. 8⁰. Tournay. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

A. Diesterweg, Elementare Geomet. für Volksschulen. 2. Aufl. gr. 8⁰. Frankfurt a. M. geh. 12 Ngr.

— — Commentar dazu für Lehrer. gr. 8. Ebendas. 5 Ngr.

H. Grethen, Factorentafel zur Berechnung des Kreisabschnittes, Kreisbogens und Centriwinkels aus der Sehne und Bogenhöhe. gr. 8⁰. Bochum. $2\frac{1}{2}$ Ngr.

Kehr, Geometrische Rechenaufgaben für gewerbliche Fortbildungsschulen. 2. Aufl. 8⁰. Gotha. 9 Ngr.

K. Moshammer, Centralprojectionen der Linien zweiter Ordnung. Lex.-8⁰. Wien. 9 Ngr.

Ch. Ruchonnet, Exposition géométrique de propriétés générales des courbes. gr. 8⁰. Zürich. 1 Thlr.

C. Schmitt, Die Principien der neueren ebenen Geometrie und deren Anwendung auf die gradlinigen Figuren und den Kreis. gr. 8⁰. Wien. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

C. Spitz, Lehrbuch der Stereometrie, nebst Sammlung von 220 Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten. 2. Aufl. gr. 8⁰. Leipzig. 24 Ngr. — Resultate dazu. 4 Ngr.

H. Westberg, Die Elemente der Geometrie. 3. Aufl. gr. 8⁰. Reval. 18 Ngr.

Wiener, Die Vielecke und Vielflache. gr. 4⁰. Leipzig. 24 Ngr.

Trigonometrie.

C. Spitz, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst einer Sammlung von 500 Uebungsaufgaben. 2. Aufl. gr. 8⁰. Leipzig. 16 Ngr. — Resultate dazu 8 Ngr.

Wittiber, Sammlung trigonometrischer Aufgaben nebst Auflösungen. 1. Theil. Aufgaben. gr. 8⁰. Breslau. 18 Ngr.

Geodäsie und praktische Geometrie überhaupt.

F. Hartner, Handbuch der niederen Geodäsie. 3. Aufl. 1. Hälfte. Lex.-8⁰. Wien. 4 Thlr. 20 Ngr.

J. Weisbach, Tafel der vielfachen Sinus und Cosinus, sowie der vielfachen Tangenten (für Markscheider). 2. Ausg. Berlin. 10 Ngr.

Mechanik.

P. J. E. Fink, Mécanique rationelle. 8⁰. Strassbourg. 6 fr. 50 c.

Praktische Mechanik.

Ritter, Lehrbuch der technischen Mechanik. 2. Heft. Lex.-8⁰. Hannover. 1½ Thlr.

Astronomie.

Annalen der königl. Sternwarte in München, herausgegeben von Lamont. 13r Bd. gr. 8⁰. München. geh. 1 Thlr. 20 Ngr.

J. Frischauf, Bahnbestimmungen des Kometen 1863 II. Lex.-8⁰. Wien. 2 Ngr.

Gauss, Théorie du mouvement des corps célestes parcourant des sections coniques autour du soleil. Traduit du Theoria motus de Gauss, suivi de notes par E. Dubois. 8⁰. Paris. 15 fr.

Hansen, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. 2. Abth. hoch. 4⁰. Leipz. 3 Thlr.

K. v. Littrow, Physische Zusammenkünfte der Asteroiden im Jahre 1864. Lex.-8⁰. Wien. 2 Ngr.

Th. Oppolzer, Entwickelung von Differenzialformeln zur Verbesserung einer Planeten- und Kometenbahn nach geocentrischen Orten nebst Anwendung derselben auf die Bahnbestimm. d. Planeten (64) u. d. Kometen I. 1861. Lex.-8⁰. Wien. 8 Ngr.

Physik.

H. A. Brettner, Leitfaden für den Unterricht in der Physik. 16. Aufl. gr. 8⁰. Breslau. 25 Ngr.

De Colnet-d'Huart, Nouvelle théorie mathématique de la chaleur et de l'électricité. I. Partie. gr. 8⁰. Luxembourg. 1 Thlr.

Crüger, Grundzüge der Physik für die mittlere Lehrstufe. 9. Aufl. 8⁰. Erfurt. 15 Ngr.

K. Koppe, Anfangsgründe der Physik für den Unterricht in oberen Classen der Gymnasien u. Realschulen. 8. Aufl. gr. 8⁰. Essen. 1 Thlr. 8 Ngr.

J. Müller, Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 6. Aufl. II. Band. 7.—8. Lief. gr. 8⁰. Braunschweig. 1 Thlr.

Th. v. Zollikofer und J. Gobanz, Höhenbestimmungen in Steiermark. 4⁰ mit 1 Karte. Graz. 2 Thlr. 7½ Ngr.

Vermischte Schriften.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissensch. Mathematisch-naturwissensch. Classe. 23. Band. gr. 4⁰. Wien. 15 Thlr.

Mélanges physiques et chimiques tirés du Bulletin de l'Académie imp. des sciences de St. Pétersbourg. Tome V. Livr. 6. gr. 8⁰. St. Pétersbourg. 24 Ngr.

Mémoires de l'Académ. imp. des sciences de St. Pétersbourg. Ser. VII. Tome VIII. No. 2. gr. 4⁰. St. Pétersbourg. 8 Ngr. — Vier von de l'Isle beobachtete Plejadenbedeckungen.

Memorie di matematica e di fisica della societa italiána delle scienze fondata da M. A. Lorgna. Serie seconda. Tomo I. 4⁰. Con 11 tavole. Modena.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-physik. Classe. Jahrg. 1864. I. Abth. Hft. 1. und II. Abth. Hft. 1. Lex.-8⁰. Wien. 16 Ngr.

Verhandelingen der kon. Akademie van Wetenschappen. Deel X. Amsterdam. 7 fr. 80 c.

Literarischer Bericht

CLXVIII.

Arithmetik.

Jahresbericht der Wiener Handels-Akademie. Am Schlusse des Studienjahres 1863. Wien. 1863. 8°.

Jahresbericht der Wiener Handels-Akademie. Am Schlusse des Studienjahres 1864. Wien. 1864. 8°.

Beide Schriften im Selbstverlage der Akademie.

In diesen beiden Jahresberichten finden sich resp. zwei Abhandlungen des Herrn Professor S. Spitzer in Wien, nämlich:

> Ueber die Pensionsvereine der Beamten österreichischer Eisenbahn-, Dampfschifffahrts- und Bank-Gesellschaften (1863).

und:

> Ueber Invaliden-Pensionen (1864).

welche zwei namentlich in jetziger Zeit in socialer Beziehung sehr wichtige Gegenstände behandeln, und sowohl deshalb, als auch wegen der Gründlichkeit und Deutlichkeit der Darstellung, und der zur Erleichterung der praktischen Rechnungen beigefügten Tafeln, der Aufmerksamkeit der Leser des Archivs recht sehr zu empfehlen sind.

Geometrie.

Die Principien der neueren ebenen Geometrie und deren Anwendung auf die geradlinigen Figuren und den Kreis. Ein Lehrbuch für höhere Unterrichtsanstalten von Carl Schmitt, Hauptmann im k. k. Genie-

Stabe, Professor der höheren Mathematik an der k. k. Genie-Akademie*). Wien. Carl Gerold's Sohn. 1864. 8°.

Es liegt uns hier ein kleineres Lehrbuch der Elemente der neueren Geometrie, so weit dieselbe die gerade Linie und den Kreis und die dadurch entstehenden ebenen geometrischen Gebilde betrifft, vor, welches wir für sehr geeignet halten, als Grundlage des Unterrichts in der neueren Geometrie auf höheren Lehranstalten zu dienen, wenn man dieses Lehrobject, wie allerdings sehr zu wünschen ist, überhaupt als einen besonderen Theil in den mathematischen Unterricht auf den genannten Lehranstalten aufnehmen will. Ja wir glauben, dass es noch keine Schrift giebt, welche sich zu dem genannten Zwecke so gut eignet wie die vorliegende, und sind der Meinung, dass Herr Hauptmann und Professor Schmitt sich durch deren Herausgabe ein sehr anerkennungswerthes Verdienst um den mathematischen Unterricht überhaupt, und den in der neueren Geometrie insbesondere erworben hat. Wir haben die Darstellung überall einfach, deutlich und präcis gefunden, was gerade bei diesem Gegenstande von vorzüglicher Wichtigkeit ist. Auch die einfache Behandlung des Gleichstimmigen und Entgegengesetzten in den Richtungen der Strecken ist dem Zwecke des Büchleins sehr angemessen. Endlich sind die Hauptlehren überall durch eine grössere Anzahl von Aufgaben und Lehrsätzen erläutert, welche durch kleineren Druck ausgezeichnet sind, um das, was für den eigentlichen Unterricht unentbehrlich ist, auf ein Minimum zu reduciren. Auch zweckmässige kürzere Fragen sind eingestreuet. Aus allen diesen Gründen glauben wir alle Lehrer der Mathematik auf dieses Büchlein recht sehr aufmerksam machen zu müssen, so wie überhaupt auch Jeden, der sich in möglichst kurzer Zeit eine genügende Kenntniss von den Hauptlehren der neueren Geometrie innerhalb des Umfangs, den die Schrift sich selbst vorgezeichnet hat, verschaffen will, ohne gerade zu beabsichtigen, diese Dinge zu einem ganz besonderen Object tieferer und weiterer Studien zu machen. Um den Geist, in welchem die Darstellung vorzugsweise gehalten ist, im Allgemeinen zu charakterisiren, wird es vollständig hinreichen, zu bemerken, dass der Herr Verfasser vorzugsweise der trefflichen „Géométrie supérieure" von Chasles gefolgt ist.

Der Hauptinhalt ist folgender: **Einleitung.** Geradlinige Segmente. Winkel. Projectionen. — **I. Kapitel.** Von der Bestimmung der Lage der Punkte einer geradlini-

---

*) Zu Bruck bei Znaim in Mähren.

gen Punktreihe. — **II. Kapitel.** Von der Bestimmung der Lage der Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels. — **III. Kapitel.** Theilverhältnisse des Dreiecks. — **IV. Kapitel.** Von den Theilverhältnissen der Polygone. — **V. Kapitel.** Anharmonisches Verhältniss. — **VI. Kapitel.** Collineare Punktreihen und Strahlenbüschel. Geometrische Eigenschaften derselben. — **VII. Kapitel.** Ausdrücke collinearer Punktreihen und Strahlenbüschel. — **VIII. Kapitel.** Von den Doppelpunkten und Doppelstrahlen. — **IX. Kapitel.** Collineare Punktreihen und Strahlenbüschel in Involution. — **X. Kapitel.** Involutionen bei'm Dreiecke, Vierecke und Kreise.

Dieser reiche Stoff ist auf nur 148 Seiten behandelt worden. Druck und Figuren lassen nichts zu wünschen übrig.

Möge das Büchlein sich bald in den Händen recht vieler Lehrer befinden!

Elementi di Geometria analitica per R. Rubini. Napoli. 1864. 8º.

Herr Professor Rubini in Neapel hat seinen beiden ausgezeichneten algebraischen Lehrbüchern, die im Literar. Ber. Nr. CLXII. S. 4. und Nr. CLXVI. S. 2. angezeigt worden sind, jetzt das vorliegende Lehrbuch der analytischen Geometrie (in der Ebene) folgen lassen, welches wir auch deutschen Lesern zur besonderen Beachtung aus mehreren Gründen empfehlen müssen, was durch die folgende, etwas eingehendere Charakterisirung des Buchs gerechtfertigt werden wird. Ausser der blossen Anwendung der Algebra auf die Geometrie zur Lösung von Aufgaben u. s. w. beschäftigt sich das Buch natürlich vorzugsweise mit der eigentlichen analytischen Geometrie, deren Eigenthümlichkeit bekanntlich hauptsächlich darin besteht, dass sie ihre Betrachtungen an gewisse Coordinatensysteme anschliesst und Alles auf dieselben zurückführt und gründet. Es geht nicht über die Ebene und die Gerade, den Kreis und die Kegelschnitte in derselben hinaus, enthält aber innerhalb dieses Umkreises eine grosse Anzahl interessanter und wichtiger Untersuchungen, namentlich auch über die Kegelschnitte. Ganz besondere Aufmerksamkeit und ganz besonderen Fleiss hat der Herr Verfasser auf die Ableitung geometrischer Constructionen aus den analytischen Auflösungen, und auf eine sehr zweckmässige und deutliche Anleitung zur Ausführung solcher Constructionen mittelst der

auf analytischem Wege gewonnenen Resultate verwandt; und an solchen, oft sehr eleganten Constructionen enthält denn auch das Buch einen sehr grossen Reichthum, mehr als in allen übrigen uns bekannten Büchern dieser Art, und ist in dieser Beziehung für einen Jeden jedenfalls ungemein instructiv. Dies ist die eine Seite, durch welche das Buch sich vor anderen Schriften auszeichnet, und welche seine Empfehlung zu sorgfältiger und allgemeiner Beachtung auch in Deutschland vorzugsweise rechtfertigt. — Ausserdem müssen wir besonders die Beachtung hervorheben, welche, neben dem Cartesischen Coordinatensysteme, auch andere neuere Coordinatensysteme gefunden haben, ganz besonders das System der Dreilinien-Coordinaten mit seiner Anwendung auf die Kegelschnitte, was hier in einer Weise geschehen ist, wie nach unserer Meinung bis jetzt in keinem anderen, vorzugsweise als Lehrbuch zur Grundlage bei dem Unterrichte bestimmten Werke, welches die zweite Seite ist, weshalb wir das Buch zu besonderer Beachtung auch bei uns in Deutschland empfehlen müssen.

Die Darstellung ist ungemein deutlich und hat überall einen elementaren Charakter, wobei die schon erwähnten, in grosser Anzahl vorhandenen Constructionen natürlich sehr viel beitragen, um den Lehrling in den Gegenstand zweckmässig einzuführen und ihm die oftmals ziemlich abstracten Gegenstände interessanter zu machen und besser zur Anschauung zu bringen. Indem wir nochmals wünschen, dass das Buch aus diesen Gründen alle verdiente Beachtung auch in Deutschland finden möge, geben wir im Folgenden noch den Hauptinhalt an, wobei wir uns aber leider mit den Ueberschriften der einzelnen Kapitel begnügen müssen, indem wir zu bemerken nicht unterlassen, dass eine vollständige Anschauung von dem reichen Inhalte nur aus den in dem Buche selbst (p. 469—p. 471) nachzusehenden Ueberschriften der einzelnen Artikel zu gewinnen ist:

Libro I. Introduzione. — Cap. I. Applicazione pura dell' algebra alla Geometria. — Cap. II. Delle proïezioni. — Cap. III. Esposizione del metodo delle coordinate. — **Libro II.** Della retta e del circolo. — Cap. I. Della retta. — Cap. II. Del circolo. — **Libro III.** Delle coniche. — Cap. I. Proprietà di queste curve dipendenti da trasformazioni degli assi. — Cap. II. Proprietà delle coniche detotte dalla considerazione de' coefficienti della loro equazione generale. Equazioni di coniche soggette a talune condizioni. — Cap. III. Fuochi, raggi vettori, e direttrici delle coniche. — Cap. IV. Proprietà delle coniche

tratte dalla loro combinazione con una retta. — Cap. V. Costruzioni grafiche. — Cap. VI. Delle coniche riferite ad altri generi di coordinate (Articolo I. Equazione generale delle coniche e formole varie, riferite a coordinate trilineari. — Articolo II. Equazioni speciali delle coniche in coordinate trilineari.) — Cap. VII. Curve inviluppi. Osservazioni generali. — Cap. VIII. Costruzione dell' intersezione di due coniche; o d'un' equazione determinata,

wobei wir noch besonders bemerken, dass auch der eigentlichen Construction der Gleichungen bis einschliesslich zum vierten Grade besondere Aufmerksamkeit gewidmet worden ist.

Die letzte Aufgabe, mit welcher der Herr Verfasser sich beschäftigt, ist das berühmte, schon von Apollonius behandelte, und durch die Durchschnitte einer gleichseitigen Hyperbel mit dem gegebenen Kegelschnitte gelöste*) Problem: „Durch einen beliebig gegebenen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts Normalen an denselben zu ziehen“, welches bekanntlich auf eine Gleichung des vierten Grades führt. Er lehrt dieses Problem durch den Kreis construiren, wie schon De la Hire in seinem Werke über die Kegelschnitte gethan hat. Hierbei thut er auch des schönen Satzes Erwähnung: „dass die von einem Scheitel der Hauptaxe eines Kegelschnitts auf die von einem bestimmten Punkte an den Kegelschnitt gezogenen Normalen gefällten Perpendikel den Kegelschnitt immer in auf der Peripherie eines Kreises liegenden Punkten schneiden“ auf den, in Verbindung mit einem anderen Satze, bekanntlich Joachimsthal die Construction der durch einen gegebenen Punkt an einen Kegelschnitt zu ziehenden Normalen durch den Kreis gegründet hat (Crelle's Journal. Bd. 48. S. 377.). Herr Rubini bemerkt aber, dass derselbe Satz schon früher von dem trefflichen Mathematiker und hochverdienten Lehrer, Herrn Professor Fortunato Padula in Neapel, gefunden und zu dem nämlichen Zwecke angewandt worden ist, wahrscheinlich (was freilich Herr Rubini nicht bemerkt) in der von demselben herausgegebenen ausgezeichneten Sammlung analytisch gelöster geometrischer Aufgaben: „Raccolta di problemi geometrici risoluti con l'analisi algebrica“, so dass also die Priorität der Erfindung des genannten schönen

---

*) Man sehe auch meine analytische Lösung in Thl. XXXII. d. A. S. 129., wo ich namentlich auch gezeigt habe, dass das Problem mittelst einer gleichseitigen Hyperbel gelöst werden kann. G.

Satzes unbedingt Herrn F. Padula gebührt, worauf hinzuweisen wir hier nicht unterlassen dürfen.

Wir wünschen nochmals, dass das Buch sich sorgfältigster Beachtung, auch in Deutschland, erfreuen möge.

Mechanik.

Sammlung von Aufgaben aus der theoretischen Mechanik von Dr. P. Zech, Professor der Mechanik an der polytechnischen Schule in Stuttgart. Stuttgart. Metzler. 1864. 8°

Je weniger Aufgabensammlungen für die Mechanik es giebt: desto mehr ist auf die vorliegende aufmerksam zu machen. Eine deutsche Sammlung ist uns eben so wenig bekannt als dem Herrn Verfasser. Alle hier gegebenen Aufgaben gehören zu den einfacheren und sind für den ersten Unterricht in der Mechanik bestimmt, mit vorzüglicher Berücksichtigung praktischer Anwendung. Benutzt sind hauptsächlich: „Jullien: problèmes de mécanique rationelle, Paris 1855“ und „W. Walton: A collection of Problems of theoretical mechanics. Cambridge 1855“. Aus letzterem Buche hat auch vorzüglich Jullien geschöpft. Die Resultate der Auflösungen sind beigegeben, nicht die Auflösungen selbst. Die Anwendung der höheren Analysis ist nicht ausgeschlossen. Der Inhalt ist folgender: I. Schwerpunktbestimmungen (24 Aufg.) — II. Gleichgewicht in der Ebene ohne Reibung (47 Aufg.) — III. Gleichgewicht im Raume ohne Reibung (9 Aufg.) — IV. Gleichgewicht mit Rücksicht auf Reibung (11 Aufg.) — V. Bewegung eines Punktes (65 Aufg.). — VI. Stoss fester Körper (9 Aufg.). — VII. Festigkeit (16 Aufg.). — VIII. Hydrostatik (15 Aufg.). — IX. Drehung eines Körpers um eine feste Axe (17 Aufg.). — X. Beliebige Bewegung eines Körpers (30 Aufg.)

Wir glauben die ihrem Zweck entsprechende Sammlung zur Beachtung empfehlen zu müssen.

Astronomie.

Die kais. russische Sternwarte zu Pulkowa hat unter der für die Wissenschaft so erfolgreichen Leitung ihres hochverdienten

Directors, des Herrn Otto Struve, wieder einige wichtige Schriften veröffentlicht, die wir — wie es deren Natur mit sich bringt — hier grösstentheils nur ihren Titeln nach anzeigen können, was auch für jeden mit diesen Gegenständen hinreichend Vertrauten vollständig genügt, um die Wichtigkeit dieser Publicationen ermessen und würdigen zu können. Diese Schriften sind die folgenden:

1. Positiones mediae stellarum fixarum in zonis Regiomontanis a Besselio inter +15° et +45° declinationis observatarum, ad annum 1825 reductae et in catalogum ordinatae auctore Maximiliano Weisse, Directore quondam Speculae Cracoviensis. Jussu Academiae Imperialis Petropolitanae edi curavit et praefatus est Otto Struve, Speculae Pulcovensis Director. Petropoli 1863. 4°.

2. Beobachtungen des Mars um die Zeit der Opposition 1862. Von Dr. A. Winnecke, Astronomen der Nicolai-Hauptsternwarte. St. Petersburg. 1863. 4°.

3. Observations de la grande nébuleuse d'Orion, faites a Cazan et a Poulkova. Par O. Struve. I. Partie: Mémoire de M. Liapounov sur les observations de Cazan. II. Partie: O. Struve, Additions au mémoire de M. Liapounov et Observations de Poulkova. Avec 4 planches. St. Petersbourg, 1862. 4°.

4. Observations faites à l'époque où le plan des anneaux de Saturne passait par le Soleil, par O. Struve.

5. Jahresbericht, am 14. Juni 1863 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte. (Aus dem Russischen übersetzt.) Anhang I. Statuten der Nicolai-Hauptsternwarte. II. Verordnungen des Ministers. St. Petersburg. 1863 8°.

Diesen Jahresbericht müssen wir einem Jeden zu näherer Kenntnissnahme dringend empfehlen, der sich mit der grossartigen Einrichtung und Ausstattung des Instituts, welchem derselbe gewidmet ist, und mit der Grossartigkeit der auf demselben ausgeführten Arbeiten näher bekannt machen will. Wir haben denselben mit dem grössten Interesse gelesen, und sind versichert, dass er auch für jeden Anderen dasselbe Interesse darbieten wird.

6. Die Zeitbestimmung vermittelst des tragbaren Durchgangsinstruments im Verticale des Polarsterns. Von W. Döllen. St. Petersburg. 1863. 4°.

Wir nennen diese Schrift unter den vorstehenden absichtlich zuletzt. Auf ihrem ersten Blatte findet sich die folgende Widmung:

F. G. W. Struve, dem scharfsinnigen Beobachter, dem besonnenen Forscher, dem theuren Lehrer und leuchtenden Vorbilde bringt Pulkowa zum 18. October 1863, dem Tage der fünfzigjährigen Doctorwürde, den Festgruss.

Möge dem würdigen Greise, dem die Astronomie so Vieles, ja die alleinige Begründung und den Ausbau mehrerer ihrer schönsten, interessantesten und wichtigsten Theile verdankt, noch lange vergönnt sein, auf sein funfzigjähriges, so thatenreiches und ruhmvolles wissenschaftliches Wirken zurückzublicken, und an den herrlichen Früchten, welche demselben nach allen Seiten hin schon jetzt entsprossen sind und immer schöner entspriessen werden, sich zu erfreuen, bis er selbst eingehet zu den Räumen, in denen er schon jetzt so heimisch ist!

Der Inhalt dieser Schrift ist ein sehr lehrreicher, und betrifft einen der wichtigsten Theile der neueren praktischen Astronomie, der um so wichtiger ist, weil tragbare Durchgangsinstrumente gegenwärtig in so grosser Vollendung und mit so grosser Genauigkeit verfertigt werden. Eine bessere Anleitung zu den auf dem Titel genannten Bestimmungen in theoretischer und praktischer Beziehung, als die in der vorliegenden schönen Schrift gegebene, ist uns nicht bekannt, weshalb wir diese Schrift sehr zu sorgfältigster Beachtung empfehlen.

Nautik.

Ueber die Deviationen des Compasses, welche durch das Eisen eines Schiffes verursacht werden. Nach dem Englischen von F. J. Evans und Archibald Smith, deutsch bearbeitet von Dr. F. Schaub, Director der hydrographischen Anstalt der k. k. Marine. Wien. Carl Gerold's Sohn. 1864. 8°.

Wie wichtig für die Schifffahrt die genaue Berücksichtigung der Deviationen des Compasses namentlich jetzt ist, wo so grosse Eisenmassen bei dem Schiffsbau verwendet werden, weiss Jeder, der sich nur einigermaassen für die Fortschritte der Nautik interessirt. Die Schrift:

Admiralty Manual for ascertaining and applying the Deviations of the Compass, caused by the iron of a Ship, by E. F. Evans, R. N., F. R. S. Superintendent of the compass Department of the Admiralty, and Archibald Smith, M. A., F., R. S. London. 1862.

enthält Alles, was in theoretischer und praktischer Rücksicht Wissenschaft und Erfahrung bis jetzt über diesen wichtigen Gegenstand gelehrt haben, in im Ganzen sehr zweckmässiger Darstellung. Herr Director und Professor Dr. Schaub in Triest hat sich daher ein lebhaft anzuerkennendes Verdienst um die Nautik erworben, dass er das genannte wichtige englische Werk in einer deutschen Bearbeitung dem deutschen Publikum zugänglicher gemacht hat. Die Schrift des Herrn Prof. Schaub ist aber keineswegs eine blosse Uebersetzung, sondern, namentlich was den theoretischen Theil betrifft, eine Bearbeitung des englischen Werks. In diesem letzteren ist nämlich in dem theoretischen Theile eine grössere Anzahl mathematischer Kenntnisse in Anspruch genommen worden, als man bei dem betreffenden deutschen Publikum vorauszusetzen berechtigt sein dürfte. Deshalb hat Herr Schaub die Theorie der Deviation in einer solchen Weise selbstständig entwickelt, dass dieselbe, wenigstens in ihrer ersten Hälfte, unter Voraussetzung einer gründlichen Kenntniss der ebenen Trigonometrie, und der Bekanntschaft mit dem Parallelogramme der Kräfte, von jedem nur in dieser Weise mathematisch Vorgebildeten ohne Schwierigkeit verstanden werden kann. Auch ist diese mathematische Theorie in der deutschen Bearbeitung, nicht wie in dem englischen Original, bloss als ein Anhang beigefügt, sondern als ein besonderer, die Grundlage für den praktischen Theil bildender, theoretischer Theil vorangestellt worden, wodurch das Werk jedenfalls an Brauchbarkeit wesentlich gewonnen hat, ja sein wissenschaftlicher Werth in Bezug auf strenge systematische Gestaltung bedeutend erhöht worden ist.

Die praktischen Regeln sind ursprünglich von einem Comité, bestehend aus den Admirälen Sir F. Beautort und Sir James C. Ross, Capitän Johnson, Herrn Christie und General Sabine, im Jahre 1842 entworfen worden. Graphische Methoden zur Erleichterung und theilweisen Beseitigung der Rechnungen sind überall gelehrt und die dazu erforderlichen Hülfsmittel sind in lithographirten Tafeln dargestellt und, eben so wie eine Anzahl von Karten der Linien von gleicher magnetischer Declination gleicher magnetischer Inclination, und gleicher Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus (Alles für das Jahr 1860), dem Werke beigefügt worden.

Wir halten dieses Werk für sehr wichtig für die Fortschritte der Nautik und die Sicherheit der Schifffahrt, welches auch ausserdem für jeden Mathematiker und Physiker von grossem Interesse ist, so dass wir Herrn Prof. Schaub nur lebhaft danken können, dass er sich der sehr verdienstlichen Mühe einer deutschen Bearbeitung unterzogen hat.

Meteorologie und Klimatologie.

Ueber die wässrigen Niederschläge aus der Atmosphäre. Ein Beitrag zur Klimatologie von Oberösterreich. Von Augustin Reslhuber, Abt und Director der Sternwarte in Kremsmünster. Selbstverlag des Verfassers. 1863.

In Nr. CXXVIII. S. 6. des Literarischen Berichts hatten wir das Vergnügen anzuzeigen:

Untersuchungen über den Druck der Luft. Ein Beitrag zur Klimatologie Oberösterreichs von P. Augustin Reslhuber, Director der Sternwarte zu Kremsmünster. Linz. 1858.

Jetzt liegt uns die obige Schrift über die wässrigen Niederschläge aus der Atmosphäre, gleichfalls ein Beitrag zur Klimatologie von Oberösterreich, vor, und liefert den höchst erfreulichen Beweis, dass ihr Verfasser, der hochwürdige Herr Abt und Prälat der berühmten Benedictiner-Abtei zu Kremsmünster, Herr Augustin Reslhuber, auch in seinem jetzigen hohen geistlichen Amte noch Musse zu finden weiss, sich mühsamen und ausgedehnten wissenschaftlichen Untersuchungen zu widmen, und die Meteorologie, insbesondere die Klimatologie von Oberösterreich, mit denselben zu bereichern. Den in dieser Schrift angestellten Untersuchungen sind 43jährige, an der Sternwarte zu Kremsmünster 1820—1862 angestellte Messungen der wässrigen Niederschläge, deren Tagebuch S. 47—S. 91 auch vollständig mitgetheilt ist, zu Grunde gelegt. Die unter den Namen Thau, Reif, Beschlag, Rauchfrost, Glatteis, Regen, Schnee, Graupel und Hagel bekannten Niederschläge haben sämmtlich sorgfältige Berücksichtigung und Beachtung gefunden, und die angewandten Instrumente, Beobachtungs- und Berechnungsmethoden sind deutlich beschrieben und angegeben, nachdem im Eingange allgemeine sehr lehrreiche Erläuterungen über die Natur und Entstehung der genannten Niederschläge und über ihre Unterscheidungs-Merkmale gegeben worden sind.

Kremsmünster liegt ziemlich in der Mitte von Oberösterreich, und hat daher zu solchen Beobachtungen eine sehr geeignete Lage für das genannte Kronland. Bis 1850 war der Regenmesser auf der Zinne der Sternwarte in einer Höhe von 219,8 Toisen über der Meeresfläche, von da an auf einem baumfreien Platze des Plateau's der Sternwarte in einer Meereshöhe von 194,8 Toisen aufgestellt. Zur Vergleichung wurden zwei andere Beobachtungsstationen herbeigezogen, welche insofern eine sehr günstige Lage haben, weil sie mit Kremsmünster fast genau unter demselben Meridiane liegen. Diese beiden Stationen sind das Collegium der P. P. Jesuiten auf dem Freienberge in Linz, und Kirchdorf im Traunkreise (Beobachter Bezirksarzt Dr. Carl Schiedemayr) ersteres $3^3/_4$ Meilen nördlich, letzteres 2,3 Meilen südlich von Kremsmünster. Alle diese Vergleichungen haben zu in mehrfacher Rücksicht interessanton und für die Klimatologie Oberösterreichs wichtigen Resultaten geführt, ebenso wie die oben genannte frühere Schrift des Herrn Verfassers.

Wir haben über diese Schrift uns hier absichtlich etwas weiter verbreitet, um sie unseren Lesern zur Beachtung zu empfehlen, weil wir dieselbe nicht etwa bloss für das Land, welchem sie speciell gewidmet ist, für wichtig halten, sondern namentlich deshalb, weil wir glauben, dass sie im Allgemeinen eine sehr gute Anleitung enthält und ein ausgezeichnetes Muster darbietet, wie die nicht leichten Beobachtungen und Messungen wässriger Niederschläge anzustellen, wie dieselben der Rechnung zu unterwerfen, zur Gewinnung wichtiger Resultate unter einander zu combiniren und mit anderen Beobachtungen zu vergleichen sind, ohne dadurch in zu grosse Weitläufigkeiten zu gerathen. Also vorzugsweise aus diesem Grunde, als ein Muster für solche Arbeiten, weisen wir hier auf dieselbe hin, und wünschen dem Herrn Verfasser Glück, dass es ihm in seinem hohen geistlichen Amte möglich gewesen ist, diese mühevollen Untersuchungen zu vollenden.

Vermischte Schriften.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura dei Professori G. Battaglini, V. Janni e N. Trudi etc. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXVII. S. 8.)

Anno II. Aprile 1864. Sulla stabilità dell' equilibrio; per A. Dorna. p. 97. — Soluzione della Questione 26; per E. d'Ovidio. p. 104. — Soluzione della Questione 26; per N. Salvatore

Dino. p. 108. — Metodo elementare per calcolare speditamente valori prossimi del rapporto della circonferenza al diametro, e per trovare tanti termini quanti si vogliono delle serie circolari; per Giuseppe Mazzola. p. 110. — Notizia bibliografica sulle Opere di Desargues; per L. Cremona. p. 115. — Sulla proiezione iperboloidica di una cubica gobba; per L. Cremona. p. 122. — Sul cerchio che taglia armonicamente tre segmenti dati; per A. Serra. p. 127.

Anno II. Maggio 1864. Lezioni sulla teorica delle funzioni Jacobiane ad un solo argomento, per F. Brioschi. p. 129. — Teorica de' covarianti e degli invarianti; per G. Janni. p. 135. — Sulle divisioni omografiche immaginarie; per G. Battaglini. p. 142. — Intorno ad un determinante più generale di quello delle radici delle equazioni; ed alle loro funzioni omogenee complete; per N. Trudi. p. 152. — Soluzione delle quistioni 1, 2, 14, 15. p. 158. — Quistioni. p. 160.

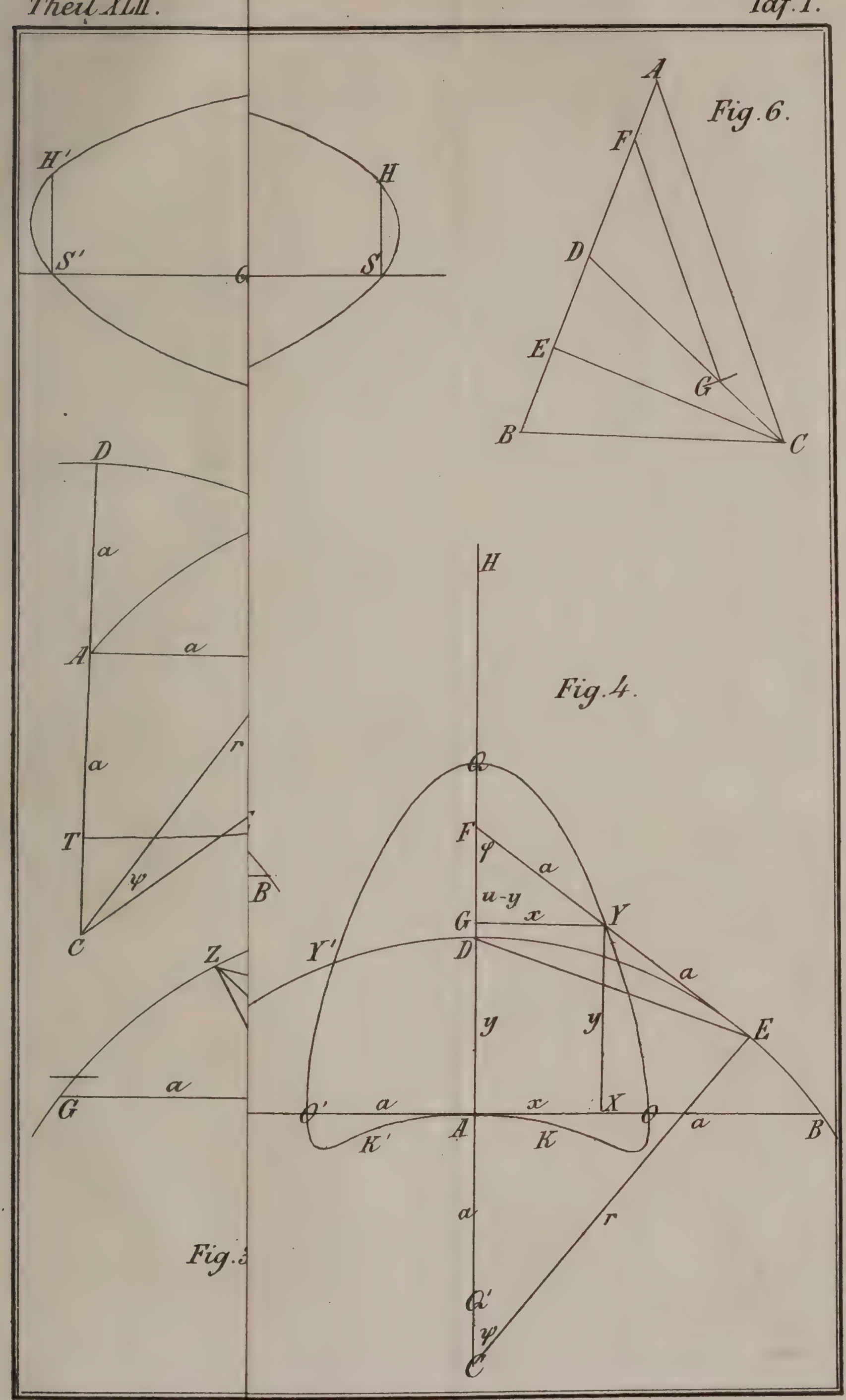
Anno II. Giugno 1864. Teorica de' covarianti e degli invarianti; per G. Janni. p. 161. — Sulle forme binarie de' primi quattro gradi; per G. Battaglini. p. 170. — Intorno ad un determinante più generale di quello delle radici delle equazioni; ed alle loro funzioni omogenee complete; per N. Trudi. p. 180. — Soluzione delle quistioni 30, 31; per G. Battaglini. p. 186. — Soluzione delle quistioni 694 de' Nouvelles Annales; per A. Torelli. p. 191. — Errata corrige; per L. Cremona. p. 192.

Monatsbericht der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin. (Vergl. Literar. Bericht Nr. CLXVII. S. 5.)

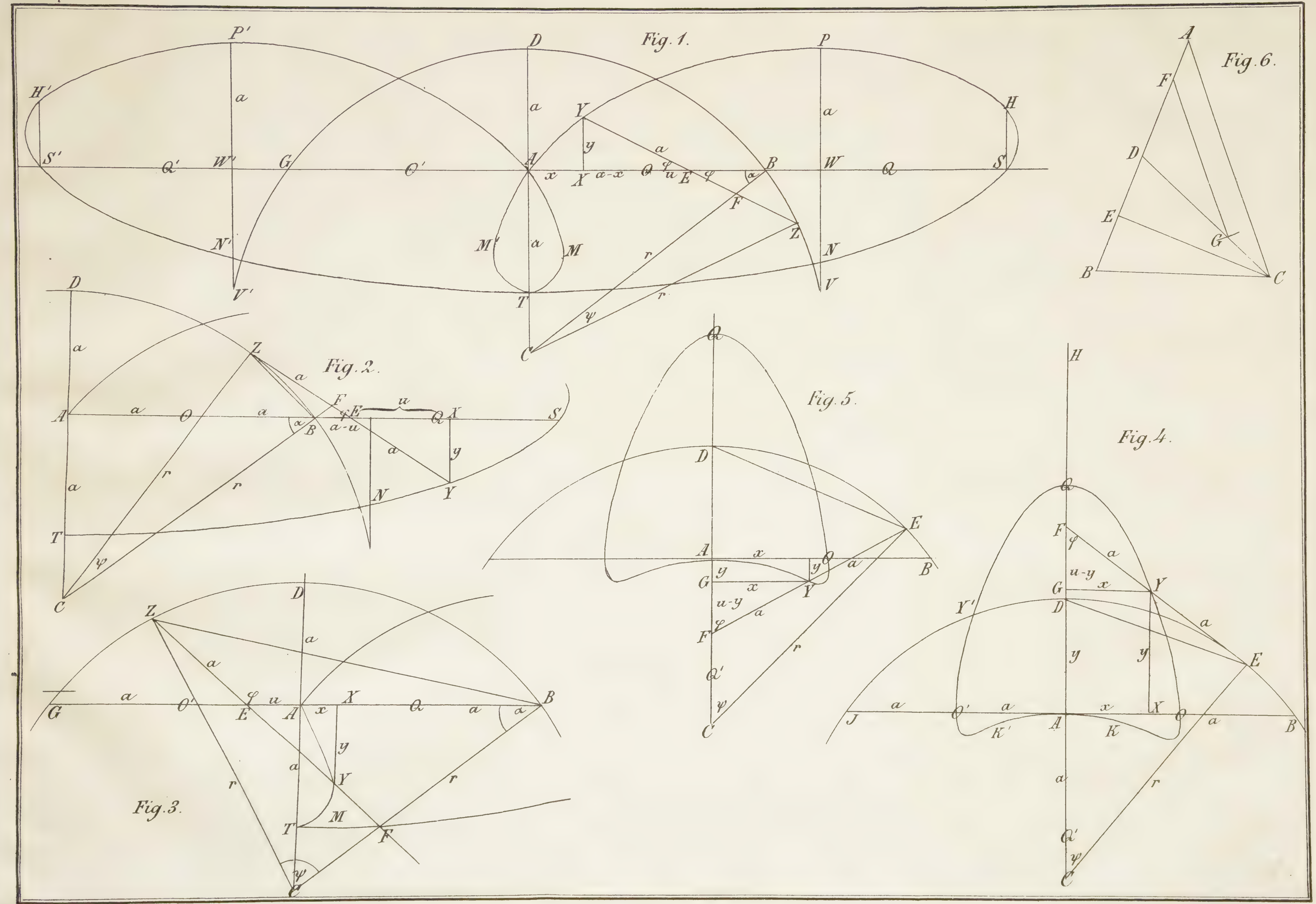
Juni 1864. Weierstrass: Ueber ein die elliptischen Functionen betreffendes Theorem. S. 381. (Blosse Mittheilung des Titels einer gelesenen Abhandlung.)

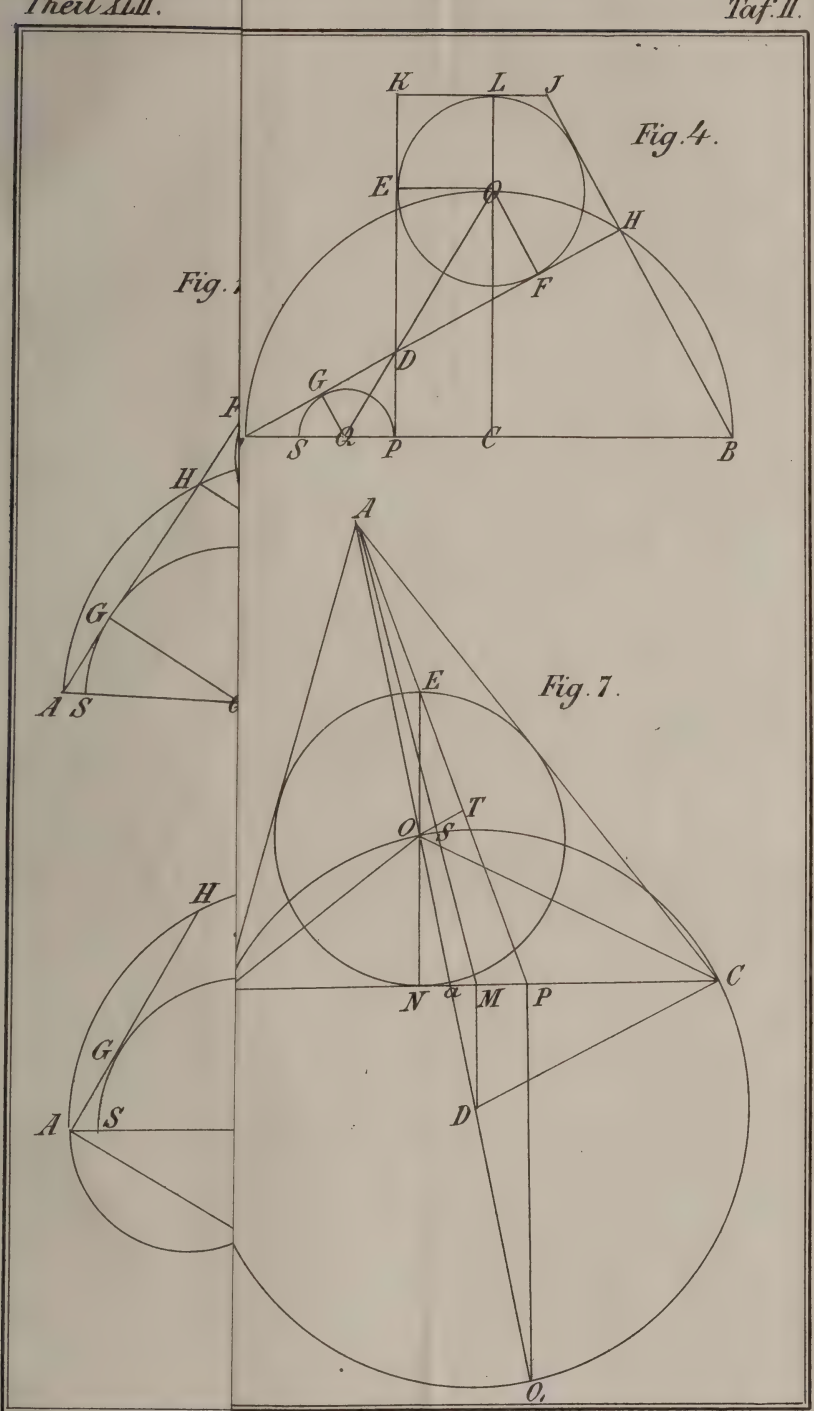
Juli 1864. Kummer: Ueber die Strahlensysteme, deren Brennflächen Flächen vierten Grades mit sechszehn singulären Punkten sind. S. 495—S. 499. (Die betreffenden Gleichungen sind vollständig mitgetheilt, sind aber zu viele, um hier abgedruckt werden zu können.) — Aronhold: Ueber den gegenseitigen Zusammenhang der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve vierten Grades, mitgetheilt von Herrn Weiertrass. S. 499—523. — Poggendorff: Ueber eine neue Klasse von Inductionserscheinungen. S. 552—570.

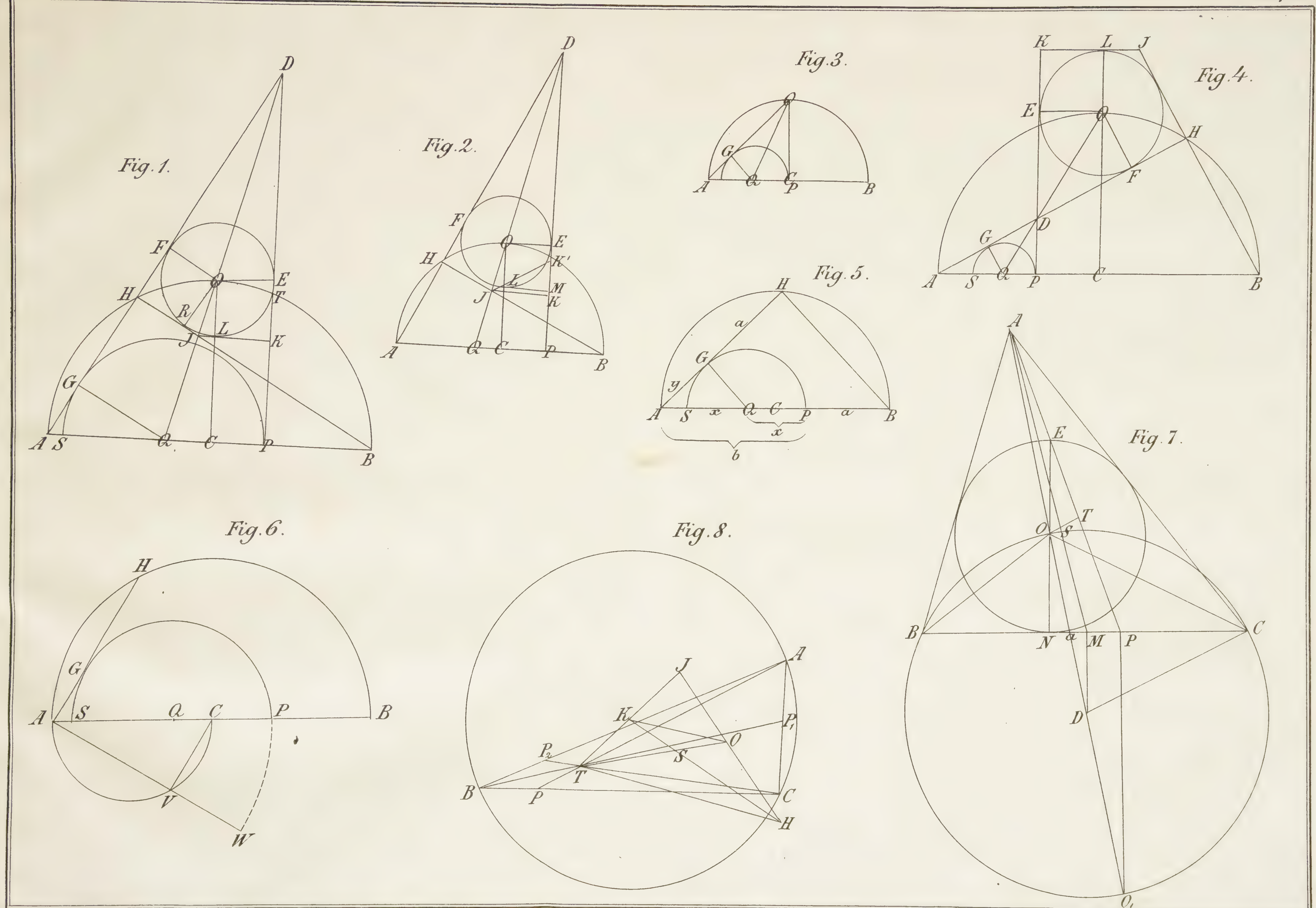
August 1864. Magnus: Ueber Wärmestrahlung. S. 593—598.

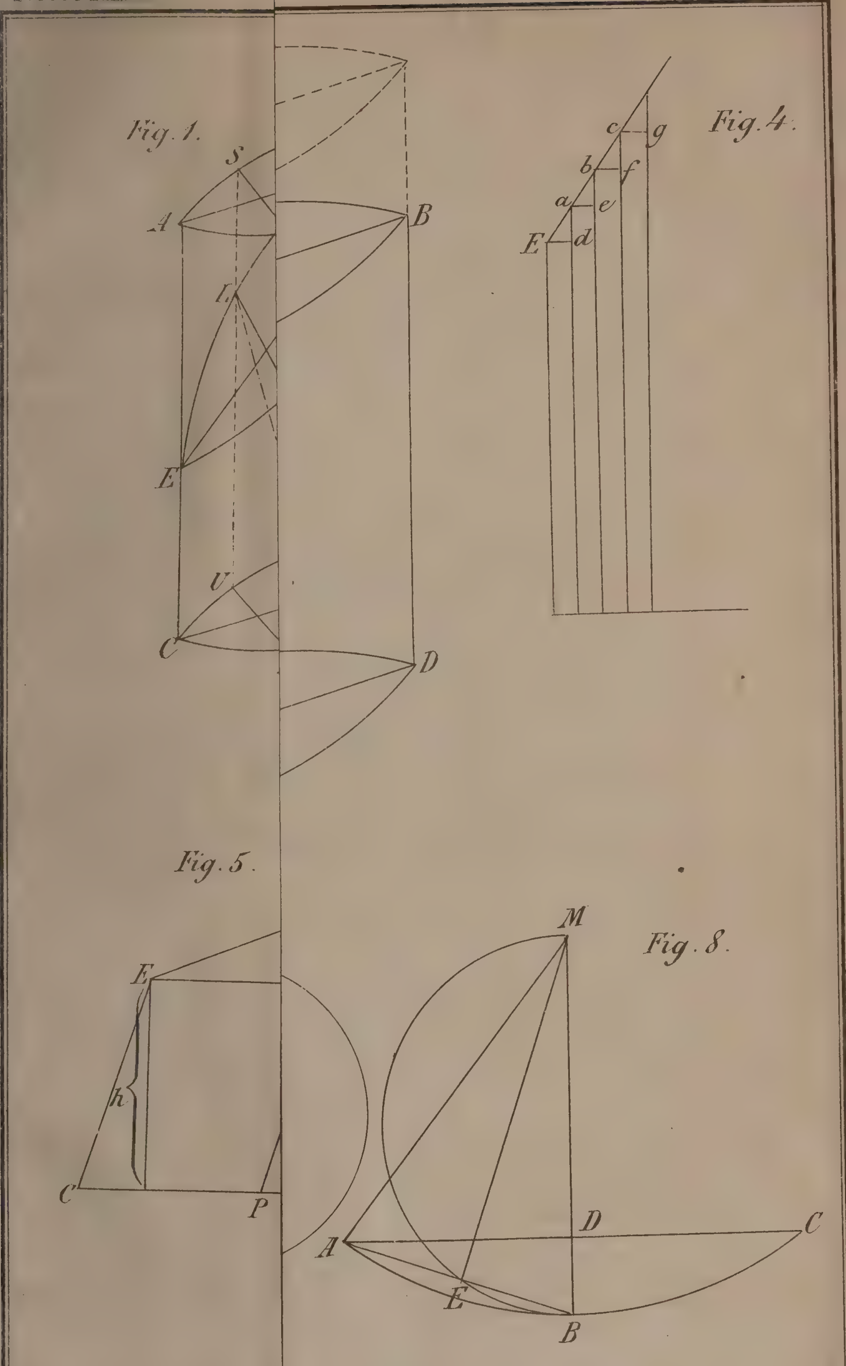


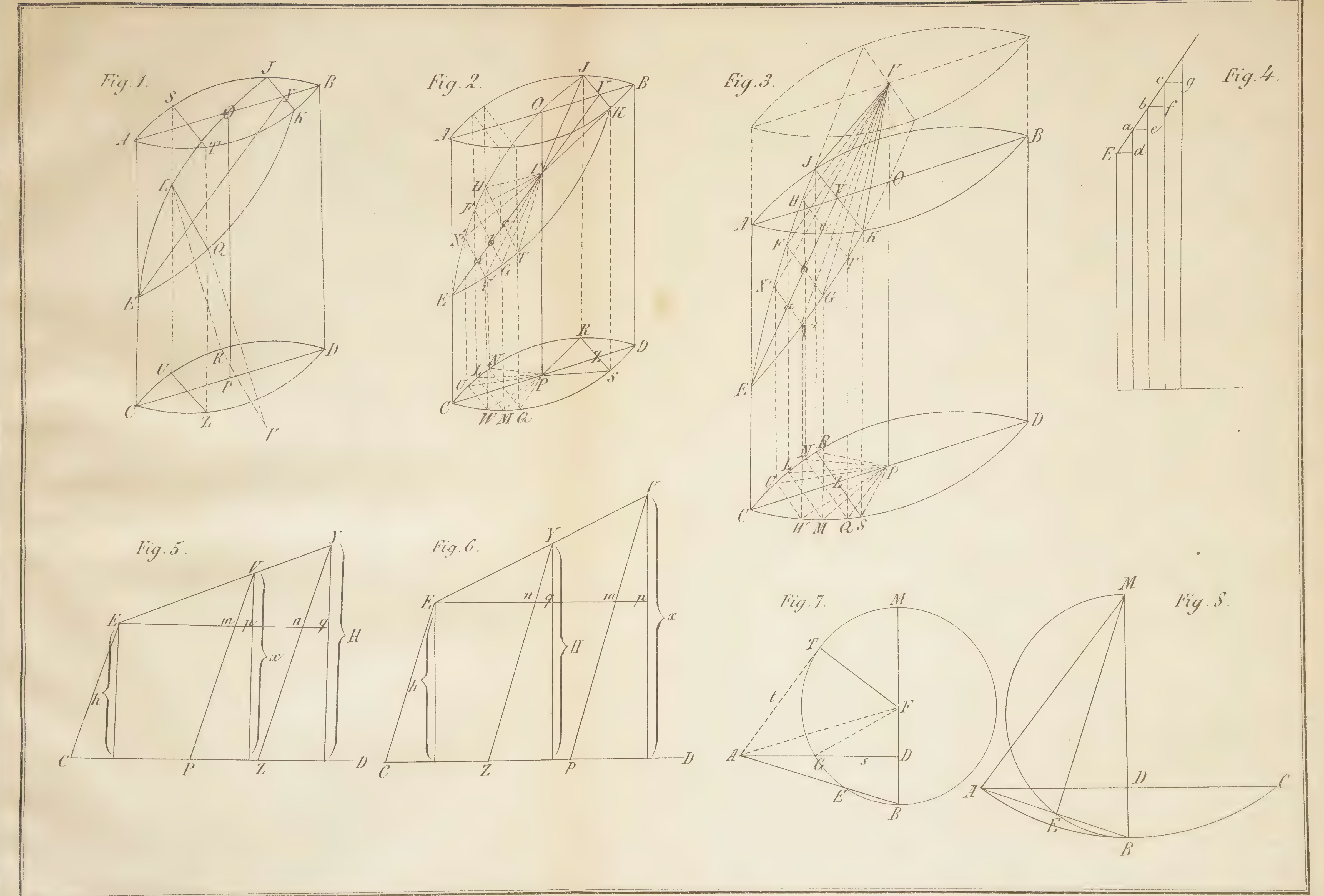
H'
H
S'
G
S
A
F
Fig. 6.
D
E
G
B
C
D
a
A
a
a
r
T
ψ
B
C
Z
G
a
Fig. 3
H
Fig. 4.
Q
F
φ
a
u-y
G
x
Y
Y'
D
a
E
y
y
O'
a
x
X
O
a
B
A
K'
K
a
r
Q'
ψ
C


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.


Fig. 4.
K
L
J
E
O
H
F
D
G
S
Q
P
C
B
Fig. 7.
A
E
T
O
S
N
a
M
P
C
D
O,
Fig.
H
G
A
S
H
G
A
S


Fig. 1.
D
F
O
E
T
H
R
L
J
K
G
A S
Q
C
P
B
Fig. 2.
D
F
H
O
E
K'
L
M
J
K
A
Q
C
P
B
Fig. 3.
O
G
A
Q
C
P
B
Fig. 4.
K
L
J
E
O
H
F
D
G
A
S
Q
P
C
B
Fig. 5.
H
a
G
y
A
S
x
Q
C
P
a
B
x
b
Fig. 6.
H
G
A
S
Q
C
P
B
V
W
Fig. 7.
A
E
T
O
S
B
N
a
M
P
C
D
O,
Fig. 8.
J
A
K
P,
O
P₂
S
T
B
P
C
H


Fig. 1.
S
A
B
L
E
U
C
D
Fig. 4.
c
g
b
f
a
e
E
d
Fig. 5.
E
h
C
P
Fig. 8.
M
D
C
A
E
B


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

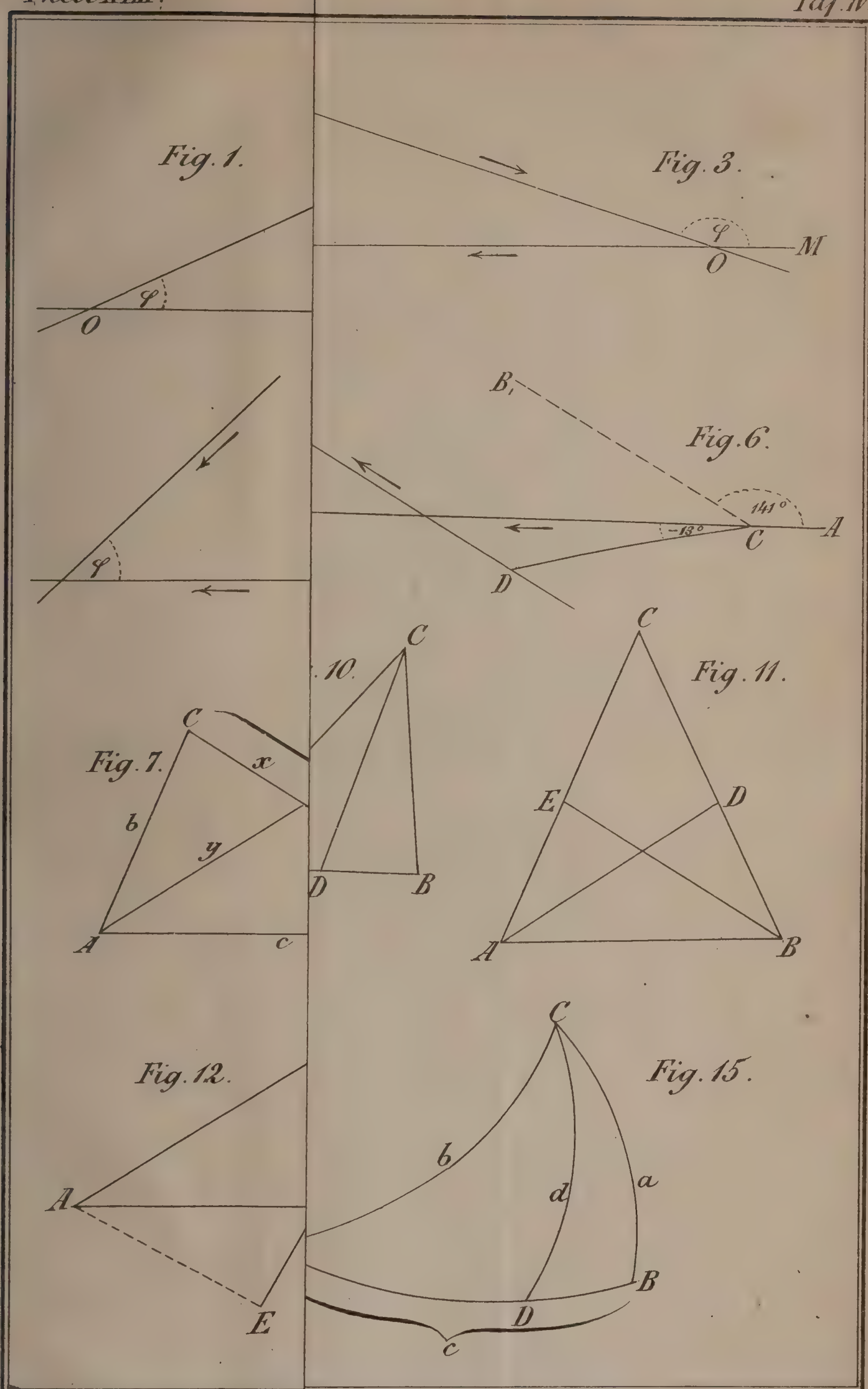


Fig. 1.
O
φ
φ
Fig. 3.
φ
O
M
B,
Fig. 6.
141°
-13°
C
A
D
Fig. 7.
C
x
b
y
A
c
.10.
C
D
B
Fig. 11.
C
E
D
A
B
Fig. 12.
A
E
C
Fig. 15.
b
d
a
B
D
c

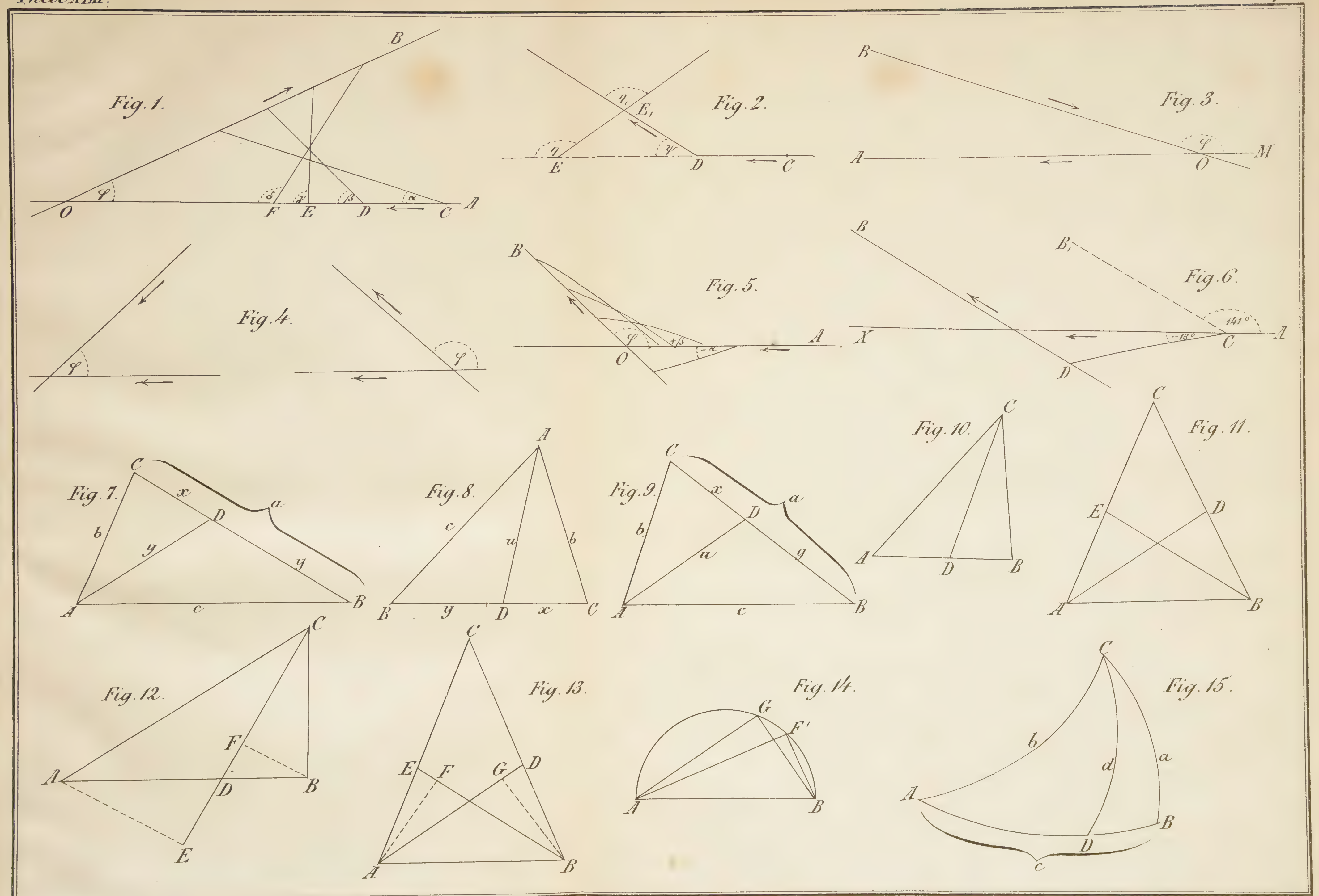


Fig. 1.
B
O φ F δ E γ D β C α A
Fig. 2.
η, E,
E η D ψ C
Fig. 3.
B
A O φ M
Fig. 4.
φ
φ
Fig. 5.
B
O φ +β −α A
Fig. 6.
B
B,
X 141° −13° C A
D
Fig. 7.
C x D a
b y y
A c B
Fig. 8.
A
c u b
B y D x C
Fig. 9.
C x D a
b u y
A c B
Fig. 10.
C
A D B
Fig. 11.
C
E D
A B
Fig. 12.
C
F
A D B
E
Fig. 13.
C
E F G D
A B
Fig. 14.
G F′
A B
Fig. 15.
C
b d a
A B
D
c

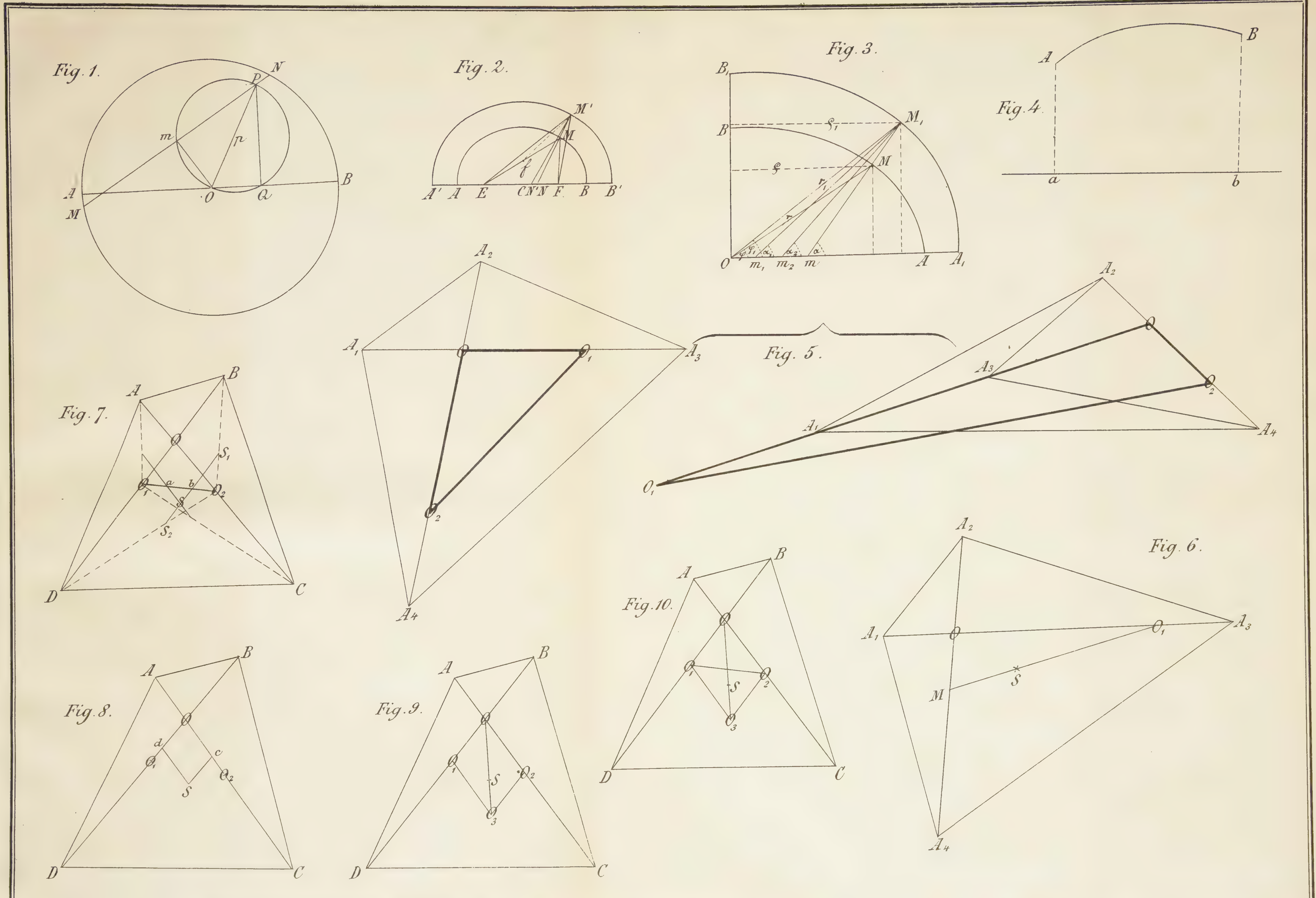
Fig. 1.

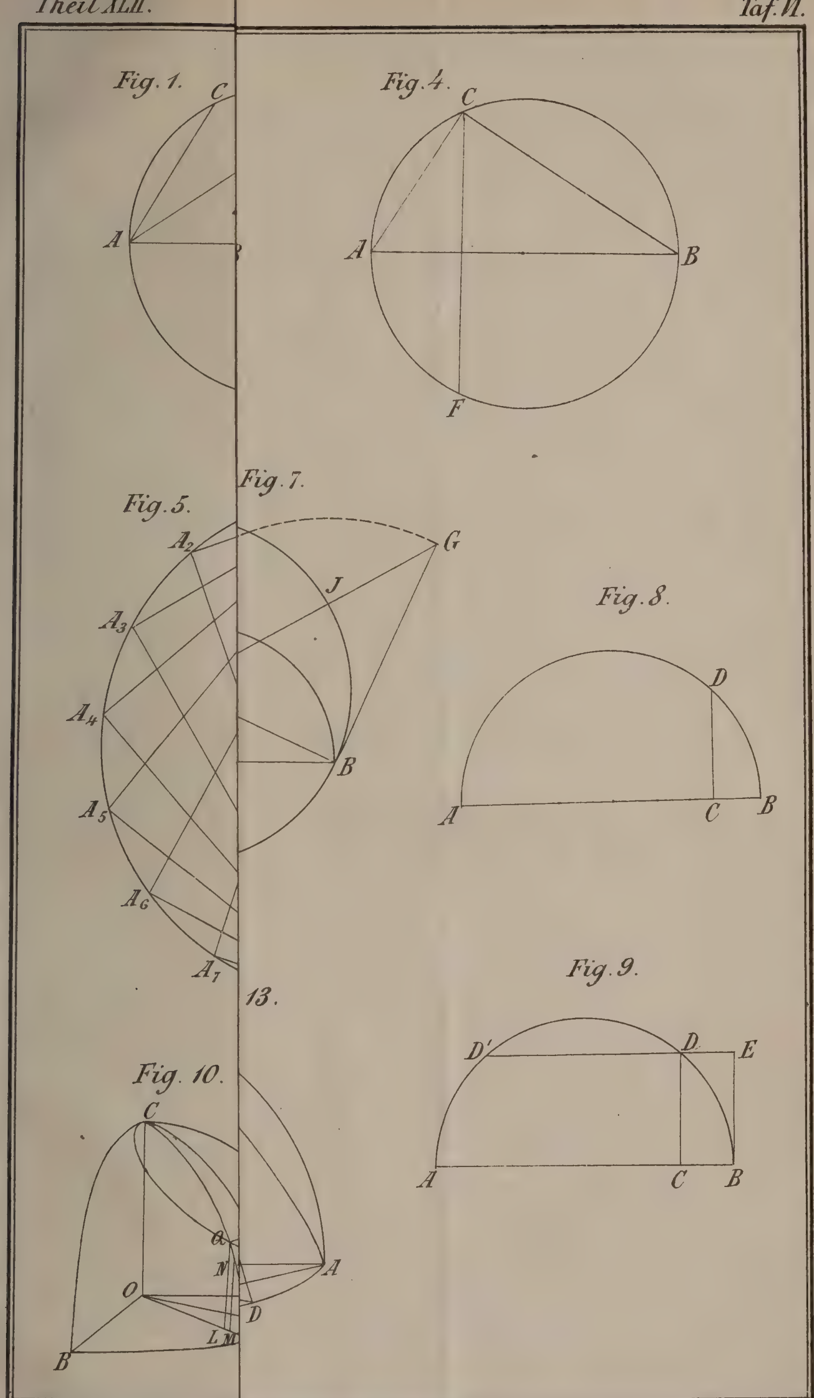
Fig. 4.

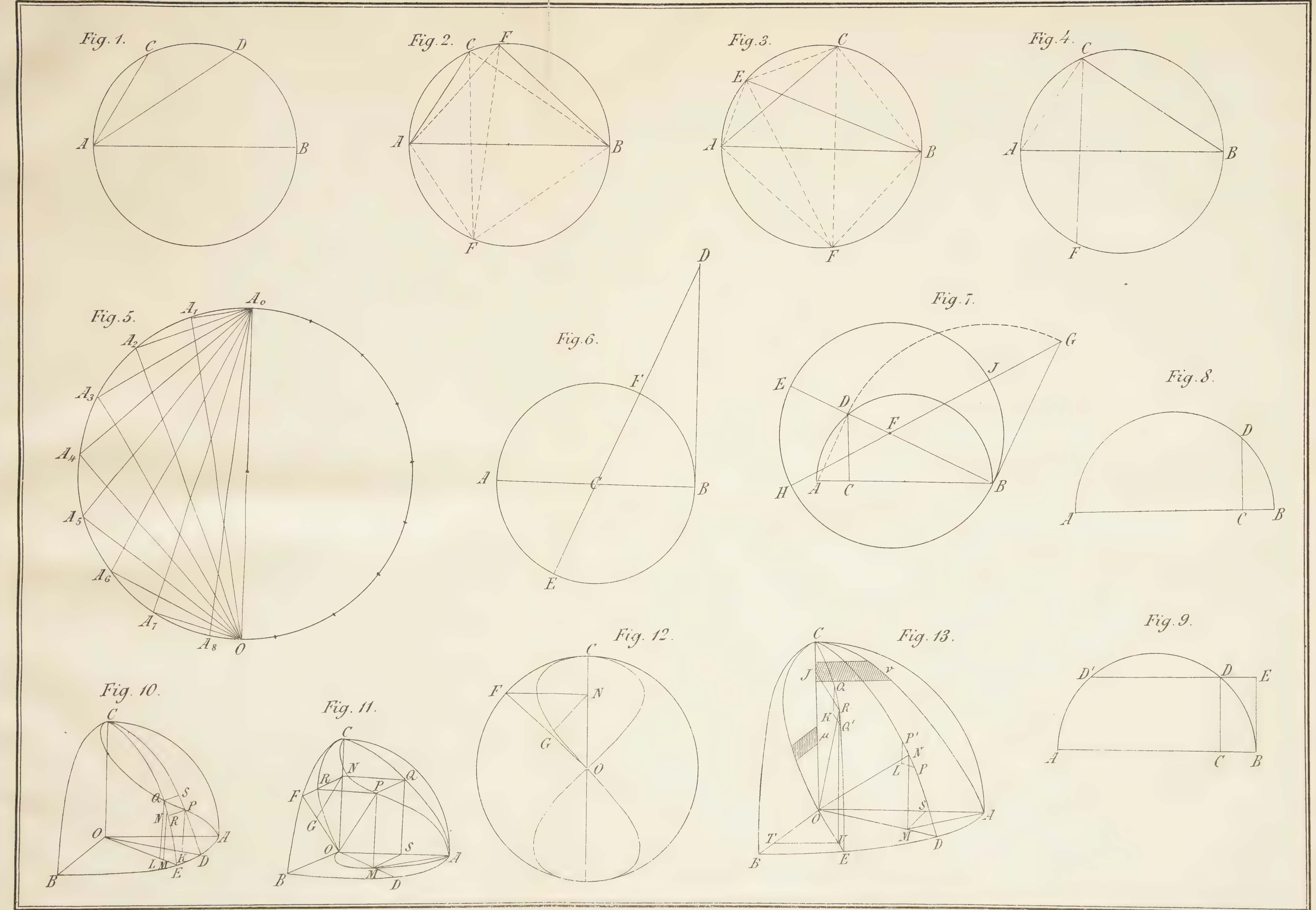
Fig. 7.

Fig. 6.

Fig. 8.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.


Fig. 1.
C
A
Fig. 4.
C
A
B
F
Fig. 5.
Fig. 7.
A2
G
J
A3
A4
B
A5
A6
A7
13.
Fig. 8.
D
A
C
B
Fig. 9.
D'
D
E
A
C
B
Fig. 10.
C
a
N
A
O
D
L
M
B


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.


UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.5AR C001
ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK
42 1864
3 0112 016759380